GEOMETRIA Prova scritta del 23/2/2010

(Prof. M. Spera)

(1) Nello spazio euclideo reale, in cui sia fissato un riferimento cartesiano, si consideri $\mathscr{C}: \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$

$\underline{a} = (1,0,1)$ $\quad\quad \underline{r}_{\mathscr{C}} = \underline{r}_{\mathscr{C}}(u) = (\cos u, \sin u, 0)$ $\quad u \in [0, 2\pi)$

si consideri la superficie Σ:

$$\underline{r}(u,v) = \underline{r}_{\mathscr{C}}(u) + v\,\underline{a}$$

Mostrare che si tratta di una superficie regolare. Cos'è? Disegnarla. Calcolarne la I^a e la II^a forma fondamentale, nonché la curvatura gaussiana. Il risultato era prevedibile a priori?

(2) Con riferimento all'es. 1, determinare, al variare di u, la curvatura geodetica di $\mathscr{C}$. Calcolare il trasporto parallelo$_{\mathscr{C}}$ del versore tangente di $\mathscr{C}$. [Sugg. osservare, per esempio, che $\alpha_{\mathscr{C}} = \alpha_{\mathscr{C}'}$, dove $\mathscr{C}' = \Sigma \cap \{x-z-2=0\}$; utilizzare il fatto che un cilindro si può vedere come "limite" di un cono di vertice tendente all'infinito..]

(3) Si consideri lo spazio topologico $X = \{F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6\}$ (es.. facce di un dado) $\quad \mathscr{T} = \{\phi, X, \{F_1\}, \{F_2\}, \{F_1, F_2\}\}$

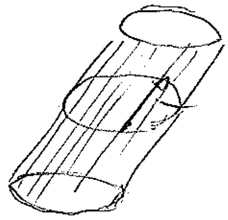
Verificare che effettivamente $\mathscr{T}$ è una topologia. È di Hausdorff? Definita poi la relazione di equivalenza $\sim$ $\quad F_i \sim F_j \iff i,j$ entrambi pari o i,j entrambi dispari. Descrivere la topologia quoziente $\mathscr{T}_\sim$. È di Hausdorff?

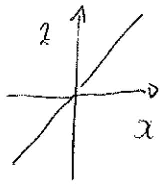
Tempo a disposizione: 2h. Le risposte vanno adeguatamente giustificate.

Geometria
23/2/10

(1) $\underline{a} = (1, 0, 1) \quad \mathscr{C}: \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$

$\underline{r}_{\mathscr{C}}(u) = (\cos u, \sin u, 0)$





Σ: cilindro obliquo

$$\Sigma : \underline{r}(u,v) = \underline{r}_{\mathscr{C}}(u) + v\,\underline{a}$$

$$\underline{r}(u,v) = (\cos u, \sin u, 0) + v(1,0,1) =$$
$$= (\cos u + v, \sin u, v)$$

$\underline{r}_u = (-\sin u, \cos u, 0)$

$\underline{r}_v = (1, 0, 1)$

$\underline{r}_{uu} = (-\cos u, -\sin u, 0)$

$\underline{r}_{uv} = (0, 0, 0)$
$\parallel$
$\underline{r}_{vu}$

$\underline{r}_{vv} = (0, 0, 0)$

I^a

$E = \|\underline{r}_u\|^2 = 1$

$F = \langle \underline{r}_u, \underline{r}_v \rangle = -\sin u$

$G = \|\underline{r}_v\|^2 = 2$

$EG - F^2 = 2 - \sin^2 u > 0$

$$\underline{r}_u \times \underline{r}_v = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -\sin u & \cos u & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \underline{i}\cos u - \underline{j}(-\sin u) + \underline{k}(-\cos u)$$

$$= \underline{i}\cos u + \underline{j}\sin u - \underline{k}\cos u$$

$$\| \quad \|^2 = \cos^2 u + \sin^2 u + \cos^2 u = 1 + \cos^2 u$$

$$\| \underline{r}_u \times \underline{r}_v \| = \sqrt{1+\cos^2 u}$$

$$\underline{N} = \frac{\underline{r}_u \times \underline{r}_v}{\| \underline{r}_u \times \underline{r}_v \|} = \frac{\cos u}{\sqrt{\ }} \, \underline{i} + \frac{\sin u}{\sqrt{\ }} \, j - \frac{\cos u}{\sqrt{\ }} \, \underline{k}$$

$$e = \langle \underline{N}, \underline{r}_{uu} \rangle = \frac{-\cos^2 u - \sin^2 u}{\sqrt{\ }} = -\frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 u}}$$

$$f = \langle \underline{N}, \underline{r}_{uv} \rangle = 0$$

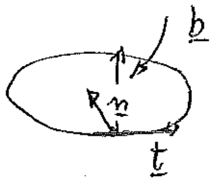
$$g = \langle \underline{N}, \underline{r}_{vv} \rangle = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} &e = -\frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 u}} \qquad \mathrm{II} \\ &f = 0 \\ &g = 0 \end{aligned}}$$

$$\boxed{K = 0}$$

come era da aspettarsi
(è una rigata sviluppabile)

(2)



$\mathscr{C}$ non è una geodetica:

in generale $\underline{N}$ non è $\perp$ $\underline{b}$ $\qquad$ $\underline{b} = (0, 0, 1)$

$$\underline{N} = \left(\frac{\cos u}{\sqrt{\ }}, \frac{\sin u}{\sqrt{\ }}, -\frac{\cos u}{\sqrt{\ }} \right)$$

$$\underline{b} = (\ 0 \quad 0 \quad 1 \ )$$

$$\langle \underline{N}, \underline{b} \rangle = -\frac{\cos u}{\sqrt{1+\cos^2 u}} \qquad \left(= 0 \iff \cos u = 0, \ u = \pm \frac{\pi}{2} \right)$$

$$k_g = -k \frac{\cos u}{\sqrt{1+\cos^2 u}} = -\frac{\cos u}{\sqrt{1+\cos^2 u}}$$

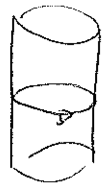
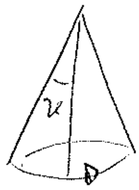
$(k = 1)$

per periodicità $\int_{\mathscr{C}} k_g = 0$

$\Rightarrow \alpha_C = 2\pi k$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$

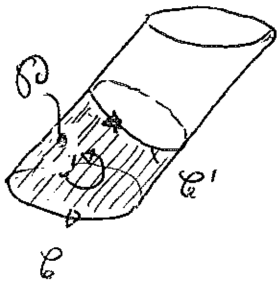
e di fatto $k = 1$
come per i cilindri circolari retti

Trasporto parallelo:

 $= \lim_{r \to 0}$ 

per un cilindro circolare retto

$$2\pi(1-\sin r) \xrightarrow[r \to 0]{} 2\pi \quad \Rightarrow \text{ questo risultato è generale.}$$



$\alpha_{\mathcal{C}} = \alpha_{\mathcal{C}'}$ in virtù della f. di Levi Civita

$$\alpha_{\mathcal{C}} - \alpha_{\mathcal{C}'} = \iint_S K \, d\sigma = 0$$

$\alpha_{\mathcal{C}'} = 2\pi$ (v. sopra)

↑ ellisse

③ Geometria 23/12/10

$X = \{F_1, F_2, \dots F_6\}$

$\tau = \{\phi, X, \{F_1, F_2\}, \{F_1\}, \{F_2\}\}$

τ è una topologia non è di Hausdorff.
 ex F_3 e F_4 non si possono separare con due aperti.

$\sim$: $F_i \sim F_j \iff i$ e j pari o i e j dispari.

$X/_\sim = \{[F_1], [F_2]\}$

topologia quoziente: aperti: controimmagini aperte.

$\pi^{-1}[F_1] = \{F_1, F_3, F_5\} \notin \tau$

$\pi^{-1}[F_2] = \{F_2, F_4, F_6\} \notin \tau$

$\pi^{-1}(\phi) = \phi \in \tau$

$\pi^{-1}(X/\sim) = X \in \tau$

in definitiva, la top $\tau_\sim$ è quella banale (che non è di Hausdorff).