

# Diario delle Lezioni del Corso di Algoritmi- modulo **Complessità**

A.A. 2010-2011  
Dott.ssa Margherita Zorzi

## 1 Materiale didattico

### Libro di testo

C.H. Papadimitriou, *Computational Complexity*, ed Addison-Wesley Publishing Company, 1994.

Si consiglia inoltre, in caso di necessità, di ripassare gli algoritmi introdotti durante il corso su un testo di algoritmi (ad esempio *Introduzione agli algoritmi* di Cormen Thomas H. - Leiserson Charles E. - Rivest Ronald L. ).

## 2 Nota

Di seguito si riporta il diario delle lezioni. E' richiesta la conoscenza di tutte le definizioni e di tutti i risultati, e le dimostrazioni dei risultati contrassegnati con l'asterisco.

Per quel che riguarda le riduzioni, si consiglia di studiare anche quelle viste in classe ma non contrassegnate dall'asterisco. L'assenza dell'asterisco significa che non verranno chieste direttamente nella prova scritta, ma lo studio delle tecniche di riduzione è fondamentale per costruire riduzioni o prove di completezza per problemi proposti in sede d'esame.

## 3 Lezioni

### Lezione del 19 ottobre 2010 (2 ore)

- Introduzione al corso
- Nozioni di *problema trattabile* e di *risorse computazionali*
- Problemi ed algoritmi
- Richiami notazione "O"

- Versione decisionale e versione costruttiva di un problema computazionale e relazione tra le due versioni
- Questione della Codifica: codifiche ragionevoli e relazione tra codifiche ragionevoli

Riferimenti al libro di testo

- Capitolo 1, sez 1,1, pp. 3-8
- Capitolo 2. p. 26

**Lezione del 21 ottobre 2010 (3 ore)**

- Esempi di Problemi: Path, Max Flow, TSP
- Macchina di Turing deterministica a 1 e a k nastri
- Prima definizione della classe  $TIME(f(n))$
- Teorema di simulazione della k-MdT con la 1-MdT (2.1)
- Macchina RAM, introduzione

**Lezione del 26 ottobre 2010 (2 ore)**

- Macchina RAM: istruzioni e semantica delle istruzioni
- Risultati di equivalenza tra il modello RAM e il modello MdT (simulazione MdT con RAM), Th. 2.4

**Lezione del 28 ottobre 2010 (3 ore)**

- Risultati di equivalenza tra il modello RAM e il modello MdT (simulazione con RAM con Mdt), Th. 2.5
- Tesi del Calcolo Sequenziale: enunciato, significato e conseguenze
- Teorema dello Speedup Lineare\* (risorsa tempo), Th.2.2

Riferimenti al libro di testo

- Capitolo 2 fino a pagina 45, esclusa la complessità in spazio, sezione 2.5, (che verrà affrontata più avanti)

**Lezione del 2 novembre 2010 (2 ore)**

- Definizione della Classe P
- Problemi in P: PATH, MAX FLOW, PERFECT MATCHING

Riferimenti al libro di testo

- Per gli algoritmi: Cap 1. Le classi di complessità sono definite nel Cap. 7

#### **Lezione del 4 novembre 2010 (3 ore)**

- Macchina di Turing Non Deterministica
- Definizione della Classe NP
- Algoritmo non deterministico per TSP
- Teorema di simulazione NMdT con 3-Mdt, Th 2.6

Riferimenti al libro di testo

- Cap 2, pp 45-48, Le classi di complessità sono definite nel Cap. 7

#### **Lezione del 9 novembre 2010 (2 ore)**

- Algoritmo non-deterministico per SAT
- Definizioni di Verificatore, Verificatore polinomiale
- Definizione della Classe VP e risultato VP=NP (prova per esercizio)
- Definizione della Classe EXP

#### **Lezione dell' 11 novembre 2010 (3 ore)**

- Esempio di problema in EXP: QSAT
- La risorsa Spazio
- Definizione di  $SPACE(f(n))$  ed  $NSPACE(f(n))$ , L, NL, PSPACE ed NPSPACE.
- Teorema di Compressione, Th 2.3.
- Algoritmo n L per PAL
- Algoritmo in NL per Path
- Discussione sulla relazione tra spazio e tempo.

Riferimenti al libro di testo

- Cap 2, Sez 2.5. Le classi di complessità sono definite nel Cap. 7

#### **Lezione del 16 novembre 2010 (2 ore)**

- Funzioni Proprie, con esempi. Dimostrazione che  $f(n)=c$ ,  $f(n)=n$ ,  $f(n)=\log(n)$  sono proprie\*
- Famiglia di risultati di inclusione non stretta tra classi non omogenee (Th 2.6, punti A) e B))

Riferimenti al libro di testo

- Cap 7, Sezione 7.1 (per ora escluse le classi complemento), Sezione 7.3 (fino a pg 147)

### Lezione del 18 novembre 2010 (2 ore)

- Famiglia di risultati di inclusione non stretta tra classi non omogenee: Th 2.6, punto C)
- Cenni di ripasso della Macchina di Turing Universale e del Problema della Terminazione
- Linguaggio  $\mathcal{H}_f$

Riferimenti al libro di testo

- Cap 7, Sezione 7.2 (fino a pg 143)
- Per ripassare le MdT Universali e l'Indecidibilità, Cap. 3

### Lezione del 23 novembre 2010 (2 ore)

- Teoremi di gerarchia: primo Lemma per il TH di Gerarchia in Tempo: Lemma 7.1
- Teoremi di gerarchia: secondo Lemma per il TH di Gerarchia in Tempo Lemma 7.2
- Teoremi di gerarchia: TH di Gerarchia in Tempo (2 versioni): Th 7.1

### Lezione del 25 novembre 2010 (3 ore)

- Conseguenza Teorema Gerarchia Tempo:  $P \subset EXP$
- Teoremi di gerarchia: Teorema di gerarchia in Spazio Th. 7.2
- Una conseguenza Teorema Gerarchia Spazio:  $L \subset PSPACE$
- Teorema del Gap Th. 7.3
- Teorema di Savitch (Th. 7.5)
- Corollario del Teorema di Savitch\*:  $NSPACE(f(n)) \subseteq \dots$
- $PSPACE = NPSPACE$
- Introduzione alla nozione di Riduzione
- Definizioni di *riduzione* e *riduzione logaritmica*  $\leq_{log}$  (Def: 8.1)

Riferimenti al libro di testo

- Cap 7, Sezione 7.2 e Sez. 7.3 da pag. 147 a pag. 151 (Th. di Immerman escluso) Cap 8, pp 159-160

### Lezione del 30 novembre 2010 (2 ore)

- HAMILTONIAN PATH  $\leq_{log}$  SAT (Ex 8.1)

### Lezione del 2 dicembre 2010 (3 ore)

- REACHABILITY  $\leq_{log}$  CIRCUIT VALUE (Ex 8.2)
- Esempio di riduzione *per generalizzazione* : CIRCUIT VALUE  $\leq_{log}$  CIRCUIT SAT (Ex 8.4)
- CIRCUIT SAT  $\leq_{log}$  SAT\* (Ex 8.3)

### Lezione del 7 dicembre 2010 (2 ore)

- Studio delle proprietà della relazione: riflessività e transitività con dimostrazione Prop. 8.2
- Definizione di C-completezza (Def 8.2)
- Proposizione: L,NL,P,NP,PSPACE,EXP sono chiuse rispetto a  $\leq_{log}$  (dim per esercizio) (Prop 8.3)
- Risultato di uguaglianza tra classi come conseguenza della completezza di un linguaggio\* (Prop 8.4)
- Nozione di *tabella di computazione*

### Lezione del 9 dicembre 2010 (2 ore)

- CIRCUIT VALUE è P-completo\*, (Th. 8.1)
- Teorema di Cook: SAT è NP-completo, dimostrazione di CIRCUIT SAT è NP-completo\* Th. 8.2
- Caratterizzazione logica di NP, cenni (solo da leggere, (Sez. 8.3))

#### Riferimenti al libro di testo

- Cap 8 completo, da leggere la sezione 8.3

### Lezione del 14 dicembre 2010 (2 ore)

- Rassegna di problemi NP-Completi (prendiamo sempre la versione di decisione). Varianti di SAT:
  - K-SAT
  - 3-SAT e prova di NP-completezza\*

- varianti di 3-SAT: variante di 3SAT ancora NP-completa, ipotesi per portare 3-SAT in P, con prova di appartenenza a P\*
- 2-SAT ∈ P (perché? Esercizio utile)
- MAX-K-SAT
- NAESAT con prova di NP-Completezza;

### Lezione del 16 dicembre 2010 (3 ore)

- Rassegna di problemi NP-Completi: gadget e tecniche di riduzione.
  - **Problemi sui grafi, sulle reti, di ottimizzazione:**
  - NP-completezza di MAX INDEPENDENT SET\* ( $3\text{-SAT} \leq_{\log} \text{MIS}$ ) (Th. 9.4)
  - MAX CLIQUE, prova di NP completezza tramite MIS\* (Corollary 2, pg 190)
  - VERTEX COVER, prova di NP completezza tramite MIS\* (Corollary 2, pg 190)
  - GRAPH ISOMORPHISM
  - NP-completezza di 3-COLORABILITA' (NAESAT  $\leq_{\log}$  3-COLORABILITA') (Th. 9.8)
  - Se  $K=2$ , K-COLORABILITA' è in P (ragionarci per esercizio)
  - MAX CUT
  - HAMILTONIAN PATH, HAMILTONIAN CIRCUIT (prova di NP completezza da leggere facoltativamente)
  - Cenni problemi con Algoritmi Pseudopolinomiali
  - ZAINO
  - Nozione di NP-completezza forte
- Problemi completi rispetto ad altre classi di complessità:
  - QSAT è PSPACE-completo (Th. 19.1)
  - REACHABILITY è NL-completo (Th. 16.2)
  - 2-SAT è NL-completo (Th. 16.3)

#### Riferimenti al libro di testo

- Cap 9. Cap 16, pp 398, Cap 19 pp 456

### Lezione dell' 11 gennaio 2011 (2 ore)

- Le classi complemento.
- Classi complemento e determinismo (C-coC)
- Classi complemento e spazio non deterministico: Corollario al Th di Immerman (nel capitolo 7, pag 153)

- coNP: definizione
- Esempi di problemi in coNP e co-NP: VALIDITY, HAMILTONIAN PATH COMPLEMENT
- coNP-Completezza di VALIDITY\* (PG. 220)
- Risultati per coNP\* (Prop. 10.1 e Prop. 10.2)
- $coNP \cap NP$
- cenni su  $NP \stackrel{?}{=} coNP$

Riferimenti al libro di testo

- Cap 10 fino a pagina 221. Nota: dall 2003,  $PRIME \in P!$

**Lezione del 13 gennaio 2011 (3 ore)**

- Esercitazione e ripasso

## 4 Problemi visti in classe durante le lezioni, riepilogo

**Classe L**

- PAL

**Classe NL**

- RAGGIUNGIBILITA' (algoritmo con funzione di marcatura, con gestione non deterministica della visita del grafo)
- 2-SAT

**Classe P**

- RAGGIUNGIBILITA' (algoritmo standard con funzione di marcatura e lista)
- MAX FLOW
- PERFECT MATCHING
- CIRCUIT VALUE\* (prova di P-completezza tramite tabella di riduzione)
- in P ci sono anche versioni "facili" di problemi in NP: 2-SAT, 2-COL...

**Classe NP**

- CIRCUIT SAT

- SAT (soddisfacibilità di espressione booleana). Varianti di SAT: K-SAT (senza e con ipotesi aggiuntive), NAESAT, MAX-K-SAT
- TSP (Commesso viaggiatore). Si può definire su un grafo non diretto completamente connesso
- MAX INDEPENDENT SET (D) (su  $G=(V,E)$  non diretto)
- MIN VERTEX COVER(D) (su  $G=(V,E)$  non diretto)
- MAX CLIQUE(D) (su  $G=(V,E)$  non diretto)
- GRAPH ISOMORPHISM ( $G=(V,E)$ ,  $G'=(V',E')$ )
- K-COLORABILITA' (su  $G=(V,E)$  non diretto)
- CAMMINO e CIRCUITO HAMILTONIANO (su  $G=(V,E)$  non diretto o diretto)
- ZAINO

**Classe EXP**

- QSAT