Università degli studi di Verona
Corsi di laurea in Informatica e in Tecnologie dell'Informazione
Prova scritta di Matematica di Base — 14 settembre 2005

matricola .... nome .... cognome ....

Sezione | A | B |

Scrivere subito nome, cognome e numero di matricola, indicando la sezione di corso seguita. Le soluzioni vanno trascritte solo su questi fogli, negli spazi appositamente riservati. Si può comunque usare il retro, purché sia chiaro il riferimento.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Tot

1) Si consideri la seguente relazione sull'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi

$$R = \{ (x, y) : x, y \in \mathbf{Z}, 2(y - x) \text{ è multiplo di } 6 \}.$$

Dire se si tratta di una relazione di tipo noto, motivando la risposta. Quali sono gli elementi $x \in \mathbf{Z}$ tali che $(5, x) \in R$? Quali sono gli elementi $x \in \mathbf{Z}$ tali che $(x, 5) \in R$?

2) Mostrare che $R = \{(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,4),(3,5),(3,6),(5,6)\}$ è una relazione d'ordine stretto sull'insieme $\{1,2,3,4,5,6,\}$. Determinare gli elementi massimali, minimali, eventuali massimo, minimo, maggioranti, minoranti, estremo superiore o estremo inferiore del sottoinsieme $\{3,4,5\}$.

3) Dimostrare per induzione che, per $n \geq 0$, $\sum_{k=0}^{n} 2k = n^2 + n$

4) Si dica in quali strutture è vero il seguente enunciato

$$\exists v_1 \exists v_0 \forall v_2 ((v_0 = v_2) \vee (\neg v_2 = v_1))$$

5) Si dica, giustificando la risposta, se gli insiemi $\mathbf{N} \cup \{-2, \sqrt{3}\}$ e $4\mathbf{N} \cup \{\frac{7}{10}, \pi, 11\}$ hanno la stessa cardinalità. (Nota: con $\mathbf{N}$ denotiamo l'insieme dei numeri naturali e con $4\mathbf{N}$ l'insieme dei numeri naturali multipli di 4.)

6) Si definisca quando due insiemi hanno la stessa cardinalità. Si enunci un criterio per verificare se $|A| = |B|$.

7) Si consideri la struttura $\mathfrak{N} = (\mathbf{N}, \{\equiv, \prec\}, \{\oplus, \otimes\}, \{\mathit{0}, \mathit{1}\})$, dove $\mathbf{N}$ denota l'insieme dei numeri naturali, $\equiv$ la relazione binaria di essere lo stesso numero, $\prec$, $\oplus$ e $\otimes$ rispettivamente l'ordine, l'addizione e la moltiplicazione tra numeri naturali, $\mathit{0}$ e $\mathit{1}$ i numeri zero e uno.

Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio adatto alla struttura i cui simboli propri siano i predicati $=$, $<$; i simboli per funzione $+$ e $\times$; i simboli per costante 0 e 1.

Nel linguaggio $\mathcal{L}$ si scriva una formula $\varphi(v_0, v_1)$ con le sole variabili libere indicate tale che $\mathfrak{N} \models \varphi(v_0, v_1)[a, b]$ se e solo se a è dispari, b è multiplo di 7 e $5b - a$ è maggiore di 0.

8) Dire che cosa significa che una formula è soddisfacibile. Dire cosa significa che una formula è conseguenza logica di un insieme di formule. Dimostrare che, per ogni scelta delle formule α e β,

$$\models \alpha \to \beta \text{ se e solo se } \{\alpha\} \cup \{\neg\beta\} \text{ è non soddisfacibile}$$

9) In un linguaggio in cui c'è un simbolo di relazione unaria P e un simbolo di funzione binaria f, dire quali delle seguenti successioni di simboli sono formule (F), quali termini (T) e quali nulla (N); in quest'ultimo caso scrivere nell'ultima colonna una breve giustificazione.

	F	T	N	
$\forall v_0 \neg \wedge P f f v_1 v_0 v_3$				
$f v_1 f v_1 v_2 f v_1 v_2$				
$f f v_1 f v_2 v_3 v_4$				
$\wedge \forall v_0 P f v_1 v_0 v_3 \neg P v_0 f v_1 v_2$				
$\neg \wedge \forall v_1 P f v_1 v_0 P f v_0 f v_1 v_2$				
$\wedge \wedge f v_1 v_2 \neg P v_3 \neg \forall v_1 P f v_1 v_2$				
$\wedge \wedge P f v_1 v_2 \neg P v_3 \neg \forall v_1 P f v_1 f v_2 v_3$				

10) Dato l'insieme di coppie ordinate

$$\begin{aligned} g = &\{(x, x^2 - 2x) : x \in \mathbf{N}, 0 < x^2 - 1 \leq 15\} \cup \\ &\cup \{(x, 3x - 4) : x \in \mathbf{N}, 3 < x < 7\} \cup \\ &\cup \{(x, x^2 - 3x - 4) : x \in \mathbf{N}, x > 5\} \cup \{(1, 3), (2, 0), (5, 11)\}, \end{aligned}$$

motivare perché g è una funzione da $\mathbf{N}$ in $\mathbf{N}$, precisando se è totale, suriettiva, iniettiva o biiettiva, giustificando le risposte.

Data poi la funzione $f = \{(0, 3), (4, 2), (3, 5)\}$, scrivere quali sono le funzioni $h = f(g)$ e $k = g(f)$. Di esse precisare insieme di definizione e insieme immagine e se sono iniettive.

Università degli studi di Verona
Corsi di laurea in Informatica e in Tecnologie dell'Informazione
Prova scritta di Matematica di Base — 15 ottobre 2004

matricola .... nome .... cognome ....

Sezione | A | B |

Scrivere subito nome, cognome e numero di matricola, indicando la sezione di corso seguita. Le soluzioni vanno trascritte solo su questi fogli, negli spazi appositamente riservati. Si può comunque usare il retro, purché sia chiaro il riferimento.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Tot

Compito A

1) Si consideri la seguente relazione sull'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi ($\mathbf{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$):

$$R = \{\, (a, b) : a, b \in \mathbf{Z}, a^2 = b^2 \text{ e } b < a \,\}.$$

Dire se si tratta di una relazione di tipo noto, motivando la risposta. Quali sono gli elementi $x \in \mathbf{Z}$ tali che $(3, x) \in R$? Quali sono gli elementi $x \in \mathbf{Z}$ tali che $(x, 3) \in R$?

2) Mostrare che $R = \{(a,b),(a,e),(a,d),(a,f),(b,e),(b,f),(c,b),(c,e),(c,f),(d,f),(e,f)\}$ è una relazione d'ordine stretto sull'insieme $\{a,b,c,d,e,f\}$. Determinare gli elementi massimali, minimali, eventuali massimo, minimo, estremo superiore o estremo inferiore del sottoinsieme $\{b,d,e\}$.

3) Dimostrare che, per $n > 3$, $n! > 2^n + n$.

4) Si dica in quali strutture è vero l'enunciato seguente

$$\exists v_0 \exists v_1 \forall v_2 \big((\neg v_0 = v_2) \wedge (v_0 = v_1)\big).$$

5) Si dica, giustificando la risposta, se gli insiemi $\mathbf{N} - \{6, 12\}$ e $4\mathbf{N} \cup \{5\}$ hanno la stessa cardinalità. (Nota: con $\mathbf{N}$ denotiamo l'insieme dei numeri naturali e con $4\mathbf{N}$ l'insieme dei numeri naturali multipli di 4.)

6) Si definisca quando due insiemi hanno la stessa cardinalità e si enunci un criterio per verificare se due insiemi hanno la stessa cardinalità.

7) Si consideri la struttura $\mathfrak{N} = (\mathbf{N}, \{\equiv, \prec\}, \{\oplus, \otimes\}, \{\mathit{0}, \mathit{1}\})$, dove $\mathbf{N}$ denota l'insieme dei numeri naturali, $\equiv$ la relazione binaria di essere lo stesso numero, $\prec$, $\oplus$ e $\otimes$ rispettivamente l'ordine, l'addizione e la moltiplicazione tra numeri naturali, $\mathit{0}$ e $\mathit{1}$ i numeri zero e uno.

Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio adatto alla struttura i cui simboli propri siano i predicati $=$, $<$; i simboli per funzione $+$ e $\times$; i simboli per costante 0 e 1.

Nel linguaggio $\mathcal{L}$ si scriva una formula $\varphi(v_0, v_1)$ con le sole variabili libere indicate tale che $\mathfrak{N} \models \varphi(v_0, v_1)[a, b]$ se e solo se $a > 1$, $b > 1$ e $a + 2b$ è multiplo di 6.

8) Dire che cosa significa che una formula è valida. Dimostrare che, per ogni scelta delle formule α e β,

$$\models \alpha \to (\beta \to \alpha).$$

È vero che, per ogni scelta delle formule α e β, la formula

$$(\alpha \to \beta) \to \alpha$$

è valida?

9) In un linguaggio in cui c'è un simbolo di relazione binaria P e un simbolo di funzione unaria f, dire quali delle seguenti successioni di simboli sono formule (F), quali termini (T) e quali nulla (N); in quest'ultimo caso scrivere nell'ultima colonna una breve giustificazione.

	F	T	N	
$\forall v_1 \wedge \neg P v_0 v_1 P f v_2 v_3$				
$f v_0 v_1$				
$f v_3$				
$\wedge P v_0 f v_0 v_1 \neg P v_2 v_3$				
$\wedge P v_0 f v_1 \neg P v_2 v_3$				
$\wedge \wedge P v_1 v_2 \neg P v_3 v_4 \forall v_0 P v_1 f v_2$				
$\wedge \wedge P v_1 v_2 \neg P v_3 v_4 \forall P v_1 f v_2$				

10) Dato l'insieme di coppie ordinate

$$\begin{aligned} g = \{(x, x+4) : x \in \mathbf{N}, x^3 - 1 < 9\} \cup \\ \cup \{(x, x^2 - 3x + 8) : x \in \mathbf{N}, 1 < x < 5\} \cup \\ \cup \{(x, x+8) : x \in \mathbf{N}, x > 4\} \cup \{(5, 13)\}, \end{aligned}$$

motivare perché g è una funzione da $\mathbf{N}$ in $\mathbf{N}$, precisando se è totale, suriettiva, iniettiva o biiettiva, giustificando le risposte.

Data poi la funzione $f = \{(1,4), (4,1), (5,1)\}$, scrivere quali sono le funzioni $h = f(g)$ e $k = g(f)$. Di esse precisare insieme di definizione e insieme immagine e se sono iniettive.

Università degli studi di Verona
Corsi di laurea in Informatica e in Tecnologie dell'Informazione
Prova scritta di Matematica di Base — 17 dicembre 2004

matricola .... nome .... cognome ....

Sezione A B

Scrivere subito nome, cognome e numero di matricola, indicando la sezione di corso seguita. Le soluzioni vanno trascritte solo su questi fogli, negli spazi appositamente riservati. Si può comunque usare il retro, purché sia chiaro il riferimento.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Tot

Compito A

1) Si consideri la seguente relazione sull'insieme $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ delle coppie ordinate di numeri naturali:

$$R = \{\, ((a,b),(c,d)) : a,b,c,d \in \mathbf{N}, c+b = d+a \,\}.$$

Dire se si tratta di una relazione di tipo noto, motivando la risposta. Quali sono gli elementi $x \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ tali che $((3,1),x) \in R$? Quali sono gli elementi $x \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ tali che $(x,(1,3)) \in R$?

2) Mostrare che $R = \{(a,c),(a,d),(a,e),(a,f),(a,g),(b,d),(b,e),(b,f),(b,g),(c,e),(c,f),(c,g),(d,e),(d,f),(d,g),(e,f),(e,g)\}$ è una relazione d'ordine stretto sull'insieme $\{a,b,c,d,e,f,g\}$. Determinare gli elementi massimali, minimali, eventuali massimo, minimo, estremo superiore o estremo inferiore del sottoinsieme $\{c,d,e\}$.

3) Dimostrare che, per $n > 7$, $n! - 3^n > 0$.

4) In un linguaggio che come simboli non logici ha il simbolo di uguaglianza, il simbolo di relazione binaria P e il simbolo di relazione unaria Q, si scriva un enunciato che sia vero se e solo se i simboli P e Q sono interpretati rispettivamente in relazioni R_1 e R_2 con la seguente proprietà: se la coppia (a,b) appartiene a R_1, allora l'elemento a appartiene a R_2 e l'elemento b è diverso da a.

5) Si dica, giustificando la risposta, se gli insiemi $\mathbf{N} - \{5, 8, 11\}$ e $3\mathbf{N} \cup \{5, 8, 10\}$ hanno la stessa cardinalità. (Nota: con $\mathbf{N}$ denotiamo l'insieme dei numeri naturali e con $3\mathbf{N}$ l'insieme dei numeri naturali multipli di 3.)

6) Si definisca quando un insieme ha cardinalità minore o uguale a quella di un altro; si enunci un criterio per verificare se $|A| < |B|$.

7) Si consideri la struttura $\mathfrak{N} = (\mathbf{N}, \{\equiv, \prec\}, \{\oplus, \otimes\}, \{\mathit{0}, \mathit{1}\})$, dove $\mathbf{N}$ denota l'insieme dei numeri naturali, $\equiv$ la relazione binaria di essere lo stesso numero, $\prec$, $\oplus$ e $\otimes$ rispettivamente l'ordine, l'addizione e la moltiplicazione tra numeri naturali, $\mathit{0}$ e $\mathit{1}$ i numeri zero e uno.

Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio adatto alla struttura i cui simboli propri siano i predicati $=, <$; i simboli per funzione $+$ e $\times$; i simboli per costante 0 e 1.

Nel linguaggio $\mathcal{L}$ si scriva una formula $\varphi(v_0, v_1)$ con le sole variabili libere indicate tale che $\mathfrak{N} \models \varphi(v_0, v_1)[a, b]$ se e solo se $a > 1$, $b > 1$ e $a + 2b$ è multiplo di 4 e multiplo di 3.

8) Dire che cosa significa che una formula è conseguenza logica di un insieme di formule. Dimostrare che, per ogni scelta delle formule α e β,

$$\models \alpha \to \beta \text{ se e solo se } \{\alpha\} \models \beta$$

Che condizione dobbiamo porre sulla formula α affinché, per ogni scelta della formula β, la formula

$$(\alpha \to \beta) \to \alpha$$

sia valida?

9) In un linguaggio in cui c'è un simbolo di relazione binaria P e un simbolo di funzione unaria f, dire quali delle seguenti successioni di simboli sono formule (F), quali termini (T) e quali nulla (N); in quest'ultimo caso scrivere nell'ultima colonna una breve giustificazione.

	F	T	N	
$\forall v_0 \neg \wedge P f v_1 v_3 \neg P v_0 v_1$				
$v_0 f v_1$				
$f v_1$				
$\wedge P f v_1 v_3 \neg P v_0 v_1 v_2$				
$\wedge P f v_1 f v_3 \neg P v_0 v_1$				
$\wedge \neg \wedge P v_1 v_2 P v_3 v_4 \forall v_0 P v_1 f v_2$				
$\wedge \neg \wedge P v_1 v_2 P v_3 v_4 \forall P v_1 f v_2$				

10) Dato l'insieme di coppie ordinate

$$\begin{aligned} g = \{(x, x+2) : x \in \mathbf{N}, x^3 + 1 < 10\} \cup \\ \cup \{(x, 8-x) : x \in \mathbf{N}, 3 < x \leq 8\} \cup \\ \cup \{(x, 2x-16) : x \in \mathbf{N}, x > 7\} \cup \{(5,3)\}, \end{aligned}$$

motivare perché g è una funzione da $\mathbf{N}$ in $\mathbf{N}$, precisando se è totale, suriettiva, iniettiva o biiettiva, giustificando le risposte.

Data poi la funzione $f = \{(1,3), (3,1), (5,1)\}$, scrivere quali sono le funzioni $h = f(g)$ e $k = g(f)$. Di esse precisare insieme di definizione e insieme immagine e se sono iniettive.

Università degli studi di Verona
Corsi di laurea in Informatica e in Tecnologie dell'Informazione
Prova scritta di Matematica di Base — 21 giugno 2005

matricola .... nome .... cognome ....

Sezione A | B

Scrivere subito nome, cognome e numero di matricola, indicando la sezione di corso seguita. Le soluzioni vanno trascritte solo su questi fogli, negli spazi appositamente riservati. Si può comunque usare il retro, purché sia chiaro il riferimento.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Tot

Compito A

1) Si consideri la seguente relazione sull'insieme $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ delle coppie ordinate di numeri interi

$$R = \{ ((a,b),(c,d)) : a,b,c,d, \in \mathbf{Z}, a^2 + d^2 = c^2 + b^2 \}.$$

Si dimostri che è una relazione d'equivalenza. Quali sono gli elementi in relazione con $(0,0)$?

2) Mostrare che $R = \{(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(a,f),(a,g),(b,d),(b,e),(b,f),(b,g),(c,d),(c,e),$ $(c,f),(c,g),(d,e),(d,g),(e,g),(f,g),\}$ è una relazione d'ordine stretto sull'insieme $\{a,b,c,d,e,f,g\}$. Determinare gli elementi massimali, minimali, eventuali massimo, minimo, maggioranti, minoranti, estremo superiore o estremo inferiore del sottoinsieme $\{d,e,f\}$.

3) Dimostrare le formule seguenti:

- per ogni $n \geq 0$, $\sum_{i=0}^{n} 2i = n^2 + n$;
- per ogni $n \geq 0$, $\sum_{i=0}^{n} (2i+1) = (n+1)^2$.

4) Si dica in quali strutture è vero il seguente enunciato

$$\forall v_0 \forall v_1 \exists v_2 ((v_1 = v_2) \wedge (v_2 = v_0))$$

5) Si dica, giustificando la risposta, se gli insiemi $\mathbf{N} \cup \{-3, 1/2\}$ e $5\mathbf{N} - \{15\}$ hanno la stessa cardinalità. (Nota: con $\mathbf{N}$ denotiamo l'insieme dei numeri naturali e con $5\mathbf{N}$ l'insieme dei numeri naturali multipli di 5.)

6) Si definisca quando due insiemi hanno la stessa cardinalità. Dato un insieme X, può essere $|X| = |P(X)|$, dove con $P(X)$ si denota l'insieme delle parti di X?

7) Si consideri la struttura $\mathfrak{N} = (\mathbf{N}, \{\equiv, \prec\}, \{\oplus, \otimes\}, \{\mathit{0}, \mathit{1}\})$, dove $\mathbf{N}$ denota l'insieme dei numeri naturali, $\equiv$ la relazione binaria di essere lo stesso numero, $\prec$, $\oplus$ e $\otimes$ rispettivamente l'ordine, l'addizione e la moltiplicazione tra numeri naturali, $\mathit{0}$ e $\mathit{1}$ i numeri zero e uno.

Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio adatto alla struttura i cui simboli propri siano i predicati $=$, $<$; i simboli per funzione $+$ e $\times$; i simboli per costante 0 e 1.

Nel linguaggio $\mathcal{L}$ si scriva una formula $\varphi(v_0, v_1)$ con le sole variabili libere indicate tale che $\mathfrak{N} \models \varphi(v_0, v_1)[a, b]$ se e solo se $a - 3b > 1$, $a + 1$ è multiplo di 2 e b è multiplo di 5.

8) Dire che cosa significa che una formula è soddisfacibile. Dire cosa significa che una formula è conseguenza logica di un insieme di formule. Dimostrare che, per ogni scelta delle formule α e β,

$$\models \alpha \rightarrow \beta \text{ se e solo se } \{\alpha\} \cup \{\neg\beta\} \text{ è non soddisfacibile}$$

9) In un linguaggio in cui c'è un simbolo di relazione binaria P e un simbolo di funzione unaria f, dire quali delle seguenti successioni di simboli sono formule (F), quali termini (T) e quali nulla (N); in quest'ultimo caso scrivere nell'ultima colonna una breve giustificazione.

	F	T	N	
$\forall v_0 \neg \wedge P f v_1 v_0 f v_3$				
$f v_1 f v_2$				
$\wedge \forall v_1 P v_1 v_0 \neg P f v_0 f v_1$				
$\wedge \forall v_0 P f v_1 v_0 \neg P v_0 f v_1 v_2$				
$\wedge \wedge v_1 \neg P v_3 f v_0 \neg \forall v_1 P f v_1 v_2 v_3$				
$\wedge \wedge P v_1 f v_2 \neg P v_3 v_4 \neg \forall v_1 P f v_1 v_3$				
$f f f f v_0$				

10) Dato l'insieme di coppie ordinate

$$\begin{aligned} g = &\{(x, 5-x) : x \in \mathbf{N}, x-1 < 3\} \cup \\ &\cup \{(x, x^2-2x-1) : x \in \mathbf{N}, 7 < x^2-1 < 27\} \cup \\ &\cup \{(x, 2x+3) : x \in \mathbf{N}, x > 5\} \cup \{(2,3), (6,15)\}, \end{aligned}$$

motivare perché g è una funzione da $\mathbf{N}$ in $\mathbf{N}$, precisando se è totale, suriettiva, iniettiva o biiettiva, giustificando le risposte.

Data poi la funzione $f = \{(0,3), (2,6), (1,0)\}$, scrivere quali sono le funzioni $h = f(g)$ e $k = g(f)$. Di esse precisare insieme di definizione e insieme immagine e se sono iniettive.

Università degli studi di Verona
Corsi di laurea in Informatica e in Tecnologie dell'Informazione
Prova scritta di Matematica di Base — 8 luglio 2005

matricola .... nome .... cognome ....

Sezione | A | B |

Scrivere subito nome, cognome e numero di matricola, indicando la sezione di corso seguita. Le soluzioni vanno trascritte solo su questi fogli, negli spazi appositamente riservati. Si può comunque usare il retro, purché sia chiaro il riferimento.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Tot

1) Si consideri la seguente relazione sull'insieme $\mathbf{Z} - \{0\}$ dei numeri interi diversi da 0.

$$R = \{\,(a, b) : a, b \in \mathbf{Z}, ab > 0\}.$$

Dire se è una relazione di tipo noto, motivandone la risposta. Quali sono gli elementi in relazione con -3?

2) Mostrare che $R = \{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (1,7), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (2,7), (3,5), (3,6), (3,7), (4,5), (4,6), (4,7), (5,6), (5,7)\}$ è una relazione d'ordine stretto sull'insieme $\{1,2,3,4,5,6,7\}$. Determinare gli elementi massimali, minimali, eventuali massimo, minimo, maggioranti, minoranti, estremo superiore o estremo inferiore del sottoinsieme $\{3,4,5\}$.

3) Dimostrare per induzione che, per $n \geq 4$, $n! > 2n+1$.

4) Si dica in quali strutture è vero il seguente enunciato

$$\forall v_0 \exists v_1 \exists v_2 ((v_0 \neq v_2) \wedge (v_2 \neq v_1))$$

5) Si dica, giustificando la risposta, se gli insiemi $\mathbf{N} \cup \{\sqrt{2}\}$ e $2\mathbf{N} \cup \{5, -1/2\}$ hanno la stessa cardinalità. (Nota: con $\mathbf{N}$ denotiamo l'insieme dei numeri naturali e con $2\mathbf{N}$ l'insieme dei numeri naturali multipli di 2.)

6) Siano A, B e C tre insiemi. Si definisca quando A e B hanno la stessa cardinalità. Quando invece $|B| \leq |C|$?

Se $|A| = |B|$ e $|B| \leq |C|$, si dica cosa si può concludere sulle cardinalità di A e di C e perché.

7) Si consideri la struttura $\mathfrak{N} = (\mathbf{N}, \{\equiv, \prec\}, \{\oplus, \otimes\}, \{\mathit{0}, \mathit{1}\})$, dove $\mathbf{N}$ denota l'insieme dei numeri naturali, $\equiv$ la relazione binaria di essere lo stesso numero, $\prec$, $\oplus$ e $\otimes$ rispettivamente l'ordine, l'addizione e la moltiplicazione tra numeri naturali, *0* e *1* i numeri zero e uno.

Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio adatto alla struttura i cui simboli propri siano i predicati $=, <$; i simboli per funzione $+$ e $\times$; i simboli per costante 0 e 1.

Nel linguaggio $\mathcal{L}$ si scriva una formula $\varphi(v_0, v_1)$ con le sole variabili libere indicate tale che $\mathfrak{N} \models \varphi(v_0, v_1)[a, b]$ se e solo se $b - 2a > 0$ e a è divisibile per 2 e per 5.

8) Dire che cosa significa che una formula è valida. Dire cosa significa che formula è non soddisfacibile. Dimostrare che, per ogni scelta delle formule α e β,

$$\models \beta \to \alpha \text{ se e solo se } \{\beta\} \cup \neg\alpha \text{ è non soddisfacibile}$$

9) In un linguaggio in cui c'è un simbolo di relazione unaria P e un simbolo di funzione binaria f, dire quali delle seguenti successioni di simboli sono formule (F), quali termini (T) e quali nulla (N); in quest'ultimo caso scrivere nell'ultima colonna una breve giustificazione.

	F	T	N	
$\forall v_0 \neg \wedge P f v_1 v_0$				
$P f v_1 v_2$				
$\wedge \forall v_1 P v_1 \neg P f v_0 v_1$				
$\wedge \forall v_0 P f v_1 v_0 \neg P v_0 f v_1 v_2$				
$\wedge \wedge f v_1 v_0 \neg P v_4 \neg \forall v_0 P f v_0 v_2$				
$\wedge \wedge P f v_1 v_2 \neg P v_3 \neg \forall v_1 P f v_1 v_3$				
$f f v_0 v_1 v_2$				

10) Dato l'insieme di coppie ordinate

$$\begin{aligned} g = & \{(x, x-x^2) : x \in \mathbf{N}, 0 < x+1 < 3\} \cup \\ & \cup \{(x, x-1) : x \in \mathbf{N}, 0 \leq x^2 - 1 \leq 20\} \cup \\ & \cup \{(x, 2x-7) : x \in \mathbf{N}, x > 5\} \cup \{(5,4), (3,2)\}, \end{aligned}$$

motivare perché g è una funzione da $\mathbf{N}$ in $\mathbf{N}$, precisando se è totale, suriettiva, iniettiva o biiettiva, giustificando le risposte.

Data poi la funzione $f = \{(0,3), (1,5), (3,1)\}$, scrivere quali sono le funzioni $h = f(g)$ e $k = g(f)$. Di esse precisare insieme di definizione e insieme immagine e se sono iniettive.

Università degli studi di Verona
Corsi di laurea in Informatica e in Tecnologie dell'Informazione
Prova scritta di Matematica di Base — 8 aprile 2005

matricola .... nome .... cognome ....

Sezione A B

Scrivere subito nome, cognome e numero di matricola, indicando la sezione di corso seguita. Le soluzioni vanno trascritte solo su questi fogli, negli spazi appositamente riservati. Si può comunque usare il retro, purché sia chiaro il riferimento.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Tot

1) Si consideri la seguente relazione sull'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi

$$R = \{\, (a,b) : a, b \in \mathbf{Z}, a - b \text{ è multiplo di } 8 \,\}.$$

Dire se si tratta di una relazione di tipo noto, motivando la risposta. Quali sono gli elementi $x \in \mathbf{Z}$ tali che $(5, x) \in R$? Quali sono gli elementi $x \in \mathbf{Z}$ tali che $(x, 5) \in R$?

2) Mostrare che $R = \{(a,c),(a,d),(a,e),(a,f),(b,c),(b,d),(b,e),(b,f),(c,d),(c,e),(c,f),(e,f)\}$ è una relazione d'ordine stretto sull'insieme $\{a,b,c,d,e,f,\}$. Determinare gli elementi massimali, minimali, eventuali massimo, minimo, maggioranti, minoranti, estremo superiore o estremo inferiore del sottoinsieme $\{c,d,e\}$.

3) Dimostrare per induzione una delle due formule seguenti (a scelta):

(1) per $n > 2$, $n! + n > 2^n$

(2) per $n \geq 0$, $\sum_{i=0}^{n} 2i = n^2 + n$

4) Si dica in quali strutture è vero il seguente enunciato:

$$\exists v_0 \exists v_1 \forall v_2 ((v_0 = v_2) \vee (\neg v_2 = v_1))$$

5) Si dica, giustificando la risposta, se gli insiemi $\mathbf{N} - \{3, 9\}$ e $3\mathbf{N} \cup \{7, 10, 11\}$ hanno la stessa cardinalità. (Nota: con $\mathbf{N}$ denotiamo l'insieme dei numeri naturali e con $3\mathbf{N}$ l'insieme dei numeri naturali multipli di 3.)

6) Si definisca quando due insiemi hanno la stessa cardinalità. Si enunci un criterio per verificare se $|A| = |B|$.

7) Si consideri la struttura $\mathfrak{N} = (\mathbf{N}, \{\equiv, \prec\}, \{\oplus, \otimes\}, \{\mathit{0}, \mathit{1}\})$, dove $\mathbf{N}$ denota l'insieme dei numeri naturali, $\equiv$ la relazione binaria di essere lo stesso numero, $\prec$, $\oplus$ e $\otimes$ rispettivamente l'ordine, l'addizione e la moltiplicazione tra numeri naturali, $\mathit{0}$ e $\mathit{1}$ i numeri zero e uno.

Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio adatto alla struttura i cui simboli propri siano i predicati $=, <$; i simboli per funzione $+$ e $\times$; i simboli per costante 0 e 1.

Nel linguaggio $\mathcal{L}$ si scriva una formula $\varphi(v_0, v_1)$ con le sole variabili libere indicate tale che $\mathfrak{N} \models \varphi(v_0, v_1)[a, b]$ se e solo se $a > 2b$ e $a + 3b$ è divisibile per 2 e per 3.

8) Dire che cosa significa che una formula è soddisfacibile. Dire cosa significa che una formula è conseguenza logica di un insieme di formule. Dimostrare che, per ogni scelta delle formule α e β,

$$\models \alpha \to \beta \text{ se e solo se } \{\alpha\} \cup \neg\beta \text{ è non soddisfacibile}$$

9) In un linguaggio in cui c'è un simbolo di relazione binaria P e un simbolo di funzione binaria f, dire quali delle seguenti successioni di simboli sono formule (F), quali termini (T) e quali nulla (N); in quest'ultimo caso scrivere nell'ultima colonna una breve giustificazione.

	F	T	N	
$\forall v_0 \neg \wedge P f v_1 v_0$				
$f v_1 f v_1 v_2$				
$f v_1 f v_2$				
$\wedge \forall v_1 P f v_1 v_0 v_3 \neg P v_0 v_1 v_2$				
$\wedge \forall v_0 P f v_1 v_0 v_3 \neg P v_0 f v_1 v_2$				
$\wedge \wedge f v_1 v_2 \neg P v_3 v_0 \neg \forall v_1 P f v_1 v_2 v_3$				
$\wedge \wedge P v_1 v_2 \neg P v_3 f v_0 v_4 \neg \forall v_1 P f v_1 v_2 v_3$				

10) Dato l'insieme di coppie ordinate

$$
\begin{aligned}
g = \{(x, x^2+2x) : x \in \mathbf{N}, x^2-1 < 10\} \cup \\
\cup \{(x, 4x+3) : x \in \mathbf{N}, 2 < x < 5\} \cup \\
\cup \{(x, x-5) : x \in \mathbf{N}, x > 5\} \cup \{(1,3), (7,2)\},
\end{aligned}
$$

motivare perché g è una funzione da $\mathbf{N}$ in $\mathbf{N}$, precisando se è totale, suriettiva, iniettiva o biiettiva, giustificando le risposte.

Data poi la funzione $f = \{(0,3), (2,3), (1,5)\}$, scrivere quali sono le funzioni $h = f(g)$ e $k = g(f)$. Di esse precisare insieme di definizione e insieme immagine e se sono iniettive.