Elementi di Logica — Esercizi

Esercizio 1. In un linguaggio in cui c'è un simbolo di relazione binaria $\mathbf{P}$ e un simbolo di funzione binaria $\mathbf{f}$, dire quali delle seguenti successioni di simboli sono formule, quali termini, e quali nulla; in quest'ultimo caso motivare la risposta.

$\forall \mathbf{v}_0 \neg \vee \mathbf{P} \mathbf{f} \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_0$

$\mathbf{f} \mathbf{v}_1 \mathbf{f} \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2$

$\mathbf{f} \mathbf{v}_1 \mathbf{f} \mathbf{v}_2$

$\vee \forall \mathbf{v}_1 \mathbf{P} \mathbf{f} \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_3 \neg \mathbf{P} \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2$

$\vee \forall \mathbf{v}_0 \mathbf{P} \mathbf{f} \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_3 \neg \mathbf{P} \mathbf{v}_0 \mathbf{f} \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2$

$\vee \vee \mathbf{f} \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \neg \mathbf{P} \mathbf{v}_3 \mathbf{v}_0 \neg \forall \mathbf{v}_1 \mathbf{P} \mathbf{f} \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3$

$\vee \vee \mathbf{P} \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \neg \mathbf{P} \mathbf{v}_3 \mathbf{f} \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_4 \neg \forall \mathbf{v}_1 \mathbf{P} \mathbf{f} \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3$

Esercizio 2. In un linguaggio in cui c'è un simbolo di relazione binaria $\mathbf{P}$ e un simbolo di funzione unaria $\mathbf{f}$, dire quali delle seguenti successioni di simboli sono formule, quali termini, e quali nulla; in quest'ultimo caso motivare la risposta.

$\forall \mathbf{v}_0 \neg \vee \mathbf{P} \mathbf{f} \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_0$

$\mathbf{f} \mathbf{v}_1 \mathbf{f} \mathbf{v}_2$

$\vee \forall \mathbf{v}_1 \mathbf{P} \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_0 \neg \mathbf{P} \mathbf{f} \mathbf{v}_0 \mathbf{f} \mathbf{v}_1$

$\vee \forall \mathbf{v}_0 \mathbf{P} \mathbf{f} \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_0 \neg \mathbf{P} \mathbf{v}_0 \mathbf{f} \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2$

$\vee \vee \mathbf{v}_1 \neg \mathbf{P} \mathbf{v}_3 \mathbf{f} \mathbf{v}_0 \neg \forall \mathbf{v}_1 \mathbf{P} \mathbf{f} \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3$

$\vee \vee \mathbf{P} \mathbf{v}_1 \mathbf{f} \mathbf{v}_2 \neg \mathbf{P} \mathbf{v}_3 \mathbf{v}_4 \neg \forall \mathbf{v}_1 \mathbf{P} \mathbf{f} \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_3$

$\mathbf{f} \mathbf{f} \mathbf{f} \mathbf{v}_0$

Esercizio 3. In un linguaggio in cui c'è un simbolo di relazione unaria $\mathbf{P}$ e un simbolo di funzione unaria $\mathbf{f}$, dire quali delle seguenti successioni di simboli sono formule, quali termini, e quali nulla; in quest'ultimo caso motivare la risposta.

$\forall \mathbf{v}_0 \neg \wedge \mathbf{P} \mathbf{f} \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_0$

$\mathbf{P} \mathbf{f} \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2$

$\wedge \forall \mathbf{v}_1 \mathbf{P} \mathbf{v}_1 \neg \mathbf{P} \mathbf{f} \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_1$

$\wedge \forall \mathbf{v}_0 \mathbf{P} \mathbf{f} \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_0 \neg \mathbf{P} \mathbf{v}_0 \mathbf{f} \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2$

$\wedge \wedge \mathbf{f} \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_0 \neg \mathbf{P} \mathbf{v}_4 \neg \forall \mathbf{v}_0 \mathbf{P} \mathbf{f} \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_2$

$\wedge \wedge \mathbf{P} \mathbf{f} \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \neg \mathbf{P} \mathbf{v}_3 \neg \forall \mathbf{v}_1 \mathbf{P} \mathbf{f} \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_3$

$\mathbf{f} \mathbf{f} \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2$

Negli esercizi seguenti, si consideri la struttura $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, \{=, <\}, \{+, \times\}, \{0, 1\})$, dove $\mathbb{N}$ denota l'insieme dei numeri naturali, $=$ la relazione binaria di essere lo stesso numero, $<$, $+$ e $\times$ rispettivamente l'ordine, l'addizione e la moltiplicazione tra numeri naturali, 0 e 1 i numeri zero e uno.

Sia $\mathscr{L}$ un linguaggio adatto alla struttura i cui simboli propri siano i predicati $\boldsymbol{=}$, $\boldsymbol{<}$; i simboli per funzione $\boldsymbol{+}$ e $\boldsymbol{\times}$; i simboli per costante $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$.

Esercizio 4. Nel linguaggio $\mathscr{L}$ si scriva una formula $\varphi(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1)$ con le sole variabili libere indicate tale che $\mathfrak{N} \models \varphi(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1)[a, b]$ se e solo se: $b - 2a > 0$ e a è divisibile per 2 e per 5.

Esercizio 5. Nel linguaggio $\mathscr{L}$ si scriva una formula $\varphi(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1)$ con le sole variabili libere indicate tale che $\mathfrak{N} \models \varphi(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1)[a, b]$ se e solo se: $ab \geq 0$ e se $a > 3$, allora $ab > 6$.

ESERCIZIO 6. Nel linguaggio $\mathscr{L}$ si scriva una formula $\varphi(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1)$ con le sole variabili libere indicate tale che $\mathfrak{N} \models \varphi(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1)[a, b]$ se e solo se: $a - b > 0$ e a è pari se e solo se b è dispari.

ESERCIZIO 7. Nel linguaggio $\mathscr{L}$ si scriva una formula $\varphi(\mathbf{v}_0)$ con la sola variabile libera indicata tale che $\mathfrak{N} \models \varphi(\mathbf{v}_0)[a]$ se e solo se: a è multiplo di 2 e a non è multiplo di 3.

ESERCIZIO 8. Nel linguaggio $\mathscr{L}$ si scriva una formula $\varphi(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1)$ con le sole variabili libere indicate tale che $\mathfrak{N} \models \varphi(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1)[a, b]$ se e solo se: $b \geq 2$, $a > 3$ e ab divide 4.

Negli esercizi seguenti il linguaggio ha come simbolo proprio solo quello di una relazione binaria $\boldsymbol{=}$ la cui interpretazione nella struttura è la relazione di identità.

ESERCIZIO 9. Si dica in quali strutture è vero il seguente enunciato

$$\forall \mathbf{v}_0 \exists \mathbf{v}_2 \neg \boldsymbol{=} \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_0$$

ESERCIZIO 10. Si dica in quali strutture è vero il seguente enunciato

$$\forall \mathbf{v}_0 \forall \mathbf{v}_1 \neg \boldsymbol{=} \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_0$$

ESERCIZIO 11. Si dica in quali strutture è vero il seguente enunciato

$$\forall \mathbf{v}_0 \forall \mathbf{v}_1 \boldsymbol{=} \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_0$$

ESERCIZIO 12. Si dica in quali strutture è vero il seguente enunciato

$$\exists \mathbf{v}_0 \forall \mathbf{v}_1 \neg \boldsymbol{=} \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_0$$

ESERCIZIO 13. Si dica in quali strutture è vero il seguente enunciato

$$\forall \mathbf{v}_0 \forall \mathbf{v}_1 \exists \mathbf{v}_2 \wedge \boldsymbol{=} \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \boldsymbol{=} \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_0$$

ESERCIZIO 14. Si dica in quali strutture è vero il seguente enunciato

$$\forall \mathbf{v}_0 \forall \mathbf{v}_1 \exists \mathbf{v}_2 \vee \boldsymbol{=} \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_2 \neg = \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_0$$

Negli esercizi seguenti si impieghi il teorema di deduzione.

ESERCIZIO 15. Date due formule φ e ψ, dimostrare che

$$\models \rightarrow \wedge \psi \rightarrow \psi \varphi \varphi$$

ESERCIZIO 16. Date due formule φ e ψ, dimostrare che

$$\models \rightarrow \neg \varphi \rightarrow \rightarrow \psi \varphi \neg \psi$$