ELEMENTI DI TEORIA DELLE CONICHE

1. Introduzione

Questi appunti delle Lezioni di una parte del modulo di *Elementi di Geometria* per il corso di *Algebra Lineare con Elementi di Geometria*[1] sono basati sulle note [Spera–1, Spera–2] del prof. Spera che ha tenuto il corso dal 2006 al 2012.

In questo capitolo ci occuperemo dello studio delle sezioni coniche reali. Lavoreremo in gran parte nel piano proiettivo reale, che però, penseremo complessificato; ciò ci permetterà di interpretare più agevolmente particolari situazioni geometriche e darà maggior senso all'operazione di omogeneizzazione che altrimenti rimarrebbe un trucco matematico privo di significato. In alcune circostanze tratteremo anche coniche direttamente in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, tuttavia per iniziare è opportuno procedere in astratto.

2. Definizioni e costruzioni iniziali

Definizione. *Sia V un $\mathbb{K}$–spazio vettoriale di dimensione 3 e $\mathbb{P}(V)$ il corrispondente spazio proiettivo (di dimensione 2). Sia A una matrice simmetrica di dimensione 3, allora chiamiamo* **conica** *associata ad A l'insieme*

$$\mathcal{C} = \{\langle\vec{v}\rangle \in \mathbb{P}(V) \mid \vec{v} \neq \vec{0},\ \vec{v}^T A\vec{v} = 0\}.$$

A parole si può affermare che $\vec{v}$ deve essere isotropo per A o meglio che una conica consiste nelle generatrici del cono isotropo associato ad A. Lavorando in coordinate emerge che una conica è quindi il luogo dei punti (contati con le opportune molteplicità) $X = [x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2$ tali che

$$X^T AX = 0 \tag{1}$$

con $X = [x_0, x_1, x_2] \neq [0, 0, 0]$ e A matrice simmetrica 3×3. Esplicitamente la (1) si scrive

$$\sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j = 0$$

cioè, sviluppando i calcoli

$$P(x_0, x_1, x_2) = a_{00}x_0^2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0.$$

Una conica è individuata da un polinomio omogeneo di secondo grado in x_0, x_1x_2.

N.B. Si osservi che il viceversa non è vero, infatti una conica $\mathcal{C}$ non individua un unico polinomio omogeneo di secondo grado in x_0, x_1, x_2, ma una classe di polinomi (omogenei di secondo grado) proporzionali. Precisamente due polinomi si dicono equivalenti se sono proporzionali e tale relazione è una relazione di equivalenza. Di conseguenza una conica è **identificata** da una classe di equivalenza di polinomi (omogenei di secondo grado) equivalenti.

Commento.
- *Tale idea si generalizza a polinomi omogenei di grado qualsiasi in $\mathbb{P}^2$, dando così origine alla teoria delle curve algebriche. Più in generale l'idea si generalizza a polinomi (omogenei) di grado n in spazi proiettivi di dimensione qualsiasi, dando origine alla teoria delle varietà algebriche.*
- *Abbiamo detto in precedenza che l'insieme dei punti X di $\mathbb{P}^2$ tali che $X^TAX = 0$ rappresenta il cosiddetto cono isotropo associato ad A. Questo fatto permette di recuperare l'idea classica (euclidea–apolloniana) che tutti i tipi di conica si ottengono mediante opportune sezioni di un cono a due falde. Rimandiamo ad altra sede per un approfondimento su questo tema.*

Date: 23 gennaio 2014.

[1]Corso di Studi in Matematica Applicata, Università degli Studi di Verona, A.A. 2012/2013.

Nel seguito e nelle applicazioni diremo indifferentemente che un polinomio $P(x_0, x_1, x_2)$ o un'equazione del tipo $a_{00}x_0^2+2a_{01}x_0x_1+2a_{02}x_0x_2+a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2 = 0$ definiscono una conica, spesso non sottolineando che il polinomio o l'equazione sono omogenei di secondo grado. Ciò è dovuto al fatto che passando a coordinate affini il polinomio (o l'equazione) associato alla conica non sono più omogenei, pur restando necessariamente di secondo grado.

Definizione. *Due coniche $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ si dicono (proiettivamente)* **equivalenti**, *$\mathcal{C}_1 \overset{P}{\sim} \mathcal{C}_2$ se le rispettive matrici associate sono congruenti, ossia se esiste un cambiamento di coordinate che trasforma A_1 in A_2,* [2] *a meno di una costante di proporzionalità.*

N.B. Notiamo come la nozione di conica sia invariante per trasformazioni proiettive, ossia per trasformazioni biettive dello spazio proiettivo in sè che conservano la struttura proiettiva. Accettiamo che esse sono rappresentate da matrici di $\mathrm{GL}_3(\mathbb{K})$. Posto infatti $X = MY$, con $M \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{K})$ si ha

$$X^TAX = (MY)^TA(MY) = Y^T \underbrace{M^TAM}_{:=B} Y = Y^TBY$$

sicché A è rimpiazzata dalla matrice ancora simmetrica Y^TAY (**perché?**) ed essendo la conica determinata dai vettori isotropi, si ha che A e B danno luogo alla stessa conica.

3. Classificazione proiettiva delle coniche: approccio algebrico

3.1. **Caso complesso.** Una conica $\mathcal{C}$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ è individuata da

$$X^TAX = 0$$

con $X \neq [0, 0, 0]^T$ e A matrice simmetrica (a coefficienti reali). Se diagonalizziamo la matrice A la conica $\mathcal{C}$ si riscrive come

$$\Xi^T D\,\Xi = 0$$

con $\Xi \neq [0, 0, 0]^T$ e D matrice diagonale ottenuta da A tramite una trasformazione di coordinate $A = P^TDP$, con $P \in GL_3(\mathbb{C})$ matrice del cambiamento di coordinate. Da cui l'equazione della conica assume una forma semplice:

$$\alpha_0\xi_0^2 + \alpha_1\xi_1^2 + \alpha_2\xi_2^2 = 0.$$

Si ricordi che il rango è invariante per similitudine. Ciò permette di classificare le coniche nel seguente modo:

non degenere	**degenere**	**degenere**
$\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 1$	$\alpha_0 = 0$ e $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$	$\alpha_0 = \alpha_1 = 0$ e $\alpha_2 = 1$
rank $D = 3$	rank $D = 2$	rank $D = 1$
$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 = 0$	$\xi_1^2 + \xi_2^2 = 0$	$\xi_2^2 = 0$
conica irriducibile complessa	**conica riducibile complessa**	**conica riducibile complessa**
	spezzata in due rette complesse	spezzata in due rette coincidenti

N.B. Dunque dal punto di vista proiettivo, nel caso complesso vi è, *a meno di equivalenza proiettiva*, **un unico tipo di conica irriducibile**.

[2] Accettiamo il fatto che un cambiamento di coordinate ortogonali manda una matrice simmetrica in un'altra matrice simmetrica.

3.2. **Caso reale.**

non degenere		**semplicemente degenere**		**doppiamente degenere**
rank $A = 3$		rank $A = 2$		rank $A = 1$
$\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 1$	$\alpha_0 = -1$ e $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$	$\alpha_0 = 0$ e $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$	$\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = -1$	$\alpha_0 = \alpha_2 = 0$ e $\alpha_2 = 1$
$\xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 = 0$	$-\xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 = 0$	$\xi_1^2 + \xi_2^2 = 0$	$\xi_1^2 - \xi_2^2 = 0$	$\xi_2^2 = 0$
	$\mathbf{sgn}(D) = (2, 1)$ **oppure** $(1, 2)$			
conica priva di punti reali	**conica irriducibile reale**	**un punto**	**coppia di rette incidenti**	**coppia di rette coincidenti**

N.B. Dunque dal punto di vista proiettivo, nel caso reale vi è, *a meno di equivalenza proiettiva*, **un unico tipo di conica irriducibile a punti reali**. Essa corrisponde ad una segnatura di tipo (2,1) o (1,2).

4. Sulle coniche degeneri

Da quanto visto nella sezione precedente se la matrice A associata alla conica $\mathcal{C}$ ha determinante nullo, cioè se $\mathfrak{a} := \det A = 0$, allora la conica è degenere: spezzata in due rette (che possono essere incidenti[3] o coincidenti). Determiniamo esplicitamente le due rette: consideriamo il polinomio di secondo grado non omogeneo associato a $\mathcal{C}$, passiamo cioè a coordinate affini e poi leggiamo tale polinomio come un polinomio di secondo grado in x a coefficienti funzioni di y:

$$P(x) = a_{00} + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2.$$

Il fatto che $\mathfrak{a} = 0$ assicura che il discriminante di $P(x)$ sia un quadrato e quindi il polinomio si fattorizza: Perché?

$$P(x) = \underbrace{(\alpha' x + \beta' y + \gamma')}_{r'} \underbrace{(\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'')}_{r''}.$$

In simboli $\mathcal{C}: \ r' \, r'' = 0$ e i singoli fattori danno le componenti di $\mathcal{C}$.

Esempio 1. *Verificare che la conica definita dal polinomio* $P(x_0, x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 + x_1x_0 + x_0x_2$ *è degenere e determinare le rette che la compongono.*

Sol. In primo luogo passiamo a coordinate non omogenee, l'equazione di $\mathcal{C}$ allora diventa

(2) $$x^2 - y^2 + x + y = 0$$

e la matrice $A_{\mathcal{C}}$ associata a $\mathcal{C}$ è

$$A_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Osserviamo che $\mathfrak{a} = 0$.

$$\det A_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Quindi la conica è degenere. Determiniamo ora le rette in cui si spezza. L'equazione di $\mathcal{C}$ assume la forma

$$(x - y)(x + y) + x + y = 0$$
$$(x + y)(x - y + 1) = 0$$

La conica $\mathcal{C}$ si spezza nel prodotto delle due rette $r: \ x + y = 0$ e $r': \ x - y + 1 = 0$.

[3] Si ricordi che nel piano proiettivo due rette sono sempre incidenti, quindi non si distingue il caso in cui le due rette possono essere parallele e non coincidenti.

Verifichiamo ora che il discriminante della (2), letta come equazione in x a coefficienti funzioni di y è un quadrato. Infatti

$$\Delta = 1 - (y - y^2) = 1 - 4y + 2y^2 = (2y - 1)^2.$$

5. Tangente ad una conica proiettiva

Sviluppiamo un approccio diretto, cioè senza ricorrere all'analisi. Sia $\mathcal{C}:\ X^TAX = 0$ una conica irriducibile (cioè rank $A = 3$). Sia $P_0 = [X_0]$ un punto della conica[4], allora $X_0^TAX_0 = 0$. Sia ora r una generica retta passante per P_0, r avrà equazioni parametriche $X = X_0 + \lambda\vec{\ell}$, con $\vec{\ell} = [0, \ell_1, \ell_2]^T \neq [0, 0, 0,]^T$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. In generale r incontrerà la conica in P_0 e in un altro punto $P_1 = [X_1]$.[5] **La retta r è tangente la conica $\mathcal{C}$ in P_0 se P_1 coincide con P_0, cioè se $\lambda = 0$ è radice doppia dell'equazione**

$$0 = (X_0 + \lambda\vec{\ell})^T A(X_0 + \lambda\vec{\ell}) = \underbrace{X_0^TAX_0}_{=0} + \lambda(\vec{\ell}^{\,T}AX_0 + X_0A\vec{\ell}) + \lambda^2\,\vec{\ell}^{\,T}A\vec{\ell} = 2\lambda X_0^TA\vec{\ell} + \lambda^2\vec{\ell}^{\,T}A\vec{\ell}$$

Osserviamo che $\vec{\ell}^{\,T}A\vec{\ell} \neq 0$, infatti se non lo fosse la retta r sarebbe interamente contenuta in $\mathcal{C}$, ovvero r costituirebbe una delle due rette, eventualmente coincidenti, in cui si spezza la conica. Di conseguenza $\lambda = 0$ è radice doppia se e solo se $X_0^TA\vec{\ell} = 0$ e quindi

$$X_0^TA(X - X_0) = 0^6$$

ovvero

$$\mathbf{X_0^TAX = 0} \qquad \textbf{equazione della retta tangente a } \mathcal{C} \textbf{ in } P_0.$$

6. Polarità definita da una conica irriducibile

Consideriamo ancora l'equazione

$$X_0^TAX = X^TAX_0^T = 0$$

ma con $P_0 = [X_0]$ arbitrario in $\mathbb{P}^2$. **Essa rappresenta l'equazione di una retta p_0 detta POLARE di P_0 rispetto a $\mathcal{C}$. Si noti che, dal punto di vista vettoriale stiamo determinando $\langle X_0\rangle^{\perp_A}$. È chiaro che $P_0 \in p_0$ se e solo se p_0 è tangente a $\mathcal{C}$ in P_0.**

Enunciamo ora il seguente **risultato molto importante**.

Teorema 1 (Principio di reciprocità). *Siano $P_0, P_1 \in \mathbb{P}^2$ e siano p_0 e p_1 le rispettive polari rispetto ad una stessa conica irriducibile $\mathcal{C}$. Allora*

$$P_0 \in p_1 \iff P_1 \in p_0.$$

Dimostrazione. Discende immediatamente dalla simmetria di A, infatti

$$0 = X_0^TAX_1 = X_1^TAX_0.$$

□

Il principio di reciprocità ha la seguente importante conseguenza

Teorema 2. *Sia $\mathcal{C}$ una conica irriducibile in $\mathbb{P}^2$ e P un punto in $\mathbb{P}^2$. Detti $P_1, P_2 \in \mathcal{C}$ i punti di contatto delle tangenti condotte da $P \in \mathbb{P}^2$,[7] la retta $p = P_1P_2$ è la polare di P, inoltre se $P \in \mathcal{C}$ allora p è tangente a $\mathcal{C}$ in P.*

Dimostrazione. Si osservi che $P \in \tau_1$ e $P \in \tau_2$, quindi per il principio di reciprocità $P_1 \in p$ e $P_2 \in p$. Essendo $P_1 \neq P_2$ si ha che $p = P_1P_2$. (Si veda Figura 1).

□

Osservazione.
- Se P è interno a $\mathcal{C}$ (caso reale), la polare p si può determinare tracciando due rette distinte r_1 e r_2 per P e conducendo dai rispettivi punti di intersezione con la conica le tangenti a $\mathcal{C}$. Queste si incontreranno in due punti distinti che, congiunti, determineranno la polare p cercata. Inoltre si noti che r_1 è la polare di P_1 e r_2 di P_2. (Si veda Figura 2).

[4] Si ricordi che allora $X_0 = [x_0^0, x_1^0, x_2^0] \neq [0, 0, 0,]$.

[5] Come noto, ponendo a sistema l'equazione della conica con quella della retta si ottiene un'equazione di secondo grado in λ, che per $\lambda = 0$ ha una radice, quella corrispondente al punto P_0.

[6] Si usa il fatto che $\lambda\vec{\ell} = X - X_0$

[7] Nel caso reale se le due rette risultano complesse coniugate, si dice che il punto P è interno alla conica.

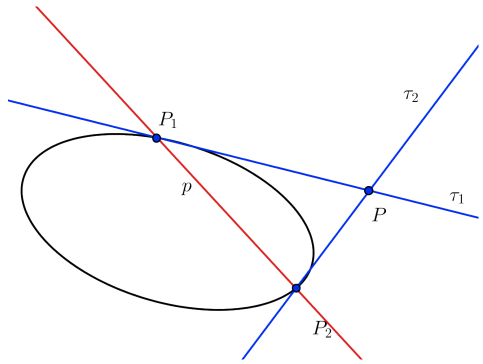


FIGURA 1.

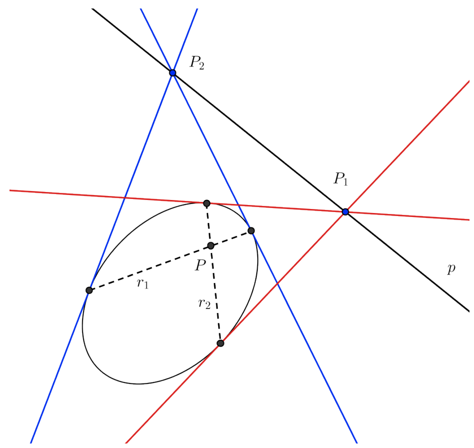


FIGURA 2. Costruzione della polare se il punto P è interno a $\mathcal{C}$

Determinazione delle tangenti ad una conica condotte da P generico. Per determinare le tangenti ad una conica (irriducibile) $\mathcal{C}$ condotte da un punto (esterno) $P \in \mathbb{P}^2$ si può procedere in tre modi diversi. Il terzo e più elegante di questi modi è rinviato alla fine della sezione sui fasci di coniche (si veda 7.2).

Metodo 1. Si scrive l'equazione del fascio di rette di centro P e si impone che i punti di intersezione di tali rette con $\mathcal{C}$ coincidano.[8]

Metodo 2. Si può determinare la polare p del punto P e quindi i punti P_1 e P_2 di intersezione di tale retta con la conica $\mathcal{C}$. Le due tangenti saranno allora le retta $\tau_1 : P_1P = 0$ e la retta $\tau_2 : P_2P = 0$, passanti rispettivamente per P_1 e P e per P_2 e P.

Metodo 3. Si rinvia alla fine della Sezione 7.2

7. Fasci di coniche in $\mathbb{P}^2$

Si considerino in $\mathbb{P}^2$ due coniche distinte $\mathcal{C}'$ e $\mathcal{C}''$

$$X^T A' X = 0$$

$$X^T A'' X = 0$$

con $A' = (a'_{ij})$ e $A'' = (a''_{ij})$ matrice associate alle coniche. Per ogni coppia di numeri reali $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ definiamo la conica

$$\mathcal{F}_{\mathcal{C}} : \lambda X^T A' X + \mu X^T A'' X = 0 \tag{3}$$

[8] È il metodo noto dalle scuole superiori: si sostituisce l'equazione del fascio in quella della conica e imponendo l'annullarsi del discriminante dell'equazione ottenuta si ricava un'equazione di secondo grado nel parametro del fascio.

(in simboli $\mathcal{C} = \lambda\,\mathcal{C}' + \mu\,\mathcal{C}''$) che descrive il fascio di coniche generato da $\mathcal{C}'$ e $\mathcal{C}''$.

Commento. *Riguardando la (3) come retta proiettiva le coniche del fascio vengono identificate con i punti di una retta proiettiva determinata da due punti distinti appartenenti ad essa ($\mathcal{C}'$ e $\mathcal{C}''$). Si veda Figura 3.*

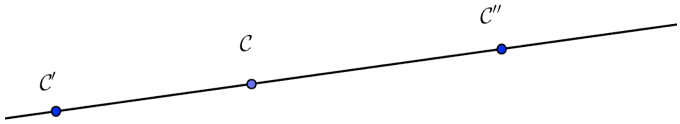


FIGURA 3. Fascio di coniche interpretato come retta proiettiva.

Le coniche degeneri si ottengono (dopo aver posto ad esempio $k = \frac{\mu}{\lambda}$, se $\lambda \neq 0$) risolvendo l'equazione, generalmente di terzo grado

$$\det(A' + kA'') = 0. \tag{4}$$

Se la (4) è identicamente soddisfatta, le coniche sono tutte *degeneri.*

Nel caso generico invece si hanno 3 coniche degeneri (nel caso l'equazione (4) sia a coefficienti reali si ha almeno una conica reale) e quindi[9] **4 punti base** attraverso i quali passano tutte le coniche.

Osservazione. Osserviamo che l'equazione di una conica (vedi la (1)) dipende da cinque parametri indipendenti, sicché cinque punti in posizione "generale" individuano una e una sola conica.

Il metodo dei fasci di coniche permette di trattare rapidamente ed elegantemente il problema di individuare una conica a partire da diverse condizioni note. *In genere è sconsigliabile sostituire le coordinate dei punti direttamente nell'equazione, perché spesso inefficace, soprattutto nel caso di condizione di tangenza, e comunque molto lungo e poco elegante.* Esaminiamo ora i vai casi che si possono presentare. Come al solito lavoreremo nel piano proiettivo complesso o nel piano reale complessificato.

Fascio per 4 punti distinti. Consideriamo 4 punti distinti A, B, C, D a tre a tre non allineati. Il fascio di coniche passante per quattro punti a tre a tre non allineati ammette tre coniche degeneri reali (si veda Figura 4) e può essere generato, ad esempio, usando due di tali coniche

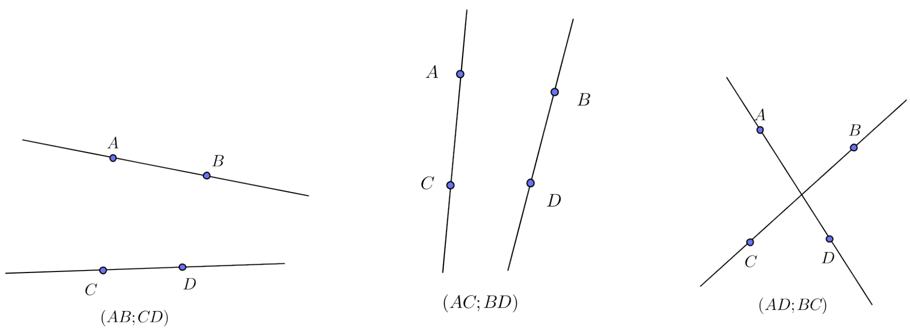


FIGURA 4. Coniche degeneri del fascio di coniche passanti per quattro punti a tre a tre non allineati.

$$\mathcal{F}: \; \lambda\mathcal{C}_1 + \mu\mathcal{C}_2 = 0, \qquad (\lambda, \mu) \neq (0, 0)$$

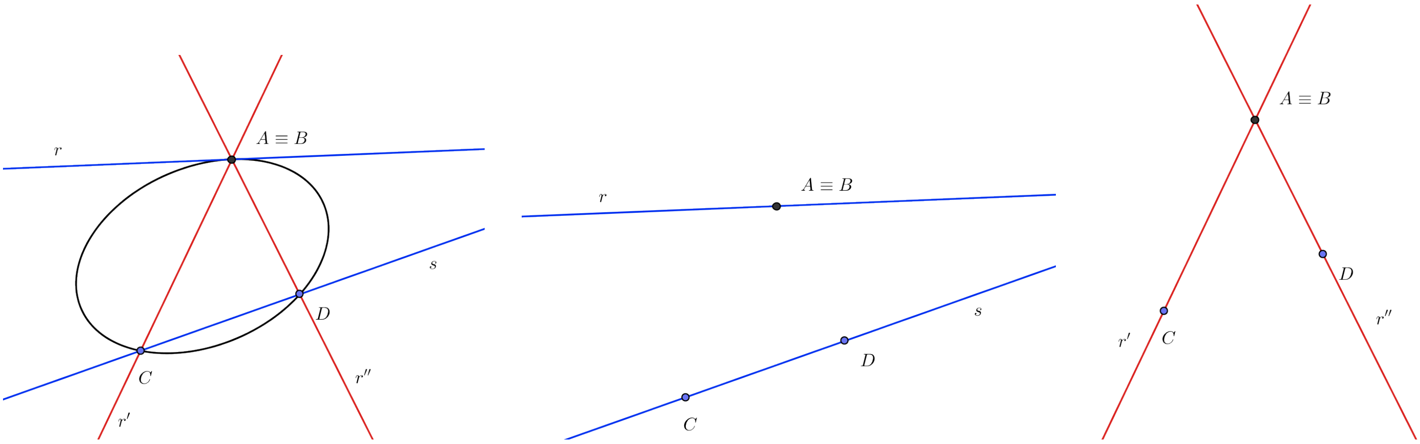


FIGURA 5. Coniche degeneri del fascio di coniche passanti per tre punti e tangenti ad una retta data.

Fascio per 3 punti e una condizione di tangenza. Consideriamo ora il fascio di coniche passanti per tre punti distinti $A \equiv B, C, D$ non allineati e tangenti ad una retta r nel punto A. Tale fascio può essere semplicemente generato dalle rette degeneri (si veda Figura 5) che in questo caso sono la coppia di rette $r' :\ AC$ e $r'' :\ AD$ e la coppia di rette r e $s :\ CD$. Simbolicamente si ha

$$\boldsymbol{\mathcal{F} :\ \lambda rs + \mu r'r'' = 0}$$

Fascio di coniche bitangenti. Consideriamo ora il fascio di coniche passante per due punti distinti $A \equiv B$ e $C \equiv D$ e in tali punti tangenti a due rette date r e r'. Anche in tale caso il fascio può essere facilmente descritto dalle rette degeneri (si veda Figura 6) che sono le rette r e r' stesse e la retta $s :\ AB$ passante per A

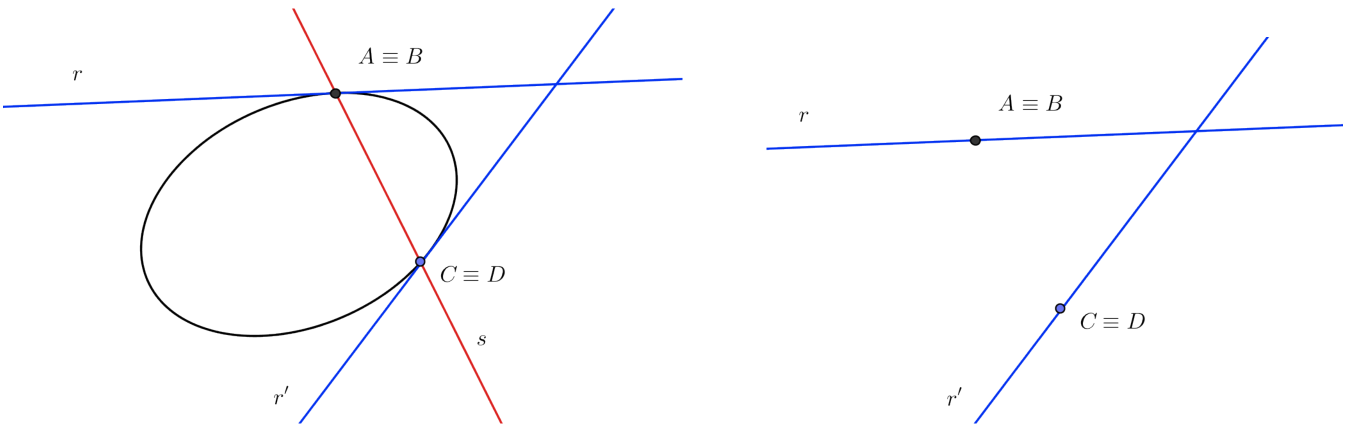


FIGURA 6. Coniche degeneri del fascio di coniche bitangenti.

e B contata però due volte. Simbolicamente

$$\boldsymbol{\mathcal{F} :\ \lambda rr' + \mu s^2 = 0}$$

7.1. **Fasci di coniche osculanti e iper–osculanti.** Lo studio di tali fasci di coniche necessita una dettagliata specificazione del processo di limite che porta i "4 punti originari" del primo caso trattato a coincidere. In questa sezione metteremo in evidenza i due casi restanti, ma non approfondiremo la tematica.

---

[9] Si ricordi che consideriamo il piano proiettivo reale complessificato o il piano proiettivo complesso.

- **Fascio di coniche osculantisi in un punto e passanti per un altro** In questo caso il fascio è formato dalle coniche passanti per due punti distinti $A \equiv B \equiv C$ e D e tangenti in A ad una retta data. Nel punto A si deve avere un contatto triplo.
- **Fascio di coniche iperosculantisi in un punto** In questo caso il fascio è formato dalle coniche passanti per $A \equiv B \equiv C \equiv D$ e tangenti in A ad una retta data. Nel punto A si deve avere un contatto quadruplo.

7.2. **Metodo 3 per la determinazione delle tangenti ad una conica irriducibile da $P \notin \mathcal{C}$.** Il terzo metodo per la determinazione delle tangenti condotte da un punto esterno ad una conica $\mathcal{C}$ sfrutta l'idea del fascio di coniche bitangenti.

Consideriamo le coniche degeneri $\mathcal{C}_1 : \ \tau_1\tau_2 = 0$ e $\mathcal{C}_2 : \ p^2 = 0$, in cui τ_1 e τ_2 sono le due tangenti che cerchiamo e $p : \ P_1P_2 = 0$ è la polare del punto P da cui vanno condotte le tangenti. È chiaro che *le coniche $\mathcal{C}, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ appartengono allo stesso fascio di coniche bitangenti* (si veda Figura 7). Pertanto $\mathcal{C}_1 = k\,\mathcal{C}_2 + \mathcal{C}$, con k parametro affine. Analiticamente

$$0 = \underbrace{\tau_1\tau_2}_{\mathcal{C}_1} = k\,\underbrace{(X_P^TAX)^2}_{\mathcal{C}_2} + \underbrace{X^TAX}_{\mathcal{C}}.$$

Ponendo $X = X_P$ e osservando che $X_P^TAX_P \neq 0$ per ipotesi, è $k\,(X_P^TAX_P)^2 + X_P^TAX_P = 0$, da cui

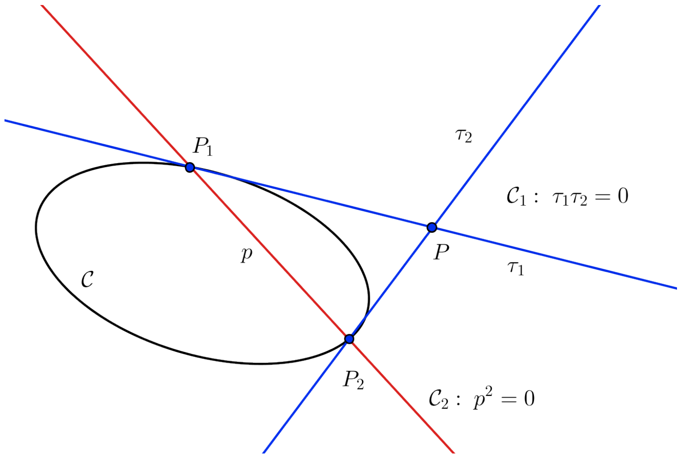


FIGURA 7. Uso del fascio di coniche bitangenti per la determinazione delle tangenti condotte da un punto P non appartenente alla conica $\mathcal{C}$.

$$k = -(X_P^TAX_P)^{-1}$$

e pertanto

$$0 = \tau_1\tau_2 = \underbrace{(X^TAX)}_{\mathcal{C}}(X_P^TAX_P) - \underbrace{(X_P^TAX)^2}_{p}$$

Il complesso delle rette tangenti cercate è quindi formato da

$$\mathbf{(X^TAX)(X_P^TAX_P) - (X_P^TAX)^2 = 0} \tag{5}$$

Si osservi che se $P \in \mathcal{C}$ si riottiene l'equazione della tangente contata due volte.

Consideriamo ora il seguente esempio che, sebbene elementare, permette di illustrare i vari metodi per la determinazione delle tangenti ad una data conica (irriducibile) condotte da un punto esterno alla conica stessa.

Esempio 2. *Sia $\mathcal{C} : = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ una conica e $P : \ [1, 0, 2]$ un punto di $\mathbb{P}^2$. Determiniamo in tre modi differenti le equazioni delle tangenti a $\mathcal{C}$ condotte da P.*[10]

[10]Osserviamo che facendo uso di considerazione metriche il problema sarebbe triviale, ma in questo contesto prescindiamo dagli aspetti metrici.

Sol. La matrice $A_{\mathcal{C}}$ associata alla conica $\mathcal{C}$ è $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, quindi essendo $\mathfrak{a} \neq 0$, la conica $\mathcal{C}$ è irriducibile.

Metodo 1. Passiamo a coordinate affini, l'equazione della conica diviene

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

e scriviamo il fascio $\mathcal{R}$ di rette di centro di centro $P : [1, 0, 2]$:

$$\mathcal{R} : \; y - 2 = mx, \quad m \in \mathbb{R}.$$

Intersechiamo ora il fascio $\mathcal{R}$ con la conica

$$(m^2 + 1)x^2 + 4mx + 3 = 0$$

e imponiamo la condizione di tangenza, $\Delta_m = 0$

$$4m^2 - 3(m^2 + 1) = 0$$

cioè $m = \sqrt{3}$ oppure $m = -\sqrt{3}$. Da cui le tangenti cercate

$$\tau_1 : \; y = 2 + \sqrt{3}\,x, \quad \tau_2 : \; y = 2 - \sqrt{3}\,x$$

Metodo 2. Determiniamo la polare p del punto P:

$$\begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 0$$

cioè

$$\begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 0$$

e quindi

$$p : \; x_0 + 2x_2 = 0, \quad \text{o in coordinate affini} \quad y = \frac{1}{2}.$$

I punti di intersezione di p con la conica si ottengono risolvendo il sistema tra l'equazione di $\mathcal{C}$ e quella di p:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

e sono $P_1 : \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e $P_2 : \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Le tangenti sono quindi le rette P_1P e P_2P, che sono le due rette τ_1 e τ_2 determinate sopra.

Metodo 3. Applichiamo la relazione (5).

$$\left(\begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right) - \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right)^2 = 0$$

$$(-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2)\,(-1 + 4) - (-x_0 + 2x_2)^2 = 0$$

$$3(x^2 + y^2 - 1) - (2y - 1)^2 = 0 \quad \text{passando a coordinate affini}$$

$$3x^2 - (y - 2)^2 = 0$$

cioè

$$\tau_1 : \; y = 2 + \sqrt{3}\,x, \quad \tau_2 : \; y = 2 - \sqrt{3}\,x.$$

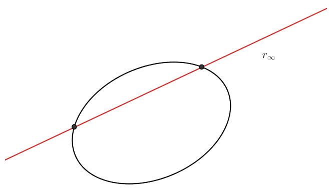
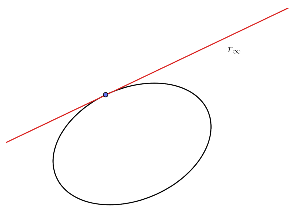
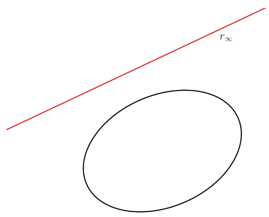
8. Classificazione affine delle coniche

Abbiamo visto che dal punto di vista proiettivo vi è un'unica conica irriducibile nel caso complesso e un'unica conica a punti nel caso nel caso reale, definita dalla segnatura della matrice associata ala conica. Vediamo ora cosa accade dal punto di vista affine.

Sia $\mathcal{C}$ una conica generale in $\mathbb{P}^2$; selezioniamo una retta r_∞ e **dichiariamola** impropria, considerando un opportuno sistema di riferimento affine. Determiniamo poi le intersezioni della conica $\mathcal{C}$ con la retta r_∞:

$$\mathcal{C} \cap r_\infty : \begin{cases} X^T A X = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \tag{6}$$

Si hanno quindi tre possibili soluzioni corrispondenti a tre possibili tipi di conica irriducibile:

2 soluzioni reali distinte	**2 soluzioni reali coincidenti**	**2 soluzioni complesse coniugate**
intersezione in due punti reali distinti	intersezione in un punto contato due volte	non intersezioni reali
iperbole	**parabola**	**ellisse**
		

Ora indaghiamo analiticamente quanto appena emerso, cercando condizioni analitiche che permettano di distinguere in maniera agevole i vari casi. Risolviamo il sistema (6) sostituendo la seconda equazione nella prima, ottenendo

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}}_{A_{00}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \tag{7}$$

con A_{00} minore di a_{00}. Otteniamo cioè, un'altra matrice simmetrica A_{00}, di cui (7) rappresenta il cono isotropo. Essendo nel caso $x_0 = 0$, non si può avere il caso in cui sia x_1 che x_2 siano nulli. Supponiamo allora che $x_1 \neq 0$, ponendo $m = \frac{x_2}{x_1}$, da (7) diviene

$$a_{22}m^2 + 2a_{12}m + a_{11} = 0. \tag{8}$$

Poniamo $\mathfrak{a}_{00} := \det A_{00}$ (complemento algebrico di a_{00}) e osserviamo che

$$\mathfrak{a}_{00} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = -\Delta \text{ dell'equazione (8)}$$

da cui

se $\mathfrak{a}_{00} < 0$	se $\mathfrak{a}_{00} = 0$	se $\mathfrak{a}_{00} > 0$
2 soluzioni reali distinte	**2 soluzioni reali coincidenti**	**2 soluzioni complesse coniugate**
intersezione in due punti reali distinti	intersezione in un punto contato due volte	non intersezioni reali
iperbole	**parabola**	**ellisse**

Proprietà affini delle coniche.

Definizione. *Sia $\mathcal{C}$ una conica generale. Si dice* **centro** *C di $\mathcal{C}$ il polo della retta impropria r_∞.*

È immediato che se il centro C di una conica è improprio allora la conica è una parabola. Perché?

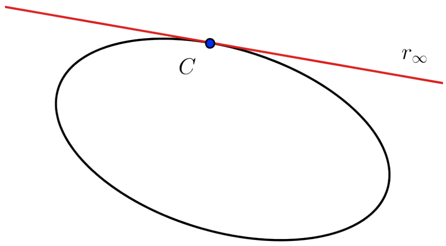


FIGURA 8.

Si dice così che la *parabola* non ha centro proprio, mentre l'*ellisse* e l'*iperbole* vengono dette **coniche a centro**.[11]

Definizione. *Si dice* **diametro** *di una conica $\mathcal{C}$ una retta per il centro.*

Dalla definizione di diametro è chiaro che

i diametri sono le polari dei punti impropri. Perché?

che i diametri di una parabola sono tutti paralleleli. Perché?

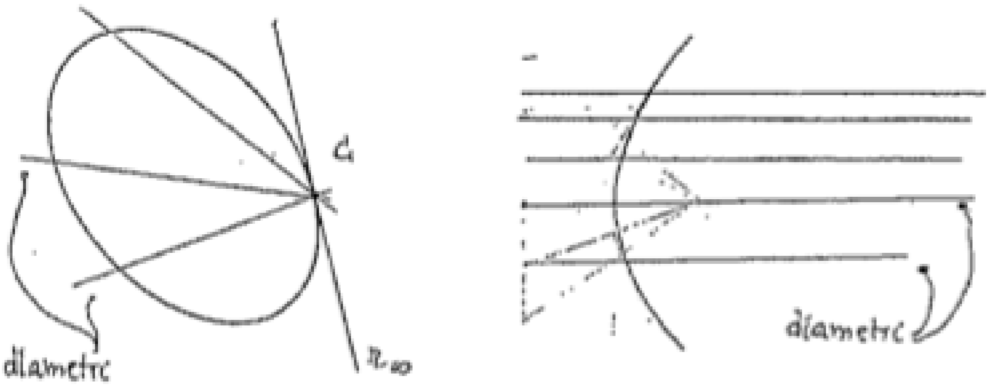


FIGURA 9.

Definizione. *Sia $\mathcal{C}$ una conica generale. Le tangenti a $\mathcal{C}$ condotte dal centro C della conica $\mathcal{C}$ sono dette* **asintoti** *della conica.*

Si osservi che i punti di tangenza degli asintoti con la conica, siano essi reali o complessi coniugati, si trovano necessariamente sulla retta impropria. Dunque nel caso dell'ellisse gli asintoti sono complessi coniugati, nel caso dell'iperbole sono reali e distinti e nel caso della parabola consistono della retta impropria contata due volte. Perché?

[11] Vedremo poi che il centro è effettivamente centro di simmetria.

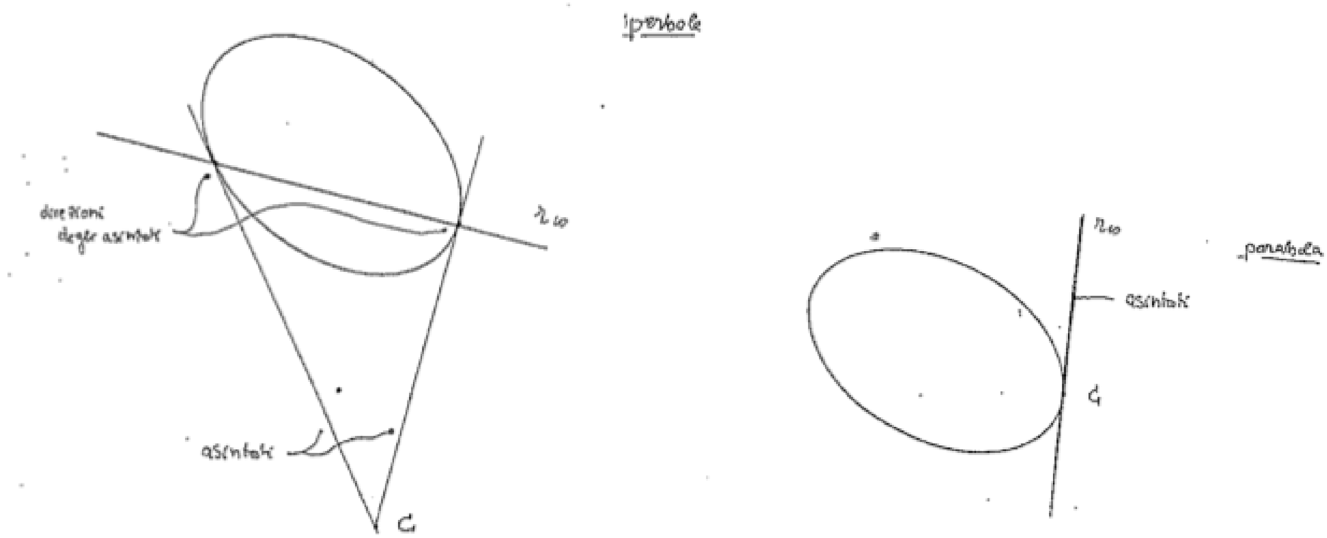


FIGURA 10.

Definizione. *Due diametri d_1 e d_2 di una conica a centro $\mathcal{C}$ si dicono* **coniugati** *se, detti D_1 e D_2 i loro poli,*[12] *si ha che $D_1 \in d_2$ (e quindi $D_2 \in d_1$).*

La precedente definizione afferma che due diametri si dicono coniugati se il polo dell'uno è la direzione dell'altro.

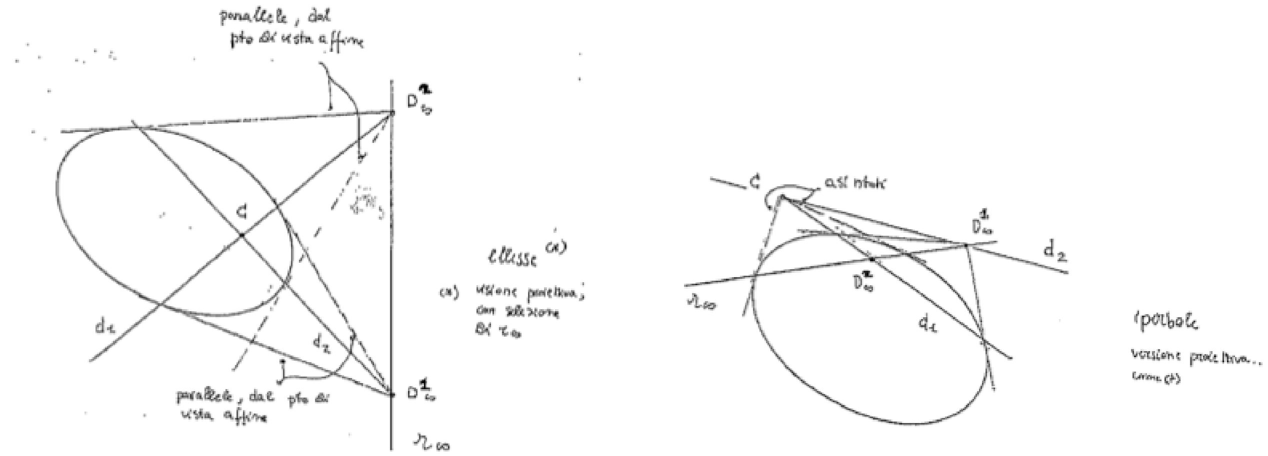


FIGURA 11.

Dal punto di vista affine, per una conica a centro $\mathcal{C}$, dato un diametro d, il diametro coniugato d' ha la direzione delle tangenti (tra loro parallele) nei punti d'intersezione di d con la conica.

Nel caso della parabola non si parla di diametri coniugati, ma di rette coniugate ai diametri, essendo questi tutti tra loro paralleli. Le rette coniugate ai diametri di una parabola sono le tangenti nei punti d'intersezione al finito dei diametri con la parabola.

Esaminiamo ora da un punto di vista analitico le costruzione introdotte in questa sezione.

[12] Si ricordi che sono punti della retta impropria.

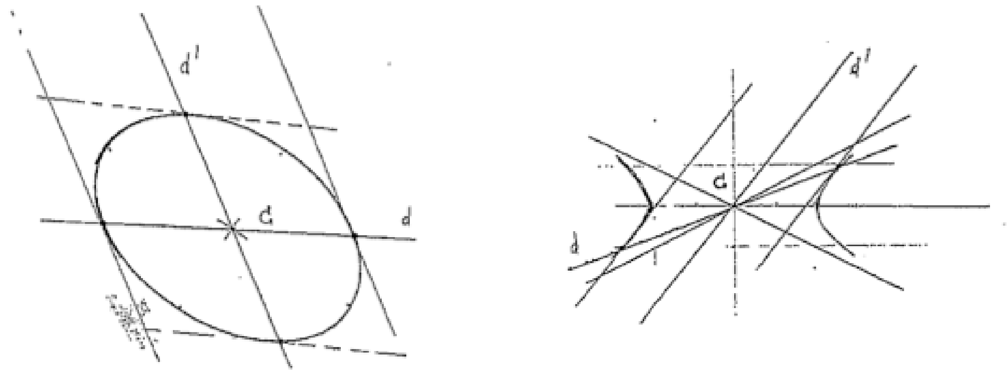


FIGURA 12.

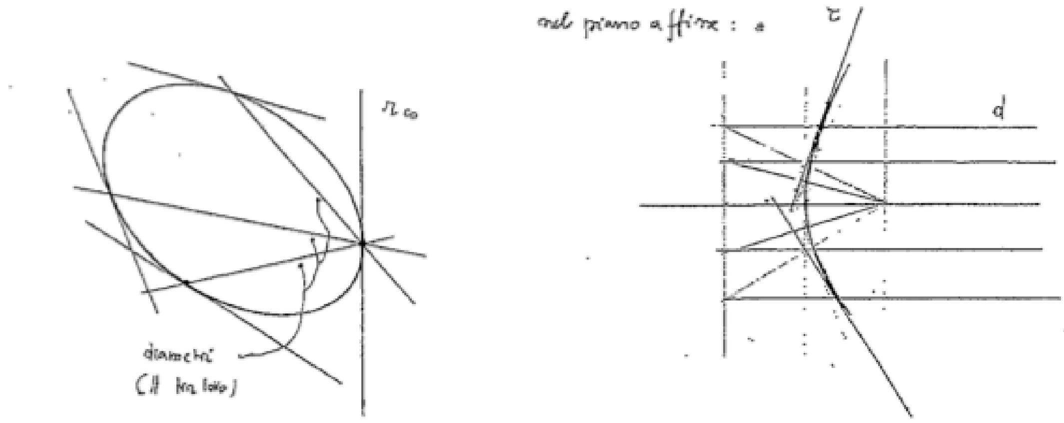


FIGURA 13.

Centro di una conica irriducibile. La retta impropria r_∞ ha equazione $x_0 = 0$. Se determiniamo le polari di due suoi punti distinti e ne consideriamo poi l'intersezione, questa sarà precisamente il centro della conica. perché?

Ad esempio se consideriamo come punti impropri i punti all'infinito dell'asse x, $P_1^\infty : [0, 1, 0]$ e dell'asse y, $P_2^\infty : [0, 0, 1]$,[13] allora la polare di P_1^∞ è

$$0 = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{01} \\ a_{11} \\ a_{12} \end{bmatrix} = a_{01}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$

e con un calcolo analogo quella di P_2^∞ è $a_{02}x_0 + a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = 0$. Il centro, dato dall'intersezione delle due polari appena trovate:

$$\begin{cases} a_{01}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{02}x_0 + a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = 0 \end{cases} \tag{9}$$

è improprio quando

$$\mathfrak{a}_{00} = 0$$

[13]Si noti che essi forniscono, rispettivamente, le direzione degli assi x e y.

cioè quando la conica $\mathcal{C}$ è una parabola, [14] mentre è proprio se diversamente. Se $\mathfrak{a}_{00} \neq 0$, risolvendo il sistema (9) si ottengono le coordinate (affini) del centro:

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_1 = \dfrac{\mathfrak{a}_{01}}{\mathfrak{a}_{00}} \\ x_2 = \dfrac{\mathfrak{a}_{02}}{\mathfrak{a}_{00}} \end{cases}$$

Infatti passando a coordinate affini in (9)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = -a_{01} \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = -a_{02} \end{cases}$$

e usando il Teorema di Cramer, si ottiene

$$x = \frac{\det \begin{bmatrix} -a_{01} & a_{12} \\ -a_{02} & a_{22} \end{bmatrix}}{\mathfrak{a}_{00}} = \frac{\mathfrak{a}_{01}}{\mathfrak{a}_{00}}, \quad y = \frac{\det \begin{bmatrix} a_{11} & -a_{01} \\ a_{12} & -a_{02} \end{bmatrix}}{\mathfrak{a}_{00}} = \frac{\mathfrak{a}_{02}}{\mathfrak{a}_{00}}$$

9. Diametro coniugato ad un diametro dato e asintoti reali

Esempio 3. *Data la conica $\mathcal{I}$ irriducibile $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$, si determinino il diametro coniugato d' al diametro $d: \ y - 2x = 0$ e gli asintoti reali di $\mathcal{C}$.*

Sol. Equazione omogenea della conica: $x_1^2 - 2x_2^2 - 4x_0^2 = 0$. Matrice associata alla conica $A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

Verifichiamo che il centro C della conica è $[1,0,0]^T$:

$$x_C = \frac{\det \begin{bmatrix} -a_{01} & a_{12} \\ -a_{02} & a_{22} \end{bmatrix}}{\det A_{00}} = \frac{\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}}{2} = 0$$

$$y_C = \frac{\det \begin{bmatrix} a_{11} & -a_{01} \\ a_{12} & -a_{02} \end{bmatrix}}{\det A_{00}} = \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}{2} = 0$$

Per determinare il diametro coniugato d' usiamo la definizione di diametro coniugato, da cui emerge che il punto all'infinito P'_∞ di d (ossia la direzione di d) fornisce il polo di d'. Le equazioni parametriche di d sono

$$\begin{cases} x = \lambda \\ \\ y = 2\lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

da cui $P'_\infty : \ [0,1,2]$, quindi

$$d' : \ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \longrightarrow d' : \ x_1 - 4x_2 = 0.$$

Per determinare gli asintoti dobbiamo calcolare i punti all'infinito dell'iperbole. Essi sono punti del tipo $[0, \ell, m]$ e devono soddisfare

$$\begin{bmatrix} 0 & \ell & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \ell \\ m \end{bmatrix} = \ell^2 - 2m^2 = 0$$

quindi gli asintoti sono le rette per C e di direzioni i punti impropri P^1_∞ e P^2_∞, rispettivamente. Quindi

$$a_1 : \ x_1 - \sqrt{2}\, x_2 = 0, \quad x_1 + \sqrt{2}\, x_2 = 0.$$

[14] Come già sapevamo.

Diametro coniugato ad un diametro dato. Sia $\mathcal{C}$ una conica a centro e d un suo diametro. Sia $D_\infty : [0, \ell, m]$ (con $(\ell, m) \neq (0,0)$) il punto improprio di d. Il diametro coniugato d' di d è la polare di D_∞. Ponendo $D'_\infty : [0, \ell', m']$, (con $(\ell', m') \neq (0,0)$) si trova subito

$$\begin{bmatrix} \ell' & m' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell \\ m \end{bmatrix} = 0$$

cioè

$$\begin{bmatrix} \ell' & m' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}\ell + a_{12}m \\ a_{12}\ell + a_{22}m \end{bmatrix} = 0$$

e quindi

$$a_{11}\ell\ell' + a_{12}(\ell' m + \ell m') + a_{22}mm' = 0 \tag{10}$$

Il diametro cercato d' passa per il centro e la sua direzione si ottiene dalla (10). Nelle applicazioni, si può anche evitare di ricordare la (10) e scrivere subito la polare di D_∞.

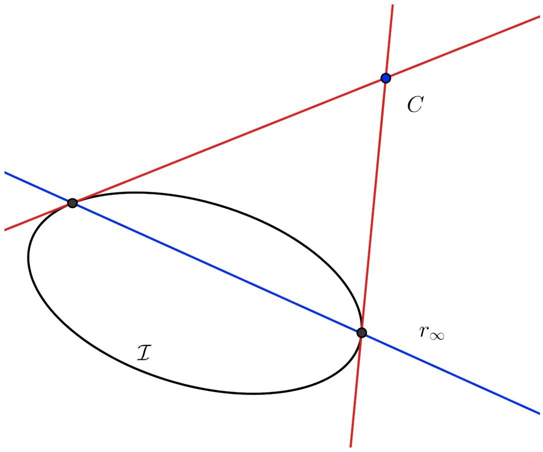


FIGURA 14.

Asintoti reali. Determiniamo le equazioni degli asintoti nel caso dell'iperbole. Per far ciò è sufficiente determinare le tangenti all'iperbole $\mathcal{I}$ nei punti all'infinito. Tali punti $[0, \ell, m]$ (con $(\ell, m) \neq (0,0)$) risolvono

$$\begin{bmatrix} \ell & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell \\ m \end{bmatrix} = 0$$

cioè

$$a_{11}\ell^2 + 2a_{12}\ell m + a_{22}m^2 = 0. \tag{11}$$

Se il centro è noto, gli asintoti sono le rette passanti per questo con direzione data dalla (11). La (11) lavorando con un parametro affine $\kappa = \frac{m}{\ell}$, se $\ell \neq 0$, diviene un'equazione di secondo grado in κ.

10. Equazione canonica metrica delle coniche

In queste note non affronteremo, per ragioni di tempo, lo studio della forma canonica affine delle coniche, che permetterebbe di avere una visione più esaustiva dello studio delle proprietà affini delle coniche. Affrontare tale argomento richiedebbe infatti lo studio e la classificazione delle forme bilineari simmetriche e lo studio della teoria di Sylvester, che per ovvie ragioni di tempo non possiamo affrontare in questo corso.

Ora introdurremo alcune proprietà metriche e otterremo le equazioni delle coniche note dalla scuole superiore. Vedremo, ad esempio, che solamente il concetto di lunghezza permette di distinguere la circonferenza dall'ellisse e i diversi tipi di ellissi e iperboli tra loro.

Coniche a centro. Il punto di partenza è un generico riferimento cartesiano piano $\{O, x, y\}$. Il nostro obiettivo è la determinazione di un sistema di riferimento cartesiano $\{C, \xi, \eta\}$, in cui l'origine è il centro C e gli assi hanno la direzione dei diametri coniugati. Questo fatto permette di diagonalizzare ortogonalmente la matrice A_{00}. In questo contesto si parla di *assi* della conica, che risultano essenzialmente univocamente determinati. (Si veda il N.B. seguente per un chiarimento sul termine "essenzialmente")

N.B. *Le direzioni degli assi saranno date dagli autospazi E_{λ_1} e E_{λ_2}, corrispondenti agli autovalori λ_1 e λ_2 di A_{00}. Nel caso i due autolavori coincidano, gli assi non sono più univocamente determinati. Questo caso però corrisponde al caso della circonferenza a punti reali o immaginari.*

Per determinare la direzione degli assi si può anche imporre la condizione di ortogonalità nell'equazione dei diametri coniugati. Posto, infatti, ad esempio, $(\ell', m') = (-m, \ell)$ si arriva a

$$a_{12}\ell^2 + (a_{22} - a_{11})\ell m - a_{12}m^2 = 0 \tag{12}$$

Si noti che se si pone $\ell = 1$[15] si osserva facilmente che il discriminante della (12) è non negativo

$$\Delta = (a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}^2 \geq 0.$$

Esistono perciò due soluzioni reali indipendenti che forniscono le direzioni degli assi (rette per il centro e le cui direzioni sono date dalla (12)) e quindi si giunge alle **equazioni canoniche**

$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1$		$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = -1$	$\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} = 1$
$a \geq b > 0$			$a, b > 0$
ellisse con a e b semiassi maggiore e minore, rispettivamente		**ellisse a punti immaginari**	**iperbole**
se $a = b > 0$	se a=b $= 0$		
circonferenza di centro C e raggio $a > 0$	si ha un punto		

N.B. *Si osservi che nel caso dell'iperbole gli assi bisecano gli asintoti, la cui equazione nel riferimento $\{C, \xi, \eta\}$ è*

$$\eta = \pm\frac{b}{a}\xi$$

Ciò è vero nell'equazione canonica e dunque rimane vero in ogni riferimento cartesiano, in quanto tale nozione è metrica.

Coniche non a centro. Per la parabola si procede similmente a quanto fatto per l'ellisse e l'iperbole, ottenendo

$$\eta^2 = 2p\,\xi$$

in cui $p > 0$ è il parametro della parabola. L'asse è l'unico diametro della parabola tale che la tangente ad essa nel punto d'intersezione V, detto *vertice*, sia ortogonale a questo. Determiniamo analiticamente l'equazione dell'asse. Si parte dall'equazione dei diametri:

$$a_{11}x + a_{12}y + \kappa = 0 \tag{13}$$

in cui $(a_{11}, a_{12}) \neq (0, 0)$. Sia $P_\infty := [0, a_{11}, a_{12}]$ la direzione ortogonale ai diametri. La polare di P_∞ (nella forma (13) con un κ opportuno) è l'asse cercato. Osserviamo che la direzione dell'asse[16] corrisponde all'autospazio E_0 corrispondente all'autovalore nullo di A_{00}.

[15] Ciò equivale a dividere tutto per ℓ, supponendo che $\ell \neq 0$. D'altro canto o ℓ o m sono necessariamente non nulli.

[16] E ovviamente dei diametri

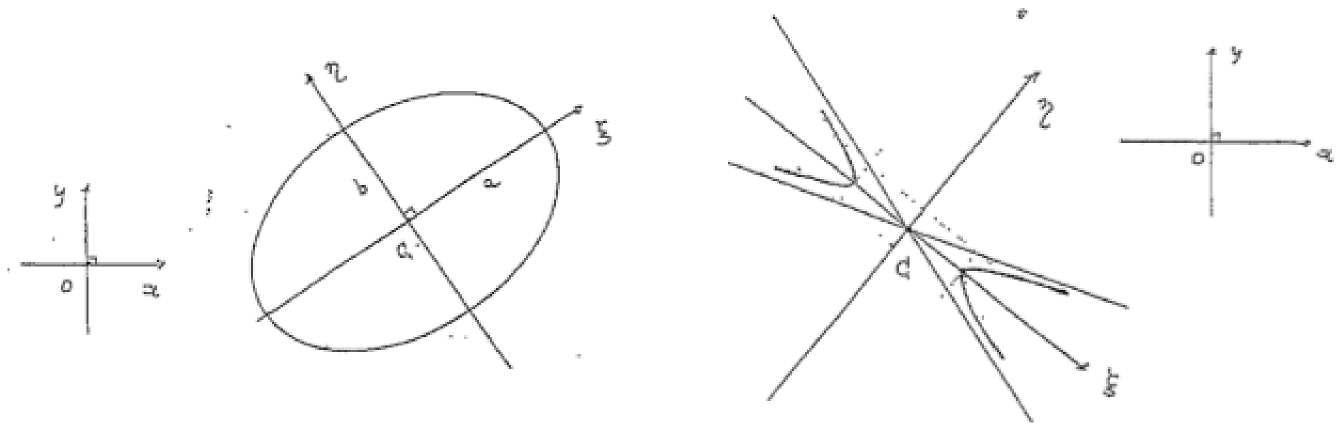


FIGURA 15.

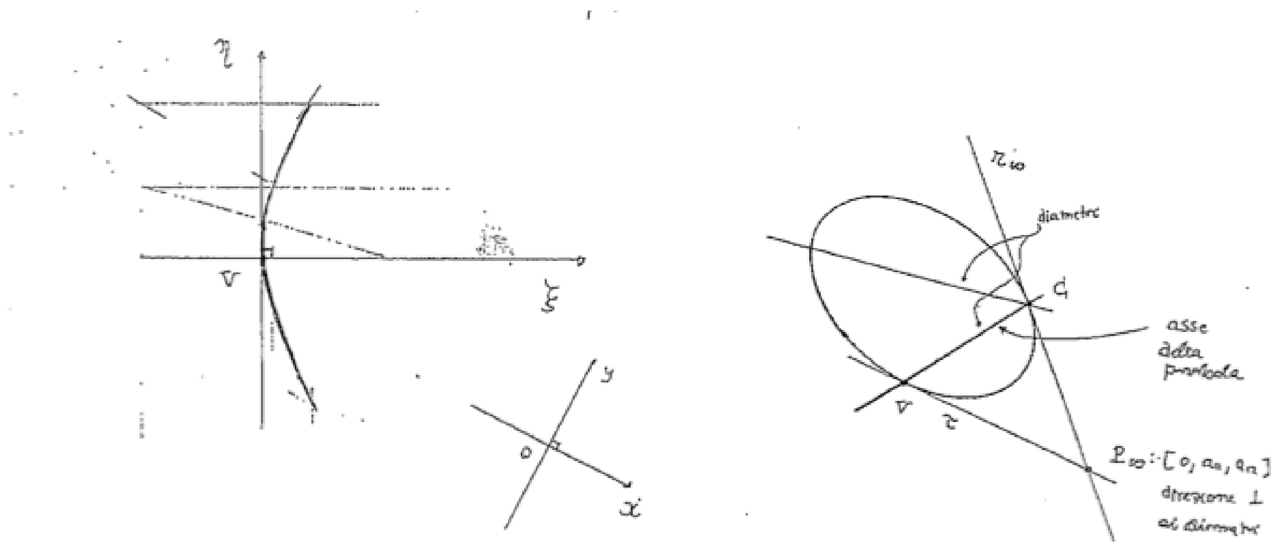


FIGURA 16.

11. Elementi del metodo degli invarianti ortogonali

Il **metodo degli invarianti** permette di determinare i semiassi a, b o il parametro p senza effettuare alcun cambiamento di riferimento cartesiano, prescindendo, cioè, dall'effettiva posizione della conica nel piano cartesiano.

Consideriamo il polinomio caratteristico del minore A_{00}:

$$P_{A_{00}}(\lambda) = \det \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - \underbrace{(a_{11}+a_{22})}_{\mathfrak{y}}\lambda + \underbrace{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}_{\mathfrak{a}}$$

in cui $\mathfrak{a}_{00} = \det A_{00} = \lambda_1\lambda_2$, $\mathfrak{y} = \mathrm{Tr}(\mathrm{A}_{00}) = \lambda_1 + \lambda_2$ e λ_1 e λ_2 radici (necessariamente reali) di $P_{A_{00}}$. Perché?

N.B. $P_{A_{00}}$ è invariante per trasformazioni di $O(2)$ e dunque tali sono anche $\mathfrak{a}_{00}$ e $\mathfrak{y}$, dai cui l'appellativo di invarianti ortogonali.

Coniche a centro. Già sappiamo che possiamo ricondurci ad un'equazione della forma

$$\rho\,\frac{x^2}{\alpha} + \rho\,\frac{y^2}{\beta} - \rho = 0 \tag{14}$$

in cui $\rho \neq 0$, $\alpha = \pm a^2 \neq 0$ e $\beta = \pm b^2 \neq 0$. Calcoliamo $\mathfrak{y}$ e $\mathfrak{a}_{00}$ in base a (14). La matrice associata alla conica nel riferimento degli assi è

$$A = \begin{bmatrix} -\rho & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho}{\beta} \end{bmatrix}$$

e il minore A_{00} è

$$A_{00} = \begin{bmatrix} \frac{\rho}{\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{\rho}{\beta} \end{bmatrix}$$

Allora

$$\begin{cases} \mathfrak{y} = \rho \left(\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} \right) \\ \\ \mathfrak{a}_{00} = \dfrac{\rho^2}{\alpha\beta} \end{cases}$$

Inoltre

$$\mathfrak{a} = \det A = -\frac{\rho^3}{\alpha\beta} \neq 0.$$

Siamo quindi in grado di esprimere ρ in termini di $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{a}_{00}$

$$\boldsymbol{\rho = -\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}_{00}}}.$$

A questo punto è evidente che $\frac{1}{\alpha}$ e $\frac{1}{\beta}$ sono le radici del'equazione di secondo grado

$$\boldsymbol{t^2 + \frac{\mathfrak{a}_{00}\mathfrak{y}}{\mathfrak{a}}\, t + \frac{\mathfrak{a}_{00}^3}{\mathfrak{a}^2} = 0} \tag{15}$$

Controlliamo la (15) per l'ellisse. Nel caso dell'ellisse l'equazione nella forma canonica metrica è $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. Allora $\mathfrak{a} = -\frac{1}{a^2 b^2}$, $\mathfrak{a}_{00} = \frac{1}{a^2 b^2} > 0$ (come deve essere). Inoltre $\mathfrak{y} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$. Determiniamo quindi i coefficienti della (15): $\frac{\mathfrak{a}_{00}\mathfrak{y}}{\mathfrak{a}} = -\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)$ e $\frac{\mathfrak{a}_{00}^3}{\mathfrak{a}^2} = \left(\frac{\mathfrak{a}_{00}}{\mathfrak{a}}\right)^2 \mathfrak{a}_{00} = \frac{1}{a^2 b^2}$. Quindi la (15) diviene

$$t^2 - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) t + \frac{1}{a^2 b^2} = 0$$

le cui soluzioni sono appunto

$$t_1 = \frac{1}{a^2} = \frac{1}{\alpha}, \quad \text{e} \quad t_2 = \frac{1}{b^2} = \frac{1}{\beta}.$$

Per l'iperbole $\frac{1}{\alpha} > 0$ e $\frac{1}{\beta} < 0$, per fissare le idee la radice positiva è denotata con $\frac{1}{\alpha}$ e quella negativa con $\frac{1}{\beta}$, cioè $\alpha = a^2$ e $\beta = -b^2$. Si noti, però, che non è necessario che $a \geq b$. L'asse ξ nell'equazione canonica corrisponde all'*asse focale* ed è precisamente quello che interseca l'iperbole in due punti reali.

Coniche non a centro. Nel caso della parabola $\mathfrak{a} \neq 0$ e $\mathfrak{a}_{00} = 0$. Da cui l'equazione canonica della parabola è della forma

$$\rho\, y^2 - 2\rho\, px = 0.$$

La matrice associata alla parabola è

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\rho p & 0 \\ -\rho p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho \end{bmatrix}$$

e quindi $\mathfrak{y} = \rho$ e $\mathfrak{a} = -\rho^3 p^2$, da cui

$$\boldsymbol{p = \sqrt{-\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{y}^3}}}$$

Significato geometrico di alcune condizioni.

condizione	tipo di conica	nella geometria
$\mathfrak{a} = 0$	$\mathcal{C}$ è degenere	proiettiva affine metrica
$\mathfrak{a} \neq 0$ e $\mathfrak{a}_{00} = 0$	$\mathcal{C}$ è una parabola	affine metrica
$\mathfrak{a} \neq 0$, $\mathfrak{a}_{00} \neq 0$ $\mathfrak{y} = 0$	$\mathcal{C}$ iperbole equilatera	metrica

Osservazione. Nel caso dell'iperbole equilatera si ha necessariamente $\mathfrak{a}_{00} < 0$. Inoltre l'equazione canonica è $\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{a^2} = 1$, cioè $\xi^2 + \eta^2 = a^2$. In tal caso gli asintoti hanno equazioni $\xi = \pm\eta$ e sono quindi tra loro ortogonali. Si ha quindi l'equazione dell'iperbole riferita agli asintoti Perché?

$$\xi\,\eta = 1 \qquad \textbf{equazione canonica affine}$$

$$\xi\,\eta = \kappa \neq 0 \qquad \textbf{equazione canonica metrica}$$

12. Ulteriori aspetti metrici

Rette isotrope e punti ciclici.

Definizione. *Nel piano si fissi un sistema di riferimento cartesiano $\{O, x, y\}$. Diciamo* **rette isotrope** *uscenti dal punto $P_0 : [1, x_P, y_P]$ le rette di equazione*

$$(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2 = 0. \tag{16}$$

Nel piano reale complessificato o nel piano complesso le rette isotrope hanno direzione $C_\infty^{\pm}; [0, 1, \pm i]$. Le direzioni delle rette isotrope sono dette **punti ciclici**.

Esercizio 1. Verificare che le rette isotrope (16) sono effettivamente rette e che hanno direzione C_∞^{pm}.

Sol. Sviluppiamo la (16), ottenendo

$$x^+ x_P^2 - 2xx_P + y^2 + y_P^2 - 2yy_P = 0.$$

La matrice associata a tale conica è

$$\begin{bmatrix} x_P^2 + y_P^2 & x_P & y_P \\ x_P & 1 & 0 \\ y_P & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e $\det A = 0$, quindi la conica di matrice A è riducibile. Calcoliamo il discriminante pensando il polinomio della conica come come ad un polinomio in x a coefficienti funzioni di y: $\Delta_y = -(y - y_P)^2$, da cui $x_{1,2} = -x_P \pm i(y - y_P)$ da cui le rette isotrope uscenti da P hanno equazioni affini $x - x_P - y + y_P = 0$ e $x - x_P + y - y_P = 0$ e quindi direzioni $[0, 1, \pm i]$.

Tra le ellissi le circonferenze sono caratterizzate dal fatto che $a_{11} = a_{22}$ e $a_{12} = a_{21} = 0$[17] e hanno equazione canonica metrica

$$x^2 + y^2 = a^2, \qquad \text{con } a > 0.$$

Omogeneizzando l'equazione canonica metrica della circonferenza e intersecando con la retta impropria $x_0 = 0$ si ottiene

$$x_1^2 + x_2^2 = 0$$

[17] Da un punto di vista metrico ciò significa che gli autovalori del minore A_{00} sono uguali e positivi.

cioè la retta impropria interseca una circonferenza nei punti ciclici. Dunque *tutte le circonferenze passano per i punti ciclici, che pertanto "assorbono" sempre due delle quattro intersezioni di due circonferenze.*[18]

Fuochi e direttrici. Dalla teoria elementare delle coniche ci aspettiamo che le nozioni di *fuoco* e di *direttrice* siano nozioni *metriche*. Introduciamole ora in ambito proiettivo.

Definizione.
- *Si dice* **fuoco** *di una conica irriducibile $\mathcal{C}$ un punto $F \in \mathbb{P}^2$ tale che le tangenti a $\mathcal{C}$ emananti da esso siano isotrope.*
- *Si dice* **direttrice** *la polare di un fuoco.*

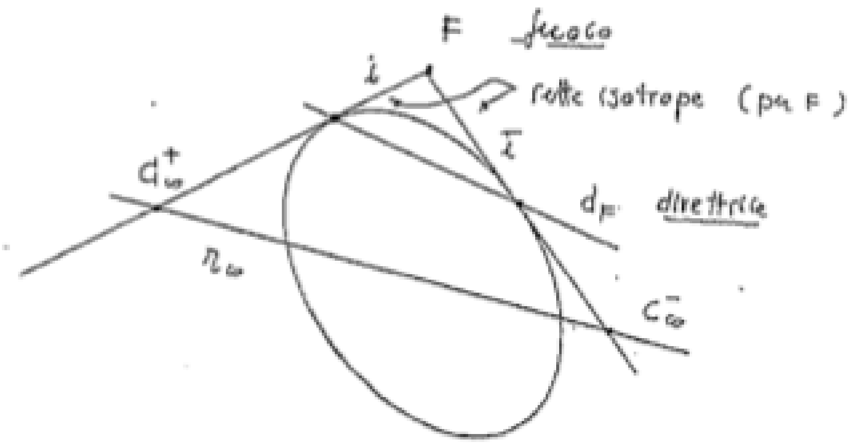


FIGURA 17.

I fuochi di una conica in $\mathbb{P}^2$ sono quattro: l'ellisse e l'iperbole hanno due fuochi reali e la parabola uno al finito.

Problema 1. *Quali sono il fuoco e la direttrice nel caso della circonferenza?*

Ricaviamo ora la proprietà caratteristica *che il rapporto tra la distanza di un punto P dal fuoco e dello stesso punto dalla direttrice è costante*

$$\frac{PF}{d(P,\delta)} = e$$

Le varie coniche appartengono al fascio $\mathcal{F}$ di coniche bitangenti alle due rette i_1 e i_2 emanantisi dal fuoco F nei punti in cui esse intersecano la direttrice δ. Il fascio $\mathcal{F}$ è generato dalla direttrice δ contata due volte e dalla coppia di rette $i_1 i_2$ e ha equazione

$$\underbrace{(x-f_1)^2+(y-f_2)^2}_{i_1 i_2} - \kappa \underbrace{(ax+by+c)^2}_{\delta^2} = 0$$

avendo posto $F = [1, f_1, f_2]$. Posto $a^2+b^2=1$ si ottiene

$$\frac{PF^2}{d(P,\delta)^2} = \frac{(x-f_1)^2+(y-f_2)^2}{|ax+by+c|^2} = \kappa \equiv e^2.$$

N.B.
- Per l'ellisse l'asse focale (contenente i fuochi reali) è l'asse maggiore.
- Per l'iperbole, l'asse focale è quello che interseca in due punti reali simmetrici rispetto al centro e a distanza a da questo.

[18]Ciò spiega anche il fatto che due circonferenze distinte si incontrano in due punti reali.

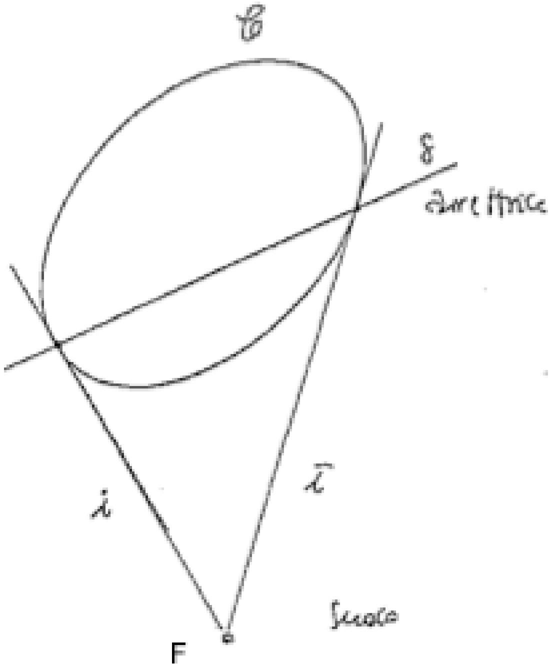


FIGURA 18.

- Riguardo alla parabola il metodo degli invarianti ortogonali fornisce il parametro p e dunque la distanza $\mathbf{d(F,V) = \frac{p}{2}}$ del fuoco dal vertice. Infatti data l'equazione canonica metrica della parabola $y = 2p\,x$ il fuoco ha coordinate $[1, \xi, 0]$ e la proiezione ortogonale H del vertice sulla direttrice ha coordinate $[1, -\xi, 0]$, con $\xi > 0$ da determinare. Sia $P : [1, x, y]$ un punto della parabola $\mathcal{P}$, allora
$$(x + \xi)^2 = (x - \xi)^2 + y^2 \Rightarrow 2x\,2\xi = y^2 \Rightarrow y^2 = 2p\,x$$
in cui $\xi = \frac{p}{2}$.

Determiniamo ora il fuoco F di una parabola $\mathcal{P}$ una volta noto il vertice V. Si osservi che se a è l'asse della parabola e $\vec{u}$ è il relativo spazio direttore, si ha che il fuoco F e la proiezione ortogonale H del vertice sulla direttrice sono individuati da $V \pm \frac{p}{2}\,\vec{u}$. Per distinguerli si può ad esempio l'intersezione di una delle due perpendicolari all'asse con la parabola: se non ci sono intersezioni si è trovato H e quindi la direttrice, altrimenti il fuoco.

Esercizio 2. Determinare l'equazione dell'iperbole $\mathcal{I}$ di asintoti $a_1 : x+y+1=0$ e $a_2 : x-2y=0$ e passante per il punto $P(1,1)$. Infine determinare la forma canonica metrica di tale iperbole.

Esercizio 3. In $\mathbb{E}^2$ si consideri un riferimento cartesiano (succesivamente ampliato proiettivamente) e la conica $\mathcal{C}$ di equazione affine

$$\mathcal{C} :\ 3x^2 - 2xy + 3y^2 - \frac{8}{\sqrt{2}}x + \frac{8}{\sqrt{2}}y + 3 = 0.$$

(1) Si determinino l'equazione omogenea e la matrice A associata alla conica $\mathcal{C}$.
(2) Si determini di che tipo di conica si tratta.
(3) Si determini la forma canonica metrica mediante il metodo degli invarianti.
(4) Determinare un cambiamento di riferimento cartesiano che riduce $\mathcal{C}$ a forma canonica.
(5) Determinare le direzioni degli assi e i fuochi.
(6) Abbozzare un disegno della situazione.

Esercizio 4. Nel piano euclideo reale, in cui è fissato un sistema di riferimento cartesiano, e ampliato proiettivamente, si determini la conica $\mathcal{C}$ di centro $C : [0,1,3]$, tangente a $r : y-2x=0$ in $O : [1,0,0]$ e passante per $P : [1,0,4]$. Se ne individui il fuoco e la direttrice e si abbozzi il grafico di $\mathcal{C}$.

Esercizio 5. Nel piano euclideo reale, in cui è fissato un sistema di riferimento cartesiano, e ampliato proiettivamente, si determini il fascio di coniche tangenti a $x_0 = 0$ in $A : [0,1,2]$ e a $r :$ di direzione $R : [0,2,-1]$ in $O : [1,0,0]$.

(1) Di che tipo di coniche si tratta, dal punto di vista affine?
(2) Successivamente mostrare che hanno tutte lo stesso vertice e determinarlo.
(3) Determinare la conica $\mathcal{C}$ del fascio avente fuoco F in $[1,-2,-4]$ e calcolarne in due modi differenti la direttrice δ.
(4) Abbozzare il grafico di $\mathcal{C}$.

Esercizio 6. Nel piano euclideo reale, in cui è fissato un sistema di riferimento cartesiano, e ampliato proiettivamente, si determini la conica $\mathcal{C}$ tangente a r_∞ in $[0,2,1]$, di vertice $V : [1,1,1]$ e tangente a $s : x+1=0$. Verificato che si tratta di una parabola, determinare fuoco e direttrice e abbozzarne il grafico.

Esercizio 7. Nel piano euclideo reale, in cui è fissato un sistema di riferimento cartesiano, e ampliato proiettivamente,

(1) si determini la conica $\mathcal{C}$ di centro $C : [1,1,1]$, passante per i punti $P_1 : [0,1,0]$ e $P_2 : [0,1,2]$ e tangente alla retta $s : x=0$.
(2) Si determini gli assi della conica.
(3) Si determini la forma canonica metrica.
(4) Si determinino i fuochi di $\mathcal{C}$.
(5) Si abbozzi il grafico di $\mathcal{C}$.

Esercizio 8. Nel piano euclideo reale, in cui è fissato un sistema di riferimento cartesiano, e ampliato proiettivamente,

(1) determinare la conica $\mathcal{I}$ tangente a $r : y = x+1$ in $R : [0,1,1]$ e all'asse y in $O : [1,0,0]$ e con centro $C : [1,-1,0]$.
(2) Determinare gli eventuali asintoti.
(3) Determinare gli eventuali gli assi e la forma canonica metrica di $\mathcal{I}$.
(4) Determinare i fuochi reali di $\mathcal{I}$ e le rispettive direttrici.
(5) Abbozzare il grafico di $\mathcal{I}$.

Riferimenti bibliografici

[Candilera] M. Candilera, *Dispensa di Geometria.* Reperibile alla pagina web http://www.math.unipd.it/ candiler/mat_tre.html

[Cornalba] M. Cornalba *Piccola introduzione alla geometria proiettiva.* Reperibile alla pagina web http://mate.unipv.it/cornalba/dispense/proj.pdf

[Sernesi] E. Sernesi, *Geometria 1.* Bollati Boringhieri.

[Spera–1] M. Spera, *Note di Elementi di Geometria.* Non pubblicate.

[Spera–2] M. Spera, *Note del Corso di Geometria.* Libreria Progetto.

[Spera–3] M. Spera, *Note di Geometria Computazionale.* Non pubblicate.

[Spera–4] M. Spera, *Comunicazioni private.*