

Sistemi a Tempo Reale

Informatica - Tiziano Villa

7 Luglio 2008

Nome e Cognome:

Matricola:

Posta elettronica:

problema	punti massimi	i tuoi punti
problema 1	13	
problema 2	10	
problema 3	7	
totale	30	

1. (a) Si enunci il teorema sulla relazione tra raffinamento e simulazione di una macchina a stati finiti nondeterministica da parte di una macchina a stati finiti pseudo-nondeterministica.

Traccia di soluzione.

Se M_2 e' pseudo-nondeterministica, M_1 e' simulata da M_2 se e solo se M_1 raffina M_2

- (b) Si enunci il teorema sulla relazione tra raffinamento e simulazione di una macchina a stati finiti nondeterministica da parte di una macchina a stati finiti nondeterministica.

Traccia di soluzione.

Se M_2 e' nondeterministica, M_1 e' simulata da M_2 implica M_1 raffina M_2 , ma M_1 raffina M_2 non implica che M_1 e' simulata da M_2 .

- (c) Si confrontino i due teoremi precedenti: le loro conclusioni sono le medesime ? Se non lo sono, se ne motivi la differenza.

Traccia di soluzione.

Nel primo caso, l'ipotesi più forte che M_2 sia pseudo-nondeterministica permette di stabilire una condizione necessaria e sufficiente, mentre nel secondo caso si ha solo una condizione sufficiente.

(d) Si considerino le due macchine a stati finiti seguenti:

Macchina M' :

- stati: s'_1, s'_2, s'_3 con s'_1 stato iniziale;
- transizione da s'_1 a s'_3 : $\bullet/1$,
transizione da s'_3 a s'_3 : $\bullet/\perp, \bullet/0, \bullet/1$,
transizione da s'_1 a s'_1 : \bullet/\perp ,
transizione da s'_1 a s'_2 : $\bullet/0$,
transizione da s'_2 a s'_2 : $\bullet/\perp, \bullet/0, \bullet/1$.

Macchina M'' :

- stati: s''_1, s''_2, s''_3 con s''_1 stato iniziale;
- transizione da s''_1 a s''_3 : $\bullet/1$,
transizione da s''_3 a s''_3 : $\bullet/\perp, \bullet/0, \bullet/1$,
transizione da s''_1 a s''_1 : $\bullet/0, \bullet/\perp$,
transizione da s''_1 a s''_2 : $\bullet/0$,
transizione da s''_2 a s''_2 : $\bullet/\perp, \bullet/0, \bullet/1$.

Si risponda in ordine alle seguenti domande (si indichi sempre il numerale romano in ogni risposta):

- i. Si disegnino i diagrammi di transizione delle due macchine.
- ii. Si classifichino le macchine rispetto al determinismo.

Traccia di soluzione.

M' e' pseudo-nondeterministica.

M'' e' nondeterministica, ma non pseudo-nondeterministica.

- iii. Si trovi una simulazione di M' da parte di M'' , se esiste; e' la simulazione massima (cioe' l'unione tra tutte le simulazioni di M' da parte di M'') ? Se no, si trovi la simulazione massima.

Traccia di soluzione.

M'' simula M' come mostrato dalla relazione:

$$R_{M'-M''} = \{(s'_1, s''_1), (s'_2, s''_2), (s'_3, s''_3)\}.$$

Un'altra relazione di simulazione per cui M'' simula M' e' la seguente:

$$R_{M'-M''} = \{(s'_1, s''_1), (s'_2, s''_2), (s'_2, s''_1), (s'_3, s''_3), (s'_2, s''_3)\}.$$

La simulazione massima e' $\mathcal{R}_{M'-M''} = \{(s'_1, s''_1), (s'_1, s''_2), (s'_1, s''_3), (s'_2, s''_1), (s'_2, s''_2), (s'_2, s''_3), (s'_3, s''_1), (s'_3, s''_2), (s'_3, s''_3)\}.$

- iv. Si trovi una simulazione di M'' da parte di M' , se esiste; e' la simulazione massima (cioe' l'unione tra tutte le simulazioni di M'' da parte di M') ? Se no, si trovi la simulazione massima.

Traccia di soluzione.

M' simula M'' come mostrato dalla relazione:

$$R_{M''-M'} = \{(s_1'', s_1'), (s_1'', s_2'), (s_2'', s_2'), (s_3'', s_3'), (s_3'', s_2')\}.$$

La simulazione massima e' $\mathcal{R}_{M''-M'} = \{(s_1'', s_1'), (s_1'', s_2'), (s_1'', s_3'), (s_2'', s_1'), (s_2'', s_2'), (s_2'', s_3'), (s_3'', s_1'), (s_3'', s_2'), (s_3'', s_3')\}$.

- v. Si trovi una bisimulazione tra le due macchine, se esiste; e' la bisimulazione massima (cioe' l'unione tra tutte le bisimulazioni di M' e M'') ? Se no, si trovi la bisimulazione massima.

Traccia di soluzione.

Diamo subito la bisimulazione massima $\mathcal{R}_{M'-M''} \cup \mathcal{R}_{M''-M'} = \{(s_1', s_1''), (s_1', s_2''), (s_1', s_3''), (s_2', s_1''), (s_2', s_2''), (s_2', s_3''), (s_3', s_1''), (s_3', s_2''), (s_3', s_3''), (s_1'', s_1'), (s_1'', s_2'), (s_1'', s_3'), (s_2'', s_1'), (s_2'', s_2'), (s_2'', s_3'), (s_3'', s_1'), (s_3'', s_2'), (s_3'', s_3')\}$.

- vi. Si minimizzi la macchina M' e si mostri il diagramma di transizione della macchina minimizzata cosi' trovata $\min(M')$.

Traccia di soluzione.

Si noti che gli stati della macchina minimizzata sono indicati tra $\{\}$ poiche' sono insiemi di stati della macchina originale.

I tre stati s_1', s_2', s_3' sono tutti equivalenti.

Definiamo \hat{s}_1' come il rappresentante della classe di equivalenza di s_1', s_2', s_3' .

Macchina $\det(M')$:

- stati: $\{\hat{s}_1'\}$ con $\{\hat{s}_1'\}$ stato iniziale;
- transizione da $\{\hat{s}_1'\}$ a $\{\hat{s}_1'\}$: $\bullet/\perp, \bullet/0, \bullet/1$.

- vii. Si determinizzi la macchina M'' e si mostri il diagramma di transizione della macchina deterministica cosi' trovata $\det(M'')$.

Traccia di soluzione.

Macchina $\det(M'')$:

- stati: $\{s_1''\}, \{s_1'', s_2''\}, \{s_2'', s_3''\}, \{s_3''\}$ con $\{s_1''\}$ stato iniziale;
- transizione da $\{s_1''\}$ a $\{s_1''\}$: \bullet/\perp ,
transizione da $\{s_1''\}$ a $\{s_1'', s_2''\}$: $\bullet/0$,
transizione da $\{s_1'', s_2''\}$ a $\{s_1'', s_2''\}$: $\bullet/0, \bullet/\perp$,

transizione da $\{s_1''\}$ a $\{s_3''\}$: $\bullet/1$,
 transizione da $\{s_3''\}$ a $\{s_3''\}$: $\bullet/\perp, \bullet/0, \bullet/1$,
 transizione da $\{s_1'', s_2''\}$ a $\{s_2'', s_3''\}$: $\bullet/1$,
 transizione da $\{s_2'', s_3''\}$ a $\{s_2'', s_3''\}$: $\bullet/\perp, \bullet/0, \bullet/1$.

- viii. Si minimizzi la macchina $\det(M'')$ e si mostri il diagramma di transizione della macchina minimizzata così trovata $\min(\det(M''))$.

Traccia di soluzione.

I quattro stati $\{s_1''\}$, $\{s_1'', s_2''\}$, $\{s_2'', s_3''\}$, $\{s_3''\}$ sono tutti equivalenti.

Definiamo \tilde{s}_1'' come il rappresentante della classe di equivalenza di $\{s_1''\}$, $\{s_1'', s_2''\}$, $\{s_2'', s_3''\}$, $\{s_3''\}$.

Macchina $\min(\det(M''))$:

- stati: $\{\tilde{s}_1''\}$ con $\{\tilde{s}_1''\}$ stato iniziale;
- transizione da $\{\tilde{s}_1''\}$ a $\{\tilde{s}_1''\}$: $\bullet/\perp, \bullet/0, \bullet/1$.

- ix. Si trovi una simulazione di $\min(M')$ da parte di $\min(\det(M''))$, se esiste; una simulazione di $\min(\det(M''))$ da parte di $\min(M')$, se esiste; una bisimulazione tra $\min(M')$ e $\min(\det(M''))$, se esiste.

Traccia di soluzione.

Le macchine $\min(M')$ e $\min(\det(M''))$ hanno ciascuna un unico stato con le medesime transizioni, quindi sono isomorfe.

- x. Si commentino i risultati precedenti.

Traccia di soluzione.

Le due macchine M' e M'' sono equivalenti e bisimili. Determinizzando M'' e minimizzando M' e $\det(M'')$ si ottengono due macchine $\min(M')$ e $\min(\det(M''))$ con grafi delle transizioni isomorfi.

Tutto ciò è consistente con il fatto che le due macchine iniziali M' e M'' generano il medesimo insieme che comprende tutte le possibili successioni sull'alfabeto $\bullet/\perp, \bullet/0, \bullet/1$ e che tale linguaggio si può generare con un solo stato.

.

.

.

2. Si consideri una palla che rimbalza. Al tempo $t = 0$, la palla e' lanciata verso l'alto da un'altezza $y(0) = 0$ metri con velocita' $\dot{y}(0) = v > 0$ metri/sec. Dopo aver raggiunto un'altezza massima cade liberamente seguendo la legge $\ddot{y}(t) = -g$, con $g = 10m/sec^2$ costante di gravita'. A un tempo successivo t_1 , la palla colpisce il suolo con una velocita' $\dot{y}(t_1) < 0$ metri al secondo e si produce un evento discreto *rimbalzo*. La collisione e' inelastica e la palla rimbalza con velocita' $\dot{y}(t) = -c\dot{y}(t_1)$, con $0 < c < 1$ costante. Poi la palla risale sino a una certa altezza e ricade di nuovo al suolo e cosi' ripetutamente.

(a) Si modelli il sistema come un automa ibrido e lo si descriva formalmente secondo la notazione usata in classe.

Traccia di soluzione.

- locazioni: $\{l_1\}$, dove l_1 e' la locazione iniziale con condizioni iniziali $y(0) := 0, \dot{y}(0) := v$;
- dinamica della locazione l_1 : $\ddot{y}(t) = -g$
- transizione da l_1 a l_1 : $A/rimbalzo, \dot{y}(t) := -c\dot{y}(t)$,
dove $A = \{(y(t), \dot{y}(t)) \mid y(t) = 0\}$ (la sintassi delle annotazioni di una transizione e' *guardia/uscita, azione*);
- ingresso assente perche' il sistema e' autonomo;
- uscita $e_u(t) \in \{rimbalzo, assente\}$,
uscita $y(t) \in Reali$.

- (b) Un automa ibrido si dice Zenoniano (da Zenone di Elea, filosofo della Magna Grecia) se una sua esecuzione puo' compiere un numero infinito di transizioni discrete in un tempo finito. Si studi se l'automa della palla rimbalzante e' Zenoniano. Si ricordi che si sono supposte le condizioni iniziali $y(0) = 0, \dot{y}(0) = v > 0$.

Traccia. Si calcoli il tempo tra due rimbalzi successivi e poi si sommi un numero infinito di rimbalzi. Si presti attenzione al fatto che c (la costante di rimbalzo usata nel riassegnamento sulle transizioni discrete $\dot{y}(t) := -c\dot{y}(t)$) e' un parametro che varia nell'intervallo $(0, 1)$.

Traccia di soluzione.

L'equazione del moto $y(t)$ della palla e'

$$y(t) = y(0) + \dot{y}(0)t - gt^2/2.$$

Sostituendo $y(0) = 0, \dot{y}(0) = v > 0$ si ha

$$y(t) = vt - gt^2/2.$$

Il tempo a cui avviene il primo rimbalzo al suolo si trova ponendo $y(t) = 0$ nella precedente equazione, cioe'

$$0 = vt - gt^2/2,$$

da cui $t = 2v/g$. La velocita' al momento dell'impatto sara' v (non si perde energia durante la parabola in aria); dopo il primo rimbalzo la velocita' sara' cv . Percio' il tempo tra il primo e il secondo rimbalzo sara' dato ponendo $y(t) = 0, y(0) = 0, \dot{y}(0) = cv > 0$ nell'equazione del moto, cioe'

$$0 = 0 + cvt - gt^2/2,$$

da cui $t = 2cv/g$. In generale il tempo intercorso tra il rimbalzo i -esimo e quello $(i + 1)$ -esimo e' dato da $t_{i+1} - t_i = 2c^i v/g$. Percio' la somma di tutti i tempi e' data da

$$\sum_{i=0}^{\infty} (t_{i+1} - t_i) = \sum_{i=0}^{\infty} 2c^i v/g = 2v/g \sum_{i=0}^{\infty} c^i = 2v/(1 - c)g,$$

applicando la formula della somma di una serie geometrica con ragione < 1 .

Tirando le somme, l'esecuzione ha un numero infinito di transizioni in un tempo finito e percio' il sistema e' Zenoniano. Si noti che se $c \geq 1$ il sistema non e' Zenoniano.

3. (a) Si spieghi il problema dell'inversione di priorit  nella schedulazione di processi e come si puo' affrontare.

Traccia di soluzione.

Si ha inversione di priorit  quando un processo a bassa priorit  blocca l'esecuzione di un processo ad alta priorit  perche' il primo tiene occupata una risorsa che serve al secondo. Ad es., ci siano due processi P1 (alta priorit ) e P2 (bassa priorit ) che usano entrambi il bus. Supponiamo che P1 divenga pronto quando P2 e' in esecuzione e sta usando il bus, allora il sistema operativo dara' il processore a P1 (alta priorit ) mettendo in coda P2 (bassa priorit ) che pero' mantiene il controllo del bus. Se P1 nella sua esecuzione richiede il bus non potra' ottenerlo perche' il bus e' detenuto da P2, il quale pero' non puo' essere fatto eseguire perche' ha una priorit  piu' bassa di P1.

Una soluzione e' quella di aumentare temporaneamente la priorit  di un processo quando richiede una risorsa (rispetto alla priorit  di altri processi che possano richiedere tale risorsa) in modo che possa terminare senza essere interrotto; quando ha finito, si assegna a tale processo di nuovo la priorit  originale.

(b) Dati i seguenti processi periodici qual e' l'intervallo piu' breve da esaminare per produrre un assegnamento (cioe' tale che un assegnamento su quell'intervallo sia estendibile periodicamente) ?

i. processo	tempo di esecuzione	periodo/scadenza
P1	1	2
P2	1	5
P3	2	10

Traccia di soluzione.

$$10 = \text{m.c.m.}(2,5,10).$$

ii. processo	tempo di esecuzione	periodo/scadenza
P1	1	2
P2	1	4
P3	2	5
P4	7	10

Traccia di soluzione.

$$20 = \text{m.c.m.}(2,4,5,10).$$

iii. processo	tempo di esecuzione	periodo/scadenza
P1	1	3
P2	1	4
P3	2	5
P4	2	6
P5	6	10

Traccia di soluzione.

$$60 = \text{m.c.m.}(3,4,5,6,10).$$