FUNZIONI

1. Definizioni e prime proprietà

Il concetto di funzione è di uso comune per esprimere la seguente situazione: due grandezze variano l'una al variare dell'altra secondo una certa legge. Ad esempio, l'area del quadrato varia al variare del lato, la pressione di un gas in un recipiente chiuso varia in funzione della temperatura, il tempo impiegato a percorrere un certo tragitto varia in funzione della velocità. In tutti questi casi si osservi che dato un certo valore del lato, della temperatura, o della velocità possiamo ottenere in modo esatto il valore dell'area, della pressione o del tempo semplicemente conoscendo la formula dell'area del quadrato, la legge di Boyle o la legge oraria del moto.

Procedendo analogamente a quanto è stato fatto per le relazioni, da un punto di vista matematico vogliamo astrarre dal significato e dalle caratteristiche fisiche delle funzioni; siamo invece interessati ad individuare le coppie ordinate che sono coinvolte in esse.

Definizione 1.1. Una *funzione* f è un insieme di coppie ordinate con la seguente proprietà, detta *univocità*: se $(a, b) \in f$ e $(a, c) \in f$, allora $b = c$. Se la coppia $(a, b) \in f$ si scrive $b = f(a)$ e si dice che b è immagine di a tramite f, o che b è il valore assunto da f in a.

Esempio 1.2. L'insieme di coppie ordinate $\{(1, 2), (2, 4), (1, 3), (4, 1)\}$ non è una funzione; invece l'insieme $\{(1, 2), (2, 4), (4, 1)\}$ è una funzione.

Si noti che le funzioni sono particolari relazioni, in quanto insiemi di coppie ordinate. Inoltre l'univocità esprime matematicamente quanto già osservato: dato un certo valore della grandezza corrispondente al primo elemento delle coppie ordinate, possiamo individuare in maniera univoca il valore della grandezza corrispondente al secondo elemento delle coppie ordinate. Spesso la quantità corrispondente ai primi termini delle coppie della funzione viene detta *variabile indipendente* e quella corrispondente ai secondi termini viene detta *variabile dipendente*. Tuttavia non bisogna dare al termine "variabile" significati che non ha; il concetto di funzione non li richiede.

Poiché le funzioni sono relazioni, ad esse si applicano tutti i concetti descritti nel capitolo precedente. In particolare, si definiscono il dominio, il codominio, l'insieme di definizione e l'insieme immagine di una funzione data. Inoltre una funzione si dice *totale* se il dominio coincide con l'insieme di definizione e *suriettiva* se il codominio coincide con l'insieme immagine. Se gli insiemi A e B sono rispettivamente il dominio e il codominio di una funzione f e $(a, b) \in f$, si usa la notazione $f\colon A \to B$, $a \mapsto b$; questa notazione si legge " f è una funzione da A in B e manda a in b".

Osservazione 1.3. Per descrivere le coppie ordinate appartenenti a una funzione, spesso si usa la notazione $f = \{(a, b) \mid (a, b) \text{ soddisfa } P\}$, dove P è una data proprietà. Ad esempio, si consideri la funzione $f = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R} \text{ e } x = \frac{y+1}{2}\}$, oppure la funzione $f = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R} \text{ e } y = e^x\}$. In maniera più compatta, si scrive anche $y = f(x)$; ad esempio, le due funzioni sopra descritte, si scrivono rispettivamente $y = 2x + 1$ e $y = e^x$.

Introduciamo ora una nuova importante proprietà di cui possono godere le funzioni.

DEFINIZIONE 1.4. Una funzione f si dice *iniettiva* se gode della seguente proprietà: se $(a, c) \in f$ e $(b, c) \in f$, allora $a = c$.

Si può riformulare la proprietà di iniettività nel modo seguente: dati $x_1, x_2 \in \mathrm{Def}(f)$, se $f(x_1) = f(x_2)$ allora $x_1 = x_2$. Si faccia attenzione a distinguere l'iniettività dall'univocità. Si noti inoltre che, mentre la totalità e la suriettività di una funzione dipendono dal dominio e dal codominio, l'iniettività dipende solo dalla funzione.

ESEMPI 1.5. Si considerino gli insiemi di coppie ordinate $f = \{(1, 2), (3, 4), (5, 7)\}$ e $f' = \{(1, 2), (3, 2), (5, 7)\}$, che sono funzioni; la funzione f è iniettiva, mentre f' non è iniettiva.

Si consideri la funzione $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $x \mapsto 3x + 2$; questa è una funzione iniettiva, poiché se $f(x_1) = f(x_2)$, si ha $3x_1 + 2 = 3x_2 + 2$, da cui si conclude $x_1 = x_2$. Inoltre f è una funzione totale, ma non suriettiva; ad esempio, $4 \notin \mathrm{Im}(f)$.

Si consideri la funzione $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $x \mapsto 3x^2 + 2$; questa è una funzione totale, iniettiva e non suriettiva.

Si consideri la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto 3x^2 + 2$; questa è una funzione totale, non suriettiva e non iniettiva.

DEFINIZIONE 1.6. Una funzione $f \colon A \to B$ totale, iniettiva e suriettiva si dice *biiettiva*.

Le funzioni biiettive sono dette anche *corrispondenze biunivoche*; infatti, data una funzione biiettiva tra due insiemi A e B, possiamo far corrispondere a ogni elemento di A uno e un solo elemento di B.

ESEMPIO 1.7. La funzione $f \colon \mathbf{N} \to 2\mathbf{N}$, $x \mapsto 2x$ è biiettiva.
La funzione $f \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto 2x - 1$ è biiettiva.
La funzione $f \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^3$ è biiettiva.

ESEMPIO 1.8. Un importante esempio di funzione biiettiva è la funzione identica: dato un insieme A, la funzione $f \colon A \to A$, $a \mapsto a$ è detta *identità* su A, e si indica con id_A.

Per concludere introduciamo alcune notazione che useremo frequentemente. Si consideri la funzione $f \colon A \to B$; sia $C \subseteq A$ e $D \subseteq B$. L'insieme $\{f(x) \mid x \in C\}$ è detto *immagine* di C tramite f e si indica con $f(C)$; l'insieme $\{x \mid f(x) \in D\}$ è detto *controimmagine* di D tramite f e si indica con $f^{\leftarrow}(D)$. Si noti che $f(C) \subseteq B$ e $f^{\leftarrow}(D) \subseteq A$. Si osservi inoltre che, in generale, $f^{\leftarrow}(f(C)) \neq C$ e $f(f^{\leftarrow}(D)) \neq D$; si verifichi che $C \subseteq f^{\leftarrow}(f(C))$ per ogni $C \subseteq A$ e $f(f^{\leftarrow}(D)) \subseteq D$ per ogni $D \subseteq B$ (si veda l'Esercizio 17).

ESEMPIO 1.9. Sia $f \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^2$ e sia $C \subseteq \mathbf{R}$, $C = \{1, 2\}$. Allora $f^{\leftarrow}(f(C)) = \{1, -1, 2, -2\}$.
Sia $f \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto 2x$ e sia $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{R}$; allora $f(f^{\leftarrow}(\mathbf{N})) = 2\mathbf{N}$.

2. Funzioni composte

Supponiamo di voler studiare la pressione di una gas in un recipiente chiuso; abbiamo già richiamato nella sezione precedente che la pressione varia in funzione della temperatura del gas. Ma se a sua volta la temperatura del gas varia al variare del tempo, chiaramente si ottiene che la pressione del gas varia al variare del tempo. Questo esempio introduce il concetto di funzione composta.

DEFINIZIONE 2.1. Siano f e g due funzioni; l'insieme di coppie ordinate

$$\{(a, c) \mid \text{esiste } b \text{ tale che } (a, b) \in f \text{ e } (b, c) \in g\}$$

si dice *funzione composta* di f e g e si indica con $g \circ f$. Se la coppia $(a, c) \in g \circ f$, si scrive $c = g(f(a))$.

ESEMPIO 2.2. Si considerino le due funzioni $f = \{(1, 5), (3, 7), (4, 6), (5, 5)\}$ e $g = \{(2, 3), (5, 1), (6, 3)\}$; possiamo allora calcolare le due funzioni composte $g \circ f = \{(1, 1), (4, 3), (5, 1)\}$ e $f \circ g = \{(2, 7), (5, 5), (6, 7)\}$.

Sia $f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $x \mapsto 2x$, e sia $g\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $x \mapsto x + 5$; allora $g \circ f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $x \mapsto 2x + 5$ e $f \circ g\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $x \mapsto 2(x + 5)$.

Come mostra l'esempio precedente, cambiando l'ordine di composizione si ottengono in generale funzioni composte diverse.

Si noti inoltre che, date due funzioni f e g, affinché la funzione composta $g \circ f$ sia non vuota, l'intersezione $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Def}(g)$ deve essere diversa dall'insieme vuoto. In generale, se $f\colon A \to B$ e $g\colon C \to D$, allora si può assumere come dominio della funzione $g \circ f$ l'insieme A, e come codominio l'insieme D. Inoltre l'insieme di definizione è $\{x \mid f(x) \in \mathrm{Def}(g)\}$, cioè $\mathrm{Def}(g \circ f) = f^{\leftarrow}(\mathrm{Def}(g))$, mentre l'insieme immagine è $\{z \mid z = g(y) \text{ per qualche } y \in \mathrm{Im}(f)\}$, cioè $\mathrm{Im}(g \circ f) = g(\mathrm{Im}(f))$.

ESEMPIO 2.3. Sia $f\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $x \mapsto x - 2$ e $g\colon \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$; quindi $\mathrm{Def}(f) = \mathbf{Z}$, $\mathrm{Def}(g) = \mathbf{Q} \setminus \{0\}$ e $\mathrm{Def}(g \circ f) = \mathbf{Z} \setminus \{2\}$.

Sia $f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $x \mapsto 2x$ e $g\colon 3\mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $x \mapsto \frac{x}{3}$; quindi $\mathrm{Def}(f) = \mathbf{N}$, $\mathrm{Def}(g) = 3\mathbf{N}$ e $\mathrm{Def}(g \circ f) = f^{\leftarrow}(\mathrm{Def}(g)) = f^{\leftarrow}(3\mathbf{N}) = 3\mathbf{N}$.

Dall'esempio precedente si osserva come, anche se f e g sono funzioni totali, in generale $g \circ f$ non è una funzione totale. La proposizione seguente analizza il legame tra le proprietà delle funzioni di partenza e quelle della funzione composta.

PROPOSIZIONE 2.4. *Si considerino due funzioni* $f\colon A \to B$ *e* $g\colon C \to D$.

(1) *La funzione* $g \circ f$ *è totale se e solo se* f *è totale* e $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Def}(g)$*;*
(2) *Se* f *e* g *sono iniettive, allora* $g \circ f$ *è iniettiva;*
(3) *Se* g *è suriettiva* e $\mathrm{Def}(g) \subseteq \mathrm{Im}(f)$*, allora* $g \circ f$ *è suriettiva;*
(4) *Se* g *è iniettiva e* $g \circ f$ *è suriettiva, allora* $\mathrm{Def}(g) \subseteq \mathrm{Im}(f)$.
(5) *Se* f *e* g *sono biiettive,* $g \circ f$ *è biiettiva se e solo se* $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Def}(g)$*, cioè se e solo se* $B = C$.

DIMOSTRAZIONE. 1) Supponiamo che $g \circ f$ sia totale; quindi per ogni $x \in A$ esiste $z \in D$ tale che $z = g(f(x))$; in particolare esiste $y \in \mathrm{Im}(f)$ tale che $y = f(x)$ e pertanto f è totale. Si consideri inoltre $y \in \mathrm{Im}(f)$ e sia $x \in A$ tale che $f(x) = y$. Poiché $g \circ f$ è totale, esiste $z \in D$ tale che $z = g(f(x))$; ne segue quindi $y \in \mathrm{Def}(g)$. Supponiamo invece che f sia totale e che $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Def}(g)$. Dato $x \in A$, poiché esiste $y \in \mathrm{Im}(f)$

tale che $y = f(x)$ e $y \in \mathrm{Def}(g)$, allora esiste $z \in D$ tale che $z = g(y) = g(f(x))$; ne segue che $g \circ f$ è totale.

2) Se $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, essendo g iniettiva, segue che $f(x_1) = f(x_2)$. Poiché anche f è iniettiva, si ottiene $x_1 = x_2$.

3) Supponiamo $\mathrm{Def}(g) \subseteq \mathrm{Im}(f)$ e sia $z \in D$. Poiché g è suriettiva, esiste $y \in \mathrm{Def}(g)$ tale che $z = g(y)$; dato che $y \in \mathrm{Im}(f)$, esiste $x \in A$ tale che $y = f(x)$ e quindi $z = g(f(x))$.

4) Sia $y \in \mathrm{Def}(g)$; poiché $g \circ f$ è suriettiva, esiste $x \in A$ tale che $g(y) = g(f(x))$. Essendo g iniettiva, segue che $y = f(x)$ e pertanto $\mathrm{Def}(g) \subseteq \mathrm{Im}(f)$.

5) Segue dalle precedenti. $\square$

3. Funzione inversa

Consideriamo la formula che esprime l'area del quadrato in funzione del lato, $A = l^2$; tale funzione ci permette di trovare l'area noto il lato del quadrato. Possiamo però anche considerare il lato come funzione dell'area, secondo la formula $l = \sqrt{A}$. Questo primo esempio introduce il concetto di funzione inversa che studieremo in questa sezione.

In generale, data una funzione f, è sempre possibile costruire l'insieme $f^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in f\}$; si costruisce cioè l'insieme di coppie ordinate ottenuto scambiando l'ordine dei termini nelle coppie ordinate contenute in f. Si osservi che f^{-1} è sicuramente una relazione, ma in generale non è una funzione, dato che potrebbe non godere della proprietà di univocità.

Esempio 3.1. Si consideri la funzione $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$; la relazione $f^{-1} = \{(2, 1), (3, 2), (2, 3), (1, 4)\}$ non è una funzione. Si osservi che f non è iniettiva.

Si consideri invece la funzione $g = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$; si verifica facilmente che la relazione $g^{-1} = \{(2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$ è una funzione. Si osservi che g è iniettiva.

Come mostra il precedente esempio, affinché la relazione f^{-1} sia una funzione, f deve essere iniettiva; tale proprietà assicura infatti che f^{-1} sia una relazione univoca.

Definizione 3.2. Sia f una funzione iniettiva. La funzione

$$f^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in f\}$$

è detta funzione *inversa* di f.

Si osservi che se $f\colon A \to B$ e $b = f(a)$, allora $f^{-1}\colon B \to A$ e $a = f^{-1}(b)$. Inoltre, $\mathrm{Def}(f^{-1}) = \mathrm{Im}(f)$ e $\mathrm{Im}(f^{-1}) = \mathrm{Def}(f)$.

Esempio 3.3. Sia $f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $x \mapsto x + 2$; la funzione inversa è $f^{-1}\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $x \mapsto x - 2$.

Sia consideri la funzione esponenziale $\mathbf{R} \to \mathbf{R}_{>0}$, $x \mapsto e^x$, dove $\mathbf{R}_{>0}$ denota l'insieme dei reali strettamente maggiori di 0; la sua funzione inversa è la funzione logaritmica $\mathbf{R}_{>0} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \ln x$.

Proposizione 3.4. *Sia f una funzione iniettiva.*

(1) *La funzione inversa f^{-1} è iniettiva;*
(2) *La funzione f^{-1} è totale se e solo se f è suriettiva;*
(3) *La funzione f^{-1} è suriettiva se e solo se f è totale;*
(4) *La funzione f^{-1} è biiettiva se e solo se f è biiettiva.*

DIMOSTRAZIONE. 1) Sia $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2) = x$; allora le coppie ordinate (y_1, x), (y_2, x) appartengono a f^{-1}. Quindi le coppie (x, y_1) e (x, y_2) appartengono a f. Per la proprietà di univocità si conclude che $y_1 = y_2$.

2-3) Seguono direttamente dal fatto che $\mathrm{Def}(f^{-1}) = \mathrm{Im}(f)$ e $\mathrm{Im}(f^{-1}) = \mathrm{Def}(f)$.

4) Segue dai punti precedenti. □

ESEMPIO 3.5. Si consideri la funzione $f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $x \mapsto 2x$; f è iniettiva, totale ma non suriettiva. La sua funzione inversa $f^{-1}\colon N \to \mathbf{N}$, $x \mapsto \frac{x}{2}$ è iniettiva, suriettiva ma non totale.

Si consideri la funzione biiettiva $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^3$; la sua inversa $f^{-1}\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$ è ancora biiettiva.

Si osservi inoltre che la funzione inversa della funzione inversa è la funzione di partenza, e componendo una funzione con la sua inversa si ottiene la funzione identica.

PROPOSIZIONE 3.6. *Sia f una funzione iniettiva.*

(1) $(f^{-1})^{-1} = f$;
(2) $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{Def}(f)}$
(3) $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{\mathrm{Im}(f)}$

DIMOSTRAZIONE. 1) $(f^{-1})^{-1} = \{(x, y) \mid (y, x) \in f^{-1}\} = \{(x, y) \mid (x, y) \in f\} = f$.

2) Si consideri la composizione $f^{-1}(f(x))$ per ogni $x \in \mathrm{Def}(f)$. Sia $y = f(x)$; poiché, per la definizione di funzione inversa, $f^{-1}(y) = x$, segue che $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$ per ogni $x \in \mathrm{Def}(f)$. Quindi $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{Def}(f)}$.

3) Sia $y \in \mathrm{Im}(f)$ e si consideri la composizione $f(f^{-1}(y))$; poiché $y = f(x)$ per qualche $x \in \mathrm{Def}(f)$, $f^{-1}(y) = x$ e quindi $f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$. Pertanto $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{\mathrm{Im}(f)}$. □

4. Funzioni n-arie

Le funzioni qui studiate sono dette anche funzioni *a una variabile*, o funzioni 1-*arie* dato che esse esprimono matematicamente la situazione in cui una certa quantità varia in funzione di un'altra. Si può generalizzare tale concetto, introducendo le funzioni a n variabili, per descrivere la situazione in cui una certa quantità varia in funzione di altre n.

DEFINIZIONE 4.1. Una *funzione n-aria*, o funzione *a n variabili*, f è una relazione $n+1$-aria che gode della seguente proprietà: se $(a_1, a_2, \ldots, a_n, b) \in f$ e $(a_1, a_2, \ldots, a_n, b) \in f$, allora $b = c$.

La proprietà che caratterizza le funzione n-arie tra le relazioni $n+1$-arie è l'analogo della proprietà di univocità introdotta per la funzioni 1-arie. Si osservi inoltre che una funzione a n variabili può essere vista come una funzione 1-aria $f\colon A \to B$, dove il dominio A è il prodotto cartesiano di n insiemi, cioè $A = A_1 \times \ldots \times A_n$. In questo modo si possono estendere alle funzioni a n variabili tutti i concetti visti finora.

5. Esercizi

ESERCIZIO 1. Dato l'insieme di coppie ordinate

$$\begin{aligned} g = \{(x, x^2 + 2x) : x \in \mathbf{N}, x^2 - 1 < 10\} \cup \\ \cup \{(x, 4x + 3) : x \in \mathbf{N}, 2 < x < 5\} \cup \\ \cup \{(x, x - 5) : x \in \mathbf{N}, x > 5\} \cup \{(1, 3), (7, 2)\}, \end{aligned}$$

motivare perché g è una funzione da $\mathbf{N}$ in $\mathbf{N}$, precisando se è totale, suriettiva, iniettiva o biiettiva, giustificando le risposte.

Data poi la funzione $f = \{(0, 3), (2, 3), (1, 5)\}$, scrivere quali sono le funzioni $h = f(g)$ e $k = g(f)$. Di esse precisare insieme di definizione e insieme immagine e se sono iniettive.

ESERCIZIO 2. Dato l'insieme di coppie ordinate

$$\begin{aligned} g = \{(x, 5 - x) : x \in \mathbf{N}, x - 1 < 3\} \cup \\ \cup \{(x, x^2 - 2x - 1) : x \in \mathbf{N}, 7 < x^2 - 1 < 27\} \cup \\ \cup \{(x, 2x + 3) : x \in \mathbf{N}, x > 5\} \cup \{(2, 3), (6, 15)\}, \end{aligned}$$

motivare perché g è una funzione da $\mathbf{N}$ in $\mathbf{N}$, precisando se è totale, suriettiva, iniettiva o biiettiva, giustificando le risposte.

Data poi la funzione $f = \{(0, 3), (2, 6), (1, 0)\}$, scrivere quali sono le funzioni $h = f(g)$ e $k = g(f)$. Di esse precisare insieme di definizione e insieme immagine e se sono iniettive.

ESERCIZIO 3. Dato l'insieme di coppie ordinate

$$\begin{aligned} g = \{(x, x - x^2) : x \in \mathbf{N}, 0 < x + 1 < 3\} \cup \\ \cup \{(x, x - 1) : x \in \mathbf{N}, 0 \le x^2 - 1 \le 20\} \cup \\ \cup \{(x, 2x - 7) : x \in \mathbf{N}, x > 5\} \cup \{(5, 4), (3, 2)\}, \end{aligned}$$

motivare perché g è una funzione da $\mathbf{N}$ in $\mathbf{N}$, precisando se è totale, suriettiva, iniettiva o biiettiva, giustificando le risposte.

Data poi la funzione $f = \{(0, 3), (1, 5), (3, 1)\}$, scrivere quali sono le funzioni $h = f(g)$ e $k = g(f)$. Di esse precisare insieme di definizione e insieme immagine e se sono iniettive.

ESERCIZIO 4. Si dica se le seguenti relazioni sono funzioni di $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$:
a) $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R}, x^2 + y^2 = 1\}$ b) $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R}, y = \sin x\}$ c) $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R}, x = \sin y\}$

ESERCIZIO 5. La composizione di funzioni suriettive è suriettiva? Si motivi la risposta. In caso di risposta negativa si esibisca un controesempio.

ESERCIZIO 6. La composizione di funzioni iniettive è iniettiva? Si motivi la risposta. In caso di risposta negativa si esibisca un controesempio.

ESERCIZIO 7. La composizione di funzioni totali è totale? Si motivi la risposta. In caso di risposta negativa si esibisca un controesempio.

Esercizio 8. Sia $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \begin{cases} e^x & x \leq 0 \\ x - x^2 & x \geq 0 \end{cases}$. f è una funzione? E $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \begin{cases} e^x & x \leq 0 \\ x - x^2 + 1 & x \geq 0 \end{cases}$? Nel caso in cui la risposta sia positiva, si dica se f o g sono totali, iniettive o suriettive.

Esercizio 9. Si consideri la funzione $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da $f(x) = x^3 - 4$. Si dimostri che f è biiettiva e si costruisca la funzione inversa f^{-1}.

Esercizio 10. Sia $\lambda \in \mathbf{R}$ e $f(x) = \frac{x^3+\lambda x}{3x+1}$. Esistono valori di λ per cui f definisce una funzione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}_{\geq 0}$? Esistono valori di λ per cui f definisce una funzione da $\mathbf{R}_{\geq 0}$ in $\mathbf{R}_{\geq 0}$? (Si ricordi che $R_{\geq 0}$ indica l'insieme dei reali maggiori o uguali a 0)

Esercizio 11. Dati due insiemi non vuoti X e Y e una funzione $f\colon X \to Y$, definiamo una funzione $f^*\colon P(Y) \to P(X)$ ponendo $f^*(A) = f^{\leftarrow}(A)$ per ogni $A \subseteq Y$. Si verifichi che: 1) Se f è suriettiva, allora f^* è iniettiva. 2) Se f è iniettiva, allora f^* è suriettiva.

Esercizio 12. sia X un insieme non vuoto e si consideri l'insieme delle parti $P(X)$. Sia A un fissato sottoinsieme di X e si consideri la funzione $f\colon P(X) \to P(X)$, $Y \mapsto Y \setminus A$. f è iniettiva? f è suriettiva? Per quali $B \subseteq X$, $f(B) = \emptyset$? Dato $C \subseteq X$, qual è $f^{\leftarrow}(C)$? Si determini $\operatorname{Im}(f)$.

Esercizio 13. Si consideri la funzione $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $x \mapsto \sin x + 2$; f è iniettiva? f è suriettiva? Si determini $\operatorname{Im}(f)$.

Esercizio 14. Qual è il massimo sottoinsieme $A \subseteq \mathbf{R}$ su cui $f(x) = \frac{1}{|\ln x|}$ definisce una funzione totale? Si consideri $f\colon A \to \mathbf{R}$ e si determini $\operatorname{Im}(f)$. Si ripeta l'esercizio con $f(x) = \frac{1}{\ln |x|}$.

Esercizio 15. Si determini il più grande sottoinsieme S di $\mathbf{R}$ per cui $f\colon S \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \frac{|x-2|}{x^2-2x+5}$ definisce una funzione totale con immagine l'intervallo $[0, 1]$.

Esercizio 16. Si considerino le funzioni

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R} \qquad\qquad g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}, \qquad\qquad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Si determini la funzione composta $g \circ f$. Tra le funzioni f, g, $g \circ f$, quali sono iniettive? suriettive? biiettive?

Esercizio 17. Sia $f\colon A \to B$, $C \subseteq A$ e $D \subseteq B$. Si dimostri che $C \subseteq f^{\leftarrow}(f(C))$ e che $f(f^{\leftarrow}(D)) \subseteq D$. Quando si può concludere che $C = f^{\leftarrow}(f(C))$ per ogni $C \subseteq A$? Quando si può concludere che $D = f(f^{\leftarrow}(D))$ per ogni $D \subseteq B$?