

★ Si estendono alle varietà i classici
teoremi del calcolo differenziale:

★ Teorema delle funzioni inverse

$$\psi: X \rightarrow Y$$

ψ appl. liscia

$$\dim X = \dim Y = n$$

Sia $x_0 \in X$ t. che

$$\psi_*|_{T_{x_0} X} = d\psi(x_0) : T_{x_0} X \rightarrow T_{y_0} Y$$

sia un isomorfismo

Allora $\exists U_0 \ni x_0$ t. che $\psi|_{U_0}$ è risolubile

un diffeomorfismo su $\psi(U_0)$ \square

In coordinate, la dim. rimane quella classica, che fa uso del teorema di Banach-Caccioppoli
(lemma della contrazione)

★ Teorema del rango

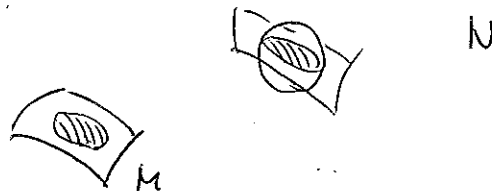
Sia $\psi: M \rightarrow N$ appl. liscia,

di rango costante $r \leq m \forall p \in M \exists$ coordinate
 (x^1, \dots, x^m) centrate in p e (y^1, \dots, y^m) centrate in $\psi(p)$

tali che

$$\psi(x^1, \dots, x^r, x^{r+1}, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^r, 0, \dots, 0) \quad \begin{matrix} r \leq m \\ r \leq m \end{matrix}$$

Dim. classica...



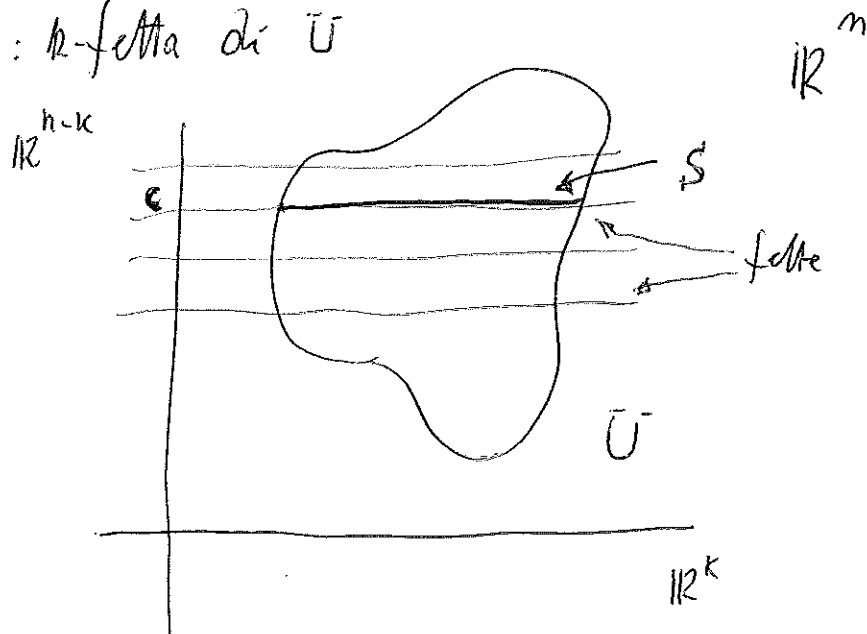
$$S = \left\{ (x^1 \dots x^k, x^{k+1} \dots x^m) \in U \mid x^{k+1} = c^{k+1} \dots x^m = c^m \right\}$$

aperto
in \mathbb{R}^m

fissi

(Slice)

S : k -fetta di U



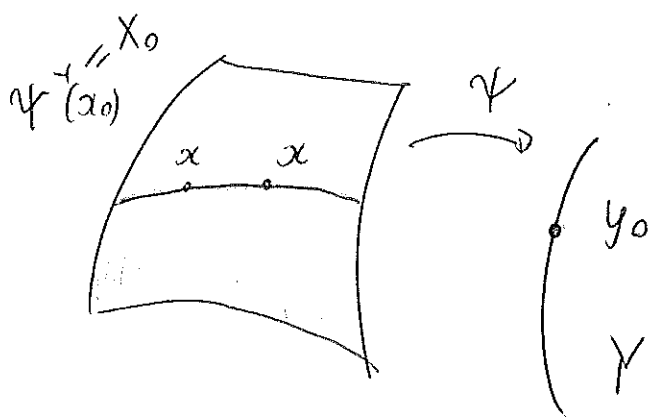
(concetto fondamentale per il seguito)

★ Teorema delle funzioni implicite

Implicit function theorem

Sia $\psi: X \longrightarrow Y$ liscia (Smooth) $\dim X > \dim Y$
liscia liscia $\parallel \parallel$
liscia liscia $n \quad m$

Sia $y_0 \in Y$ e $X_0 := \{ \alpha \in X \mid \psi(\alpha) = y_0 \}$
 $= \psi^{-1}(y_0)$



Supponiamo che

$$d\psi(\alpha) : T_\alpha X \longrightarrow T_{\psi(\alpha)} Y$$

\parallel
 $\psi_* (\alpha)$

Sia suriettiva $\forall \alpha \in X_0$ i.e. ψ è una submersione
surjective

Allora X_0 è una varietà, in cui la topologia è
manifold
 la topologia relativa di X_0 , e nella quale l'inclusione
 $X_0 \hookrightarrow X$ è liscia; inoltre $\dim X_0 = \dim X - \dim Y$

★ VEDI OLTRE PER GLI ESEMPI

Dim. Sia $V \ni y_0$ intorno coordinato, con
 coordinato neighborhood

coord. (y_1, \dots, y_m) . Dato $\alpha_0 \in X_0$, sia $U \ni \alpha_0$,
coordinato

$(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ coord. locali, con $\alpha_i(\alpha_0) = 0, i=1, \dots, n$

$d\psi$ è suriettiva \Rightarrow $\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y_i} (y_i \circ \psi) |_{\alpha_0} \end{pmatrix}$ ha rango m
surjective matrice (matrix)

A meno di riordinamento delle coordinate

(up to coordinate relabelling / reordering), si può supporre

che $d\psi$

$$\begin{pmatrix} * & | & J \end{pmatrix}$$

↑
 $m \times m$ non singolare
non singular

Sia $\tilde{\psi} : U \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}^{n-m} \times V$ così def.

$$\tilde{\psi}(x) = (\alpha_1(x) \dots \alpha_{n-m}(x), \psi(x))$$

$$d\tilde{\psi}(x_0) \sim \begin{pmatrix} I_{n-m} & 0 \\ * & J \end{pmatrix} \quad \text{che } \tilde{\psi} \text{ } \uparrow \text{ } \text{isomorfismo}$$

↑ non sing.

\Rightarrow (teor. f. inversa), $\exists U_0 \ni x_0$ tale che $\tilde{\psi}|_{U_0}$

sia invertibile, $\tilde{\psi}(U_0)$ sia aperto in $\mathbb{R}^{n-m} \times V$ e

$\tilde{\psi}^{-1} : \tilde{\psi}(U_0) \rightarrow U_0$ sia C^s

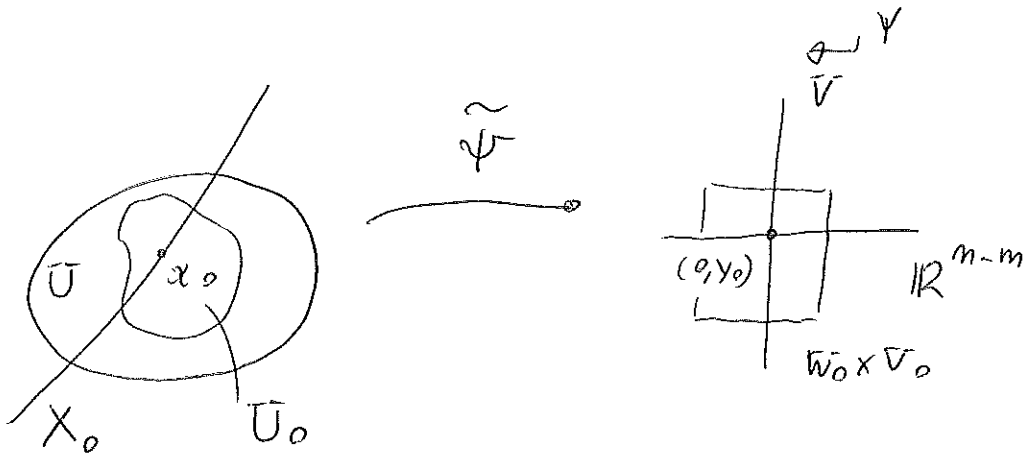
$\tilde{\psi}(U_0)$ può essere preso della forma $\begin{matrix} W_0 \times V_0 \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \emptyset \quad Y_0 \end{matrix}$

(aperti di questo tipo formano una base per la topologia di $\mathbb{R}^{n-m} \times V$)

ora $\tilde{\psi}^{-1}(W_0 \times \{y_0\}) = X_0 \cap U_0$. Dato che $\tilde{\psi}|_{U_0}$ è

un omeomorfismo, $\tilde{\psi}|_{X_0 \cap U_0} : X_0 \cap U_0 \xrightarrow{\text{omeo}} W_0 \times \{y_0\}$

\Rightarrow è un sistema di coordinate in un intorno di x_0 $W_0 \subset \mathbb{R}^{n-m}$



tali curve
vengono
chiamate
k-folte
sheets

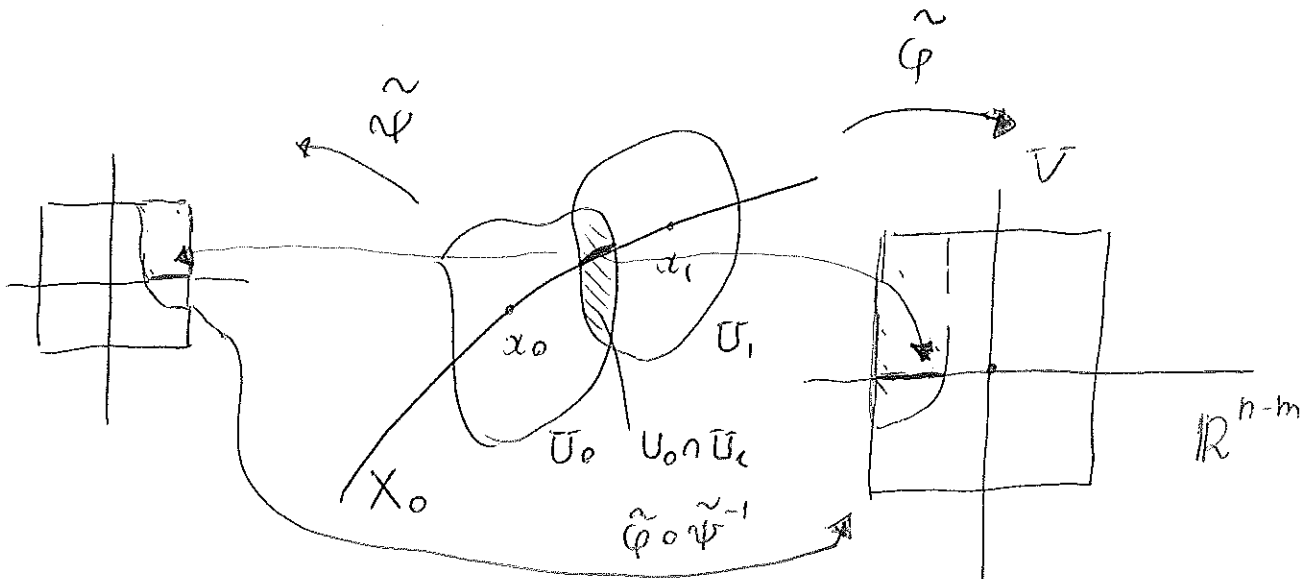
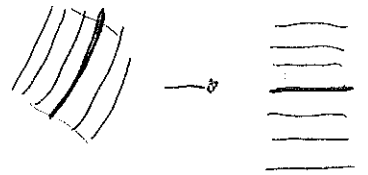
verifichiamo il comportamento sulle intersezioni

$$\tilde{\psi} : \tilde{U}_0 \rightarrow \tilde{W}_0 \times \tilde{V}_0$$

$$\tilde{\varphi} : \tilde{U}_1 \rightarrow \tilde{W}_1 \times \tilde{V}_1$$

(qui $k = n - m$)

siama k. che $(X_0 \cap U_0) \cap (X_0 \cap U_1) \neq \emptyset$



ora $\tilde{\varphi} \circ \tilde{\psi}^{-1} \Big|_{\tilde{\psi}(U_0 \cap U_1)} \tilde{\tau} \in \mathcal{E}^0$, e tale $\tilde{\tau}$ parte

$$\tilde{\varphi} \circ \tilde{\psi}^{-1} \Big|_{\tilde{\psi}(X_0 \cap U_0 \cap U_1)} : \tilde{\psi}(X_0 \cap U_0 \cap U_1) \rightarrow \tilde{\varphi}(X_0 \cap U_0 \cap U_1)$$

e ciò prova
l'asserto

$$\tilde{\psi}(U_0 \cap U_1) \cap \mathbb{R}^{n-m} \times \{y_0\}$$

Rivitalizzazione della teoria del Dini

in termini del teorema della funzione inversa

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x, y) = 0 \quad (\text{o più in gen. } f(x, y) = c) \quad \left(\left(\left(\right) \right) \right)$$

$$P_0: (x_0, y_0) \quad f(x_0, y_0) = 0 \quad \text{sia } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0, \text{ loc}$$

$$\exists y = y(x), \quad y_0 = y(x_0), \quad \text{d.c. } f(x, y(x)) = 0$$

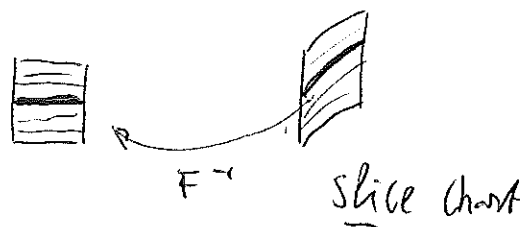
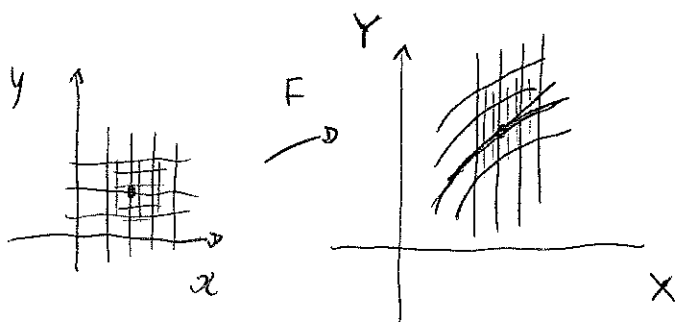
$$F: (x, y) \longmapsto (x, f(x, y))$$

$$\begin{cases} X = x \\ Y = f(x, y) \end{cases} \quad \begin{aligned} dX &= dx \\ dY &= f_x dx + f_y dy \end{aligned}$$

$$F_*: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f_x & f_y \end{pmatrix}$$

$$f_y \neq 0 \Rightarrow F_*^0 \text{ isomorfismo}$$

$\Rightarrow F$ è loc. un diffeomorfismo



1-fetta in \mathbb{R}^2

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x, y, z) = 0 \quad f_z^0 \neq 0$$

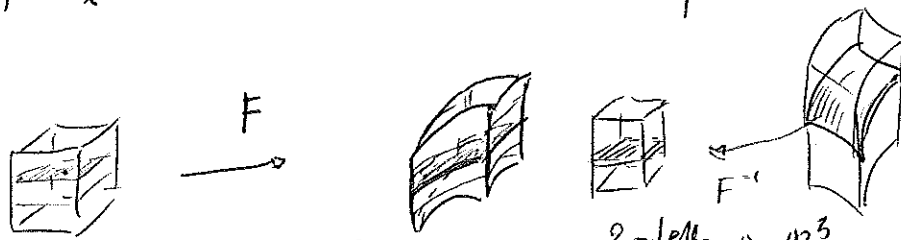
$$f(x_0, y_0, z_0) = 0$$

$$F: (x, y, z) \longmapsto (x, y, f(x, y, z))$$

$$F_* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ f_x & f_y & f_z \end{pmatrix}$$

$$f_z \neq 0 \Rightarrow F_*^0 \text{ isomorfismo}$$

$\Rightarrow F$ loc. diffeomorfismo



2-fetta in \mathbb{R}^3

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{cases} f=0 \\ g=0 \end{cases}$$

curva in \mathbb{R}^3

$$(x, y, z) \mapsto \begin{matrix} X & Y & Z \\ (x, f(x, y, z), g(x, y, z)) \end{matrix}$$

$$dX = dx$$

$$dY = f_x dx + f_y dy + f_z dz$$

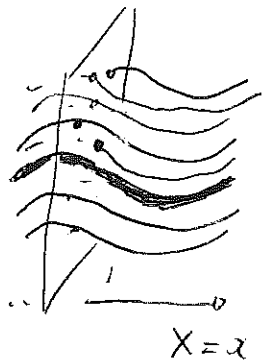
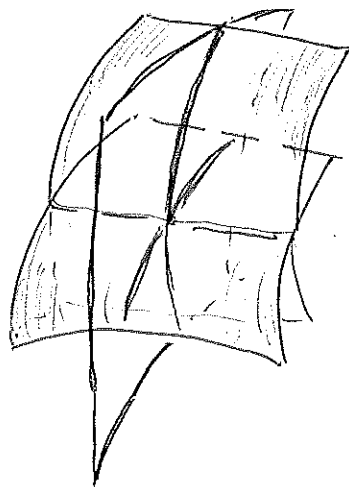
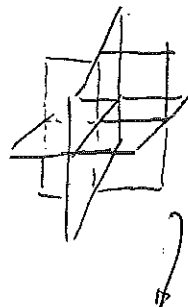
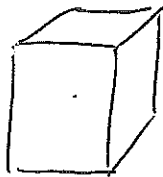
$$dZ = g_x dx + g_y dy + g_z dz$$

$$F_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \end{pmatrix}$$

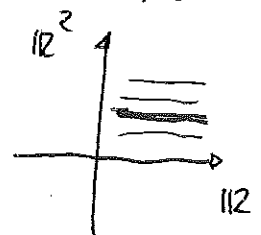
$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y, z)}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$

$$\Rightarrow F_x^0 \text{ isom}$$

$$\Rightarrow F \text{ diffeom loc}$$



$X=x$



1-folha

in \mathbb{R}^3

Def. * Una sottovarietà immersa di una varietà liscia Y
 è una coppia (X, ψ) , X varietà liscia,
 $\psi: X \rightarrow Y$, con ψ immersiva, ψ_* immersiva

con abuso di linguaggio: $\psi(x)$ al posto di (X, ψ)

[ψ : immersione iniettiva]

* sottovarietà inclusa (embedded)

Si ha invece un' inclusione (embedding) se
 o embedding

in più $\psi: X \rightarrow \psi(X)$ è un omeomorfismo
 (ove $\psi(X) \subset Y$ sia munito della topologia
equipped

relativa (indotta da Y))

*** Facciamo vedere che, se ψ è un embedding,
 $\psi(X)$ è effettivamente una sottovarietà di Y : ovvero
 indeed nel senso seguente

ogni punto di $\psi(X)$ possiede un intorno
 coordinato $U \subset Y$ tale che $\psi(X) \cap U$ sia
 una fetta, i.e. dominio di una "carta-fetta" } Vedi pag. XXVII-9'

Sia $x \in X$. Poiché un embedding ha rank
costante, per il teorema del rango $\exists (U, \varphi), (V, \psi)$
 centrate in x e $\psi(x)$, risp., in cui

$$\psi: (x_1, \dots, x_k) \mapsto (x_1, \dots, x_k, \underbrace{0, \dots, 0}_{\dim Y - \dim X})$$

" $\dim X$ "

A patto di restringere V ulteriormente, se occorre,

$\psi(U)$ diviene una fetta in Y

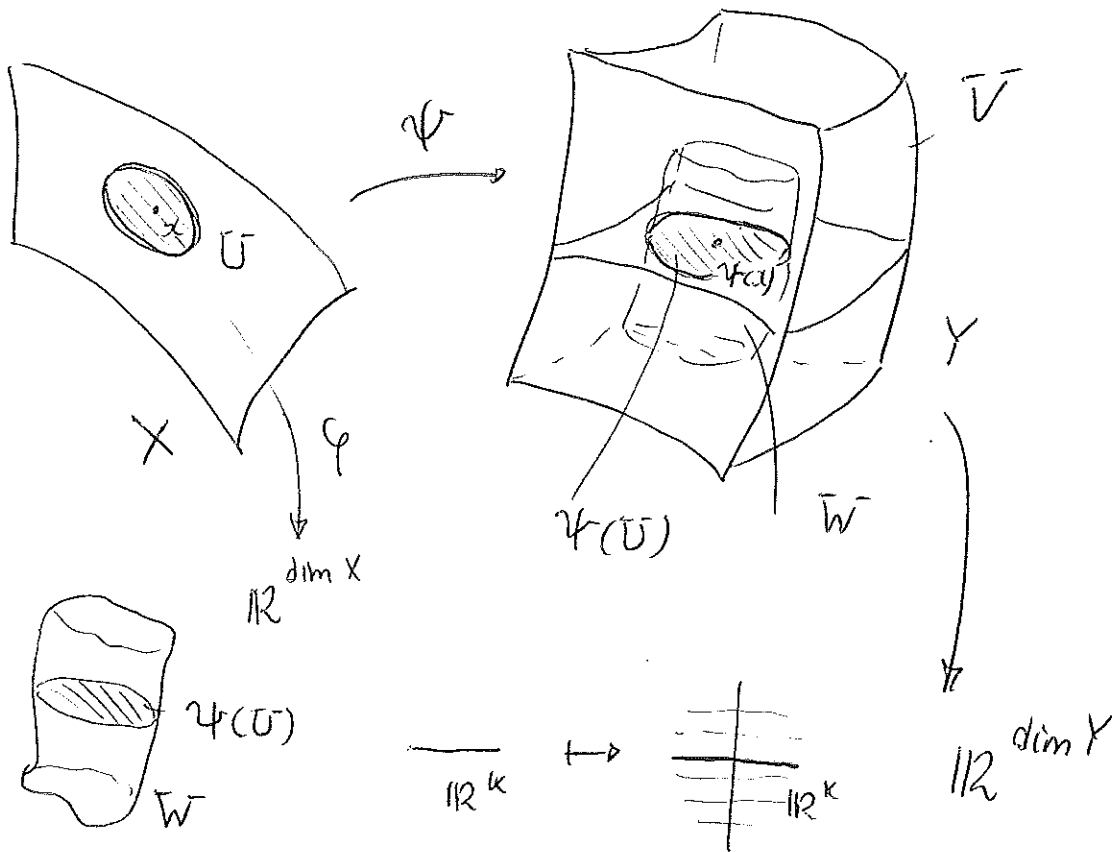
ora $\psi(U)$ è aperto in $\psi(X)$ (ψ è omeo su $\psi(X)$)

$$\Rightarrow \exists \bar{W} \subset Y \text{ tale che } \psi(U) = \bar{W} \cap \psi(X).$$

Sia $\tilde{V} = V \cap \bar{W}$, si ottiene allora una slice chart

$$(\tilde{V}, \mathbb{R}^k |_{\tilde{V}}), \quad \tilde{V} \ni f(x) \text{ tale che}$$

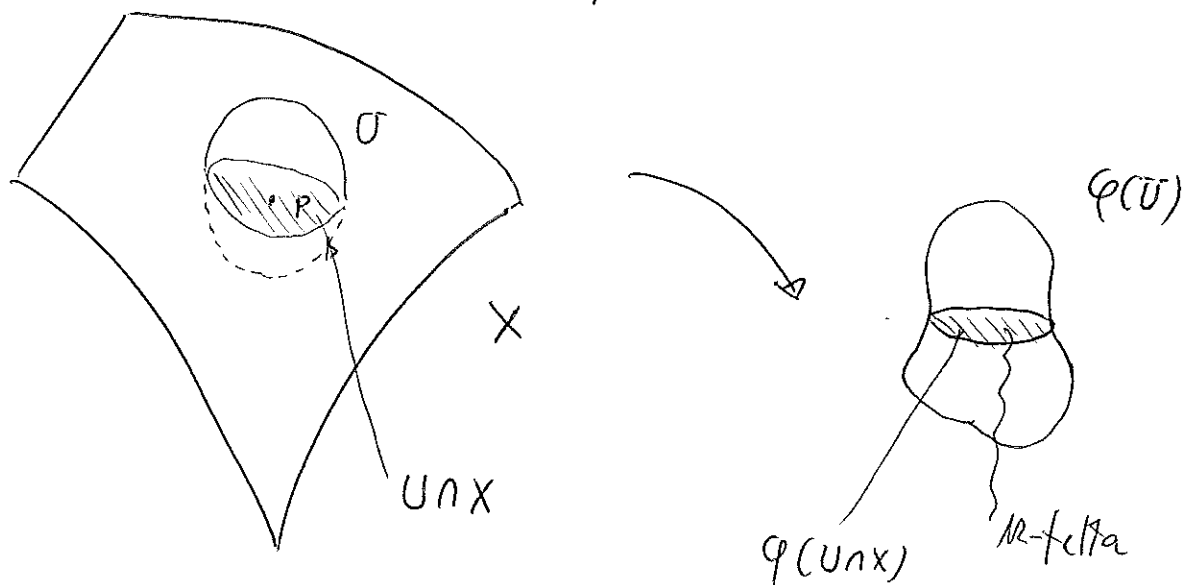
$$\tilde{V} \cap \psi(X) = \tilde{V} \cap \psi(U) \text{ è una } \underline{\text{fetta}} \text{ di } \tilde{V}.$$



Nota: se X è compatta, dato che $\psi(X)$ è di Hausdorff e ψ è iniettiva, ψ è automaticamente un omeomorfismo

In ogni caso, per la teoria del Dini, ψ iniettiva, ψ_* iniettiva \Rightarrow localmente ψ omeomorfismo, i.e. un' immersione iniettiva è localmente un' inclusione

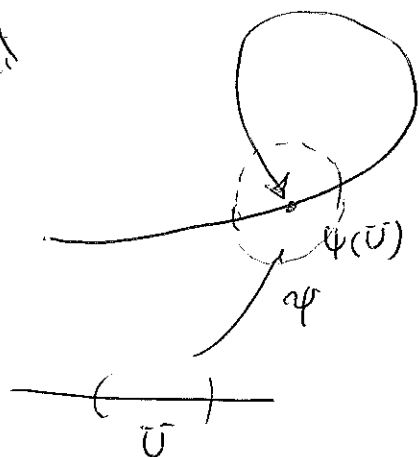
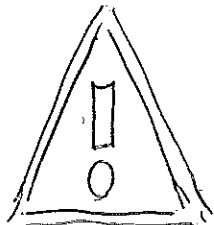
In generale:



X sottovarietà ("embedded") di Y , di dimensione $\mathbb{R} \leq \dim Y$

$\forall p \in X, \exists U, \ni p$ che sia il dominio di una "carta - fetta" (slice chart), i.e.

$\phi(U \cap X)$ sia una \mathbb{R} -fetta in $\phi(U) \subset \mathbb{R}^m$



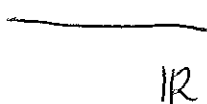
$$\psi|_U : U \rightarrow \psi(U)$$

è immerso, $(\psi|_U)_* = \psi_*|_U$ immerso

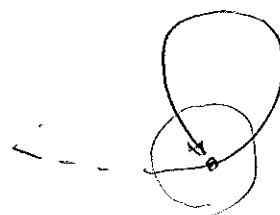
$\psi|_U$ omeomorfismo, i.e.

$\psi|_U$ embedding

Ma
ovviamente

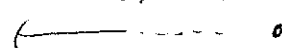


\mathbb{R}



connesso
per cui
=> connesso

scnesso



non è un omeomorfismo

[ψ è solamente un'immersione immersa, $\psi(\mathbb{R})$

è una sottovarietà di \mathbb{R}^2 immersa ma non inclusa
Immersed embedded

★ Il "push-forward" f_*
(differenziale)

Schema riassuntivo
ed altri esempi

Teorema della f. inversa



- ★ teorema del rango
- ★ teorema della funzione implicita

Strumenti cruciali

Caso particolare importante
Sommersioni suriettive

Slogan:
" f si comporta localmente
come f_* "

$$F : M \rightarrow N \quad \text{liscia}$$

$r(F)$

rango di F in $p \in$

rango di $F_* : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$

Se $r(F)$ è lo stesso, ovvero F di rango costante ($\equiv k$)

F Sommersione / Submersion : F_* suriettivo $\forall p \in M$ ($r(F) = \dim N$)

F Immersione (immersion) : F_* iniettivo ($\Leftrightarrow r(F) = \dim M$)

F Inclusione (embedding) : F immersione i.e. F_* iniettivo
+ inclusione topologica (topological embedding)
i.e. F : omeomorfismo su $F(N)$

[un embedding liscio NON è un embedding topologico liscio!]

equiv.

F embedding:

F metrizza

F_* metrizza

$F: M \rightarrow F(N)$ omeomorfismo

\uparrow top. relativa
(ereditata da N)

Osservazioni / esempi

1. Esistono banalmente immersioni non suriettive:

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{Im}(F) = \mathbb{R}^+$$
$$x \mapsto e^x$$

$$F_*|_x = e^x \quad (de^x = e^x dx)$$

$$e^x: T_x \mathbb{R} \rightarrow T_{e^x} \mathbb{R}$$
$$\begin{array}{ccc} \cong & & \cong \\ \mathbb{R} & & \mathbb{R} \end{array}$$

$$h \mapsto e^x \cdot h$$

è suriettivo
(e anche iniettivo)

$\forall x \in \mathbb{R}$

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$
$$x \mapsto e^x$$

è una immersione suriettiva

2. $\pi: \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k) \mapsto (x_1, \dots, x_n)$$

immersione
(suriettiva)

3. $i: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$$
$$c_1, \dots, c_k$$

intervallo aperto

inclusione

4. $\gamma: I \rightarrow M$

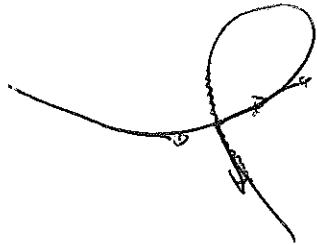
immersione: $\gamma'(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$

[è chiamata in genere proprietà di regolarità]

embedding: γ iniettiva,

$\gamma'(t) \neq 0$, $\gamma: I \rightarrow \gamma(I)$ omeomorfismo

5.



è un'immersione

$$\gamma'(t) \neq 0 \quad \forall t$$

✱ non è un'embedding.

Semplicemente perché non è
iniettiva.

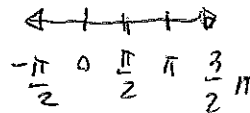
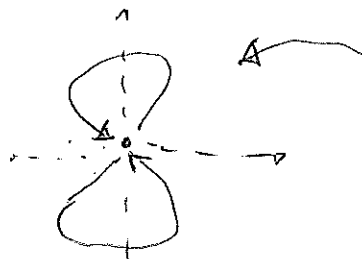
(e dunque, a fortiori, non
può essere un omeomorfismo)

6. $\gamma: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}^2$

immersione, iniettiva
non embedding.

$$\gamma(t) = (\sin 2t, \cos t)$$

$$|\dot{\gamma}|^2 = 4\cos^2(1 - \cos^2)$$



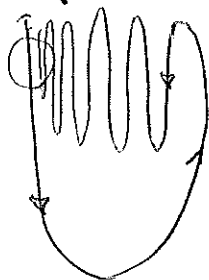
f. della del
topologo

compatto

non compatto

non può essere un omeomorfismo

7.



connesso
per archi

non localmente
connesso per archi

8. $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$
 $t \mapsto \gamma(t) = (e^{2\pi i ct}, e^{2\pi i ct})$
 $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$\text{Im } \gamma$ è densa in $S^1 \times S^1 = \mathbb{T}^2$
 (foliazione di Kronecker)

$Z \subset \mathbb{R}$ è discreto (i.e. privo di
 punti di accumulazione)

$\gamma(Z) \subset \mathbb{T}^2$ non lo è

$\Rightarrow \gamma$ non può essere un omeom. sull'immagine. |||

Nota (v. anche altre): l'applicazione $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^2$

è un omomorfismo di gruppi di Lie
 (\mathbb{R} e $\gamma(\mathbb{R})$). Si ha $\overline{\gamma(\mathbb{R})} = \mathbb{T}^2$

e pertanto, ovviamente, $\gamma(\mathbb{R})$ non è chiuso in \mathbb{T}^2

ciò è compatibile col teorema del sottogruppo
 chiuso: $H \subset G$ sottogruppo di G , gruppo di Lie.

H è chiuso $\Leftrightarrow H$ è varietà embedded in G

$\Leftrightarrow H$ è s. gruppo di Lie embedded in G

Ancora un esempio

★ Immersioni topologiche

$f: X \rightarrow Y$ continua
iniettiva

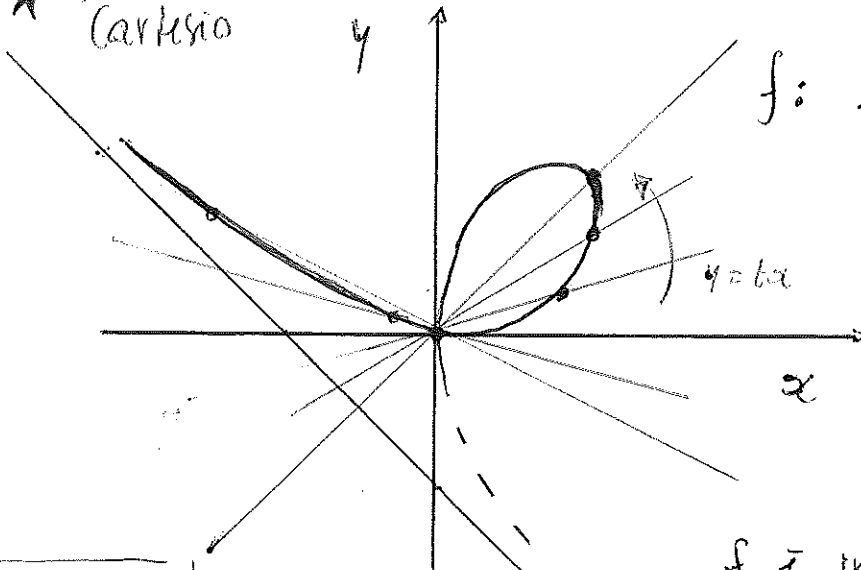
è una ^(inclusione) immersione topologica ^(embedding)

se A è aperto in $X \Leftrightarrow A = f^{-1}(B)$, B aperto in Y ovvero $f: X \rightarrow f(X)$ è

★ un omeomorfismo ($f(X)$ dotato della topologia relativa, ereditata da Y)

(una algebra razionale)

★ folium di Cartesio

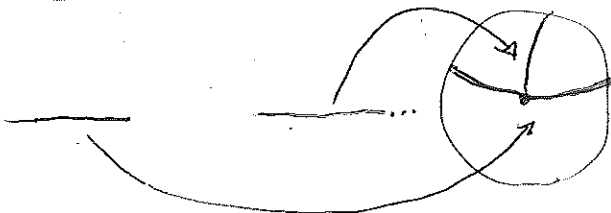
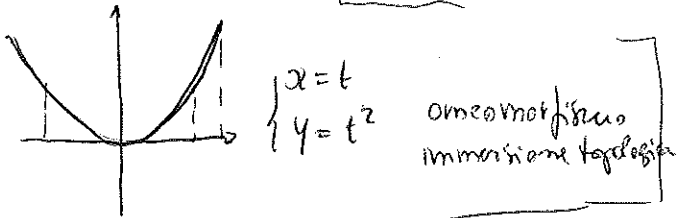


$f: \begin{cases} x = \frac{6t}{1+t^3} \\ y = t \cdot x = \frac{6t^2}{1+t^3} \end{cases}$

$t \in (-1, +\infty)$
X

f è iniettiva

ma $f: X \rightarrow f(X)$
non è un omeomorfismo



immersione \leftrightarrow immersion

inclusionione \leftrightarrow embedding

spesso in italiano si usa

Solo immersione: è importante

capire il contesto