

Sistemi a Tempo Reale

Informatica - Tiziano Villa

26 Settembre 2008

Nome e Cognome:

Matricola:

Posta elettronica:

problema	punti massimi	i tuoi punti
problema 1	13	
problema 2	9	
problema 3	8	
totale	30	

1. (a) Si enunci il teorema sulla relazione tra raffinamento e simulazione di una macchina a stati finiti nondeterministica da parte di una macchina a stati finiti pseudo-nondeterministica.

Traccia di soluzione.

Se M_2 e' pseudo-nondeterministica, M_1 e' simulata da M_2 se e solo se M_1 raffina M_2

- (b) Si enunci il teorema sulla relazione tra raffinamento e simulazione di una macchina a stati finiti nondeterministica da parte di una macchina a stati finiti nondeterministica.

Traccia di soluzione.

Se M_2 e' nondeterministica, M_1 e' simulata da M_2 implica M_1 raffina M_2 , ma M_1 raffina M_2 non implica che M_1 e' simulata da M_2 .

(c) Si confrontino i due teoremi precedenti: le loro conclusioni sono le medesime ? Se non lo sono, se ne motivi la differenza.

Traccia di soluzione.

Nel primo caso, l'ipotesi più forte che M_2 sia pseudo-nondeterministica permette di stabilire una condizione necessaria e sufficiente, mentre nel secondo caso si ha solo una condizione sufficiente.

(d) Si considerino le due macchine a stati finiti seguenti:

Macchina M' :

- stati: s'_1, s'_2, s'_3 con s'_1 stato iniziale;
- transizione da s'_1 a s'_3 : $\bullet/1$,
- transizione da s'_3 a s'_3 : $\bullet/\perp, \bullet/0, \bullet/1$,
- transizione da s'_1 a s'_1 : \bullet/\perp ,
- transizione da s'_1 a s'_2 : $\bullet/0$,
- transizione da s'_2 a s'_2 : $\bullet/\perp, \bullet/0, \bullet/1$.

Macchina M'' :

- stati: s''_1, s''_2, s''_3 con s''_1 stato iniziale;
- transizione da s''_1 a s''_3 : $\bullet/1$,
- transizione da s''_3 a s''_3 : $\bullet/\perp, \bullet/0, \bullet/1$,
- transizione da s''_1 a s''_1 : $\bullet/0, \bullet/\perp$,
- transizione da s''_1 a s''_2 : $\bullet/0$,
- transizione da s''_2 a s''_2 : $\bullet/\perp, \bullet/0, \bullet/1$.

Si risponda in ordine alle seguenti domande (si indichi sempre il numerale romano in ogni risposta):

- i. Si disegnino i diagrammi di transizione delle due macchine.
- ii. Si classifichino le macchine rispetto al determinismo.

Traccia di soluzione.

M' e' pseudo-nondeterministica.

M'' e' nondeterministica, ma non pseudo-nondeterministica.

- iii. Si trovi una simulazione di M' da parte di M'' , se esiste; e' la simulazione massima (cioe' l'unione tra tutte le simulazioni di M' da parte di M'')? Se no, si trovi la simulazione massima.

Traccia di soluzione.

M'' simula M' come mostrato dalla relazione:

$$R_{M'-M''} = \{(s'_1, s''_1), (s'_2, s''_2), (s'_3, s''_3)\}.$$

Un'altra relazione di simulazione per cui M'' simula M' e' la seguente:

$$R_{M'-M''} = \{(s'_1, s''_1), (s'_2, s''_2), (s'_2, s''_1), (s'_3, s''_3), (s'_2, s''_3)\}.$$

La simulazione massima e' $\mathcal{R}_{M'-M''} = \{(s'_1, s''_1), (s'_1, s''_2), (s'_1, s''_3), (s'_2, s''_1), (s'_2, s''_2), (s'_2, s''_3), (s'_3, s''_1), (s'_3, s''_2), (s'_3, s''_3)\}.$

- iv. Si trovi una simulazione di M'' da parte di M' , se esiste; e' la simulazione massima (cioe' l'unione tra tutte le simulazioni di M'' da parte di M') ? Se no, si trovi la simulazione massima.

Traccia di soluzione.

M' simula M'' come mostrato dalla relazione:

$$R_{M''-M'} = \{(s''_1, s'_1), (s''_1, s'_2), (s''_2, s'_2), (s''_3, s'_3), (s''_3, s'_2)\}.$$

La simulazione massima e' $\mathcal{R}_{M''-M'} = \{(s''_1, s'_1), (s''_1, s'_2), (s''_1, s'_3), (s''_2, s'_1), (s''_2, s'_2), (s''_2, s'_3), (s''_3, s'_1), (s''_3, s'_2), (s''_3, s'_3)\}$.

- v. Si trovi una bisimulazione tra le due macchine, se esiste; e' la bisimulazione massima (cioe' l'unione tra tutte le bisimulazioni di M' e M'') ? Se no, si trovi la bisimulazione massima.

Traccia di soluzione.

Diamo subito la bisimulazione massima $\mathcal{R}_{M'-M''} \cup \mathcal{R}_{M''-M'} = \{(s'_1, s''_1), (s'_1, s''_2), (s'_1, s''_3), (s'_2, s''_1), (s'_2, s''_2), (s'_2, s''_3), (s'_3, s''_1), (s'_3, s''_2), (s'_3, s''_3), (s''_1, s'_1), (s''_1, s'_2), (s''_1, s'_3), (s''_2, s'_1), (s''_2, s'_2), (s''_2, s'_3), (s''_3, s'_1), (s''_3, s'_2), (s''_3, s'_3)\}$.

- vi. Si minimizzi la macchina M' e si mostri il diagramma di transizione della macchina minimizzata cosi' trovata $min(M')$.

Traccia di soluzione.

Si noti che gli stati della macchina minimizzata sono indicati tra $\{\}$ poiche' sono insiemi di stati della macchina originale.

I tre stati s'_1, s'_2, s'_3 sono tutti equivalenti.

Definiamo \hat{s}'_1 come il rappresentante della classe di equivalenza di s'_1, s'_2, s'_3 .

Macchina $det(M')$:

- stati: $\{\hat{s}'_1\}$ con $\{\hat{s}'_1\}$ stato iniziale;
- transizione da $\{\hat{s}'_1\}$ a $\{\hat{s}'_1\}$: $\bullet/\perp, \bullet/0, \bullet/1$.

- vii. Si determinizzi la macchina M'' e si mostri il diagramma di transizione della macchina deterministica cosi' trovata $det(M'')$.

Traccia di soluzione.

Macchina $det(M'')$:

- stati: $\{s''_1\}, \{s''_1, s''_2\}, \{s''_2, s''_3\}, \{s''_3\}$ con $\{s''_1\}$ stato iniziale;
- transizione da $\{s''_1\}$ a $\{s''_1\}$: \bullet/\perp ,
- transizione da $\{s''_1\}$ a $\{s''_1, s''_2\}$: $\bullet/0$,
- transizione da $\{s''_1, s''_2\}$ a $\{s''_1, s''_2\}$: $\bullet/0, \bullet/\perp$,

- transizione da $\{s_1''\}$ a $\{s_3''\}$: $\bullet/1$,
- transizione da $\{s_3''\}$ a $\{s_3''\}$: $\bullet/\perp, \bullet/0, \bullet/1$,
- transizione da $\{s_1'', s_2''\}$ a $\{s_2'', s_3''\}$: $\bullet/1$,
- transizione da $\{s_2'', s_3''\}$ a $\{s_2'', s_3''\}$: $\bullet/\perp, \bullet/0, \bullet/1$.

viii. Si minimizzi la macchina $det(M'')$ e si mostri il diagramma di transizione della macchina minimizzata così trovata $min(det(M''))$.

Traccia di soluzione.

I quattro stati $\{s_1''\}, \{s_1'', s_2''\}, \{s_2'', s_3''\}, \{s_3''\}$ sono tutti equivalenti.

Definiamo \tilde{s}_1'' come il rappresentante della classe di equivalenza di $\{s_1''\}, \{s_1'', s_2''\}, \{s_2'', s_3''\}, \{s_3''\}$.

Macchina $min(det(M''))$:

- stati: $\{\tilde{s}_1''\}$ con $\{\tilde{s}_1''\}$ stato iniziale;
- transizione da $\{\tilde{s}_1''\}$ a $\{\tilde{s}_1''\}$: $\bullet/\perp, \bullet/0, \bullet/1$.

ix. Si trovi una simulazione di $min(M')$ da parte di $min(det(M''))$, se esiste; una simulazione di $min(det(M''))$ da parte di $min(M')$, se esiste; una bisimulazione tra $min(M')$ e $min(det(M''))$, se esiste.

Traccia di soluzione.

Le macchine $min(M')$ e $min(det(M''))$ hanno ciascuna un unico stato con le medesime transizioni, quindi sono isomorfe.

x. Si commentino i risultati precedenti.

Traccia di soluzione.

Le due macchine M' e M'' sono equivalenti e bisimili. Determinizzando M'' e minimizzando M' e $det(M'')$ si ottengono due macchine $min(M')$ e $min(det(M''))$ con grafi delle transizioni isomorfi.

Tutto ciò è consistente con il fatto che le due macchine iniziali M' e M'' generano il medesimo insieme che comprende tutte le possibili successioni sull'alfabeto $\bullet/\perp, \bullet/0, \bullet/1$ e che tale linguaggio si può generare con un solo stato.

.

2. Si consideri una palla che rimbalza. Al tempo $t = 0$, la palla è lanciata verso l'alto da un'altezza $y(0) = 0$ metri con velocità $\dot{y}(0) = v > 0$ metri/sec. Dopo aver raggiunto un'altezza massima cade liberamente seguendo la legge $\ddot{y}(t) = -g$, con $g = 10m/sec^2$ costante di gravità. A un tempo successivo t_1 , la palla colpisce il suolo con una velocità $\dot{y}(t_1) < 0$ metri al secondo e si produce un evento discreto *rimbalzo*. La collisione è inelastica e la palla rimbalza con velocità $\dot{y}(t) = -c\dot{y}(t_1)$, con $0 < c < 1$ costante. Poi la palla risale sino a una certa altezza e ricade di nuovo al suolo e così ripetutamente.

(a) Si modelli il sistema come un automa ibrido e lo si descriva formalmente secondo la notazione usata in classe.

Traccia di soluzione.

- locazioni: $\{l_1\}$, dove l_1 è la locazione iniziale con condizioni iniziali $y(0) := 0, \dot{y}(0) := v$;
- dinamica della locazione l_1 : $\ddot{y}(t) = -g$
- transizione da l_1 a l_1 : $A/rimbalzo, \dot{y}(t) := -c\dot{y}(t)$,
dove $A = \{(y(t), \dot{y}(t)) \mid y(t) = 0\}$ (la sintassi delle annotazioni di una transizione è *guardia/uscita, azione*);
- ingresso assente perché il sistema è autonomo;
- uscita $e_u(t) \in \{rimbalzo, assente\}$,
uscita $y(t) \in Reali$.

(b) Si disegnino qualitativamente i grafici delle variabili di stato $y(t)$ (che rappresenta lo spostamento) e $\dot{y}(t)$ (che rappresenta la velocità).

(c) Sia t_n il tempo in cui la palla tocca il suolo per l'ennesima volta, e sia $\dot{y}(t_n)$ la sua velocità a tale tempo.

- i. Si trovi una relazione tra $\dot{y}(t_{n+1})$ e $\dot{y}(t_n)$, e poi si calcoli $\dot{y}(t_n)$ in funzione di $\dot{y}(t_0 = 0) = v$.
- ii. Si ottenga t_n in funzione di $\dot{y}(t_0 = 0) = v$.
- iii. Si calcoli l'altezza massima raggiunta dalla palla dopo ogni rimbalzo. Traccia di soluzione.

Si calcoli l'altezza massima raggiunta dopo il lancio iniziale (raggiunta al tempo a cui si azzerava la velocità) e poi si generalizzi tale risultato.

Per calcolare la massima altezza raggiunta dopo il lancio iniziale serve il tempo a cui si azzerava la velocità, che si ottiene dall'equazione della velocità

$$\dot{y}(t) = \dot{y}(0) - gt,$$

ponendo $y(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = v$, da cui

$$0 = v - gt,$$

che da' $t = v/g$. Sostituendo tale tempo nell'equazione di $y(t)$ che è

$$y(t) = y(0) + \dot{y}(0)t - gt^2/2,$$

si ottiene l'altezza massima $H_M = 0 + vv/g - (g/2)(v/g)^2 = v^2/g - v^2/(2g) = v^2/(2g)$.

In generale dopo l'ennesimo rimbalzo al tempo t_n , si ha

$$H_M(t_n) = (c^n v)^2/2g.$$

.

3. (a) i. Si enunci il teorema di schedulabilita' per l'algorithmo RM.

Traccia di soluzione.

Un insieme di n processi periodici e' schedulabile con l'algorithmo RM se

$$\sum_{i=1}^n C_i/T_i \leq n(2^{1/n} - 1).$$

ii. Si enunci il teorema di schedulabilita' per l'algorithmo RM ottenuto mediante il limite iperbolico (Hyperbolic Bound).

Traccia di soluzione.

Un insieme di n processi periodici e' schedulabile con l'algorithmo RM se

$$\prod_{i=1}^n (C_i/T_i + 1) \leq 2.$$

iii. Si enunci il teorema di schedulabilita' per l'algorithmo EDF.

Traccia di soluzione.

Un insieme di n processi periodici e' schedulabile con l'algorithmo EDF se e solo se

$$\sum_{i=1}^n (C_i/T_i) \leq 1.$$

iv. Nel caso di due processi, si disegnino qualitativamente le regioni di schedulabilita' e si commenti il grafico risultante.

Traccia di soluzione.

Si rinvia alle dispense per i grafici. L'asse delle ascisse corrisponde a $U_1 = C_1/T_1$, quello delle ordinate a $U_2 = C_2/T_2$.

La regione di schedulabilita' secondo il primo teorema e' limitata dalla retta che interseca gli assi U_1 e U_2 in $2(2^{1/2} - 1) \approx 0,828$.

La regione di schedulabilita' secondo il secondo teorema (limite iperbolico) e' limitata dall'iperbole che interseca gli assi U_1 e U_2 in 1 ed e' tangente in un punto mediano alla retta del punto precedente.

La regione di schedulabilita' secondo il terzo teorema (algorithmo EDF) e' limitata dalla retta che interseca gli assi U_1 e U_2 in 1.

L'analisi dei contenimenti tra queste regioni illustra la validita' rispettiva dei due criteri sufficienti per RM e del criterio necessario/sufficiente per EDF.

(b) Si considerino i seguenti processi:

i. processo	tempo di esecuzione	periodo/scadenza
P1	4	200
P2	1	10
P3	2	40
P4	6	50

Si trovi un assegnamento secondo l'algoritmo RM. Si potrebbe aggiungere un altro processo P0 con gli stessi parametri di P1 e soddisfare ancora le scadenze usando l'algoritmo RM ? Si mostri tale estensione, se esiste.

Traccia di soluzione.

Poiche' $m.c.m.(200, 10, 40, 50) = 200$, si deve analizzare l'assegnamento per 200 unita' di tempo. L'applicazione dell'algoritmo RM produce il seguente assegnamento:

```
P1 - - - - - X - X X X - - - - -
P2 X . . - - - - - |X - - - - - |X - - - - - |X - - - - - |
P3 - X X - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
P4 - - - X X X X X X - - - - -
```

```
P1 - - - - -
P2 X . . - - - - - |X - - - - - |X - - - - - |X - - - - - |
P3 - X X - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
P4 - - - - - |X X X X X X - - - - -
```

```
P1 - - - - -
P2 X . . - - - - - |X - - - - - |X - - - - - |X - - - - - |
P3 - X X - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
P4 - - - - - |X X X X X X - - - - -
```

```
P1 - - - - -
P2 X . . - - - - - |X - - - - - |X - - - - - |X - - - - - |
P3 - X X - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
P4 - - - - - |X X X X X X - - - - -
```

```
P1 - - - - -
P2 X . . - - - - - |X - - - - - |X - - - - - |X - - - - - |
P3 - X X - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
P4 - - - - - |X X X X X X - - - - -
```

Si noti che la condizione sufficiente di schedulabilita' con l'algoritmo RM e' abbondantemente soddisfatta e lo e' pure se si aggiunge un altro processo P0 con gli stessi parametri di P1. L'estensione segue (si mostra solo la parte interessante):

```
P0 - - - - - X X X X - - - - -
P1 - - - - - X - X X X - - - - -
P2 X . . - - - - - |X - - - - - |X - - - - - |X - - - - - |
P3 - X X - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
P4 - - - X X X X X X - - - - -
...
```