

Sistemi a Tempo Reale

Informatica - Tiziano Villa

26 Settembre 2008

Nome e Cognome:

Matricola:

Posta elettronica:

problema	punti massimi	i tuoi punti
problema 1	13	
problema 2	9	
problema 3	8	
totale	30	

1. (a) Si enunci il teorema sulla relazione tra raffinamento e simulazione di una macchina a stati finiti nondeterministica da parte di una macchina a stati finiti pseudo-nondeterministica.

Traccia di soluzione.

Se M_2 e' pseudo-nondeterministica, M_1 e' simulata da M_2 se e solo se M_1 raffina M_2

- (b) Si enunci il teorema sulla relazione tra raffinamento e simulazione di una macchina a stati finiti nondeterministica da parte di una macchina a stati finiti nondeterministica.

Traccia di soluzione.

Se M_2 e' nondeterministica, M_1 e' simulata da M_2 implica M_1 raffina M_2 , ma M_1 raffina M_2 non implica che M_1 e' simulata da M_2 .

- (c) Si confrontino i due teoremi precedenti: le loro conclusioni sono le medesime ? Se non lo sono, se ne motivi la differenza.

Traccia di soluzione.

Nel primo caso, l'ipotesi più forte che M_2 sia pseudo-nondeterministica permette di stabilire una condizione necessaria e sufficiente, mentre nel secondo caso si ha solo una condizione sufficiente.

(d) Si considerino le due macchine a stati finiti seguenti:

Macchina M' :

- stati: s'_1, s'_2, s'_3 con s'_1 stato iniziale;
- transizione da s'_1 a s'_3 : $\bullet/1$,
transizione da s'_3 a s'_3 : $\bullet/\perp, \bullet/0, \bullet/1$,
transizione da s'_1 a s'_1 : \bullet/\perp ,
transizione da s'_1 a s'_2 : $\bullet/0$,
transizione da s'_2 a s'_2 : $\bullet/\perp, \bullet/0, \bullet/1$.

Macchina M'' :

- stati: s''_1, s''_2, s''_3 con s''_1 stato iniziale;
- transizione da s''_1 a s''_3 : $\bullet/1$,
transizione da s''_3 a s''_3 : $\bullet/\perp, \bullet/0, \bullet/1$,
transizione da s''_1 a s''_1 : $\bullet/0, \bullet/\perp$,
transizione da s''_1 a s''_2 : $\bullet/0$,
transizione da s''_2 a s''_2 : $\bullet/\perp, \bullet/0, \bullet/1$.

Si risponda in ordine alle seguenti domande (si indichi sempre il numerale romano in ogni risposta):

- i. Si disegnino i diagrammi di transizione delle due macchine.
- ii. Si classifichino le macchine rispetto al determinismo.
Traccia di soluzione.
 M' e' pseudo-nondeterministica.
 M'' e' nondeterministica, ma non pseudo-nondeterministica.
- iii. Si trovi una simulazione di M' da parte di M'' , se esiste; e' la simulazione massima (cioe' l'unione tra tutte le simulazioni di M' da parte di M'') ? Se no, si trovi la simulazione massima.

Traccia di soluzione.

M'' simula M' come mostrato dalla relazione:

$$R_{M'-M''} = \{(s'_1, s''_1), (s'_2, s''_2), (s'_3, s''_3)\}.$$

Un'altra relazione di simulazione per cui M'' simula M' e' la seguente:

$$R_{M'-M''} = \{(s'_1, s''_1), (s'_2, s''_2), (s'_2, s''_1), (s'_3, s''_3), (s'_2, s''_3)\}.$$

La simulazione massima e' $\mathcal{R}_{M'-M''} = \{(s'_1, s''_1), (s'_1, s''_2), (s'_1, s''_3), (s'_2, s''_1), (s'_2, s''_2), (s'_2, s''_3), (s'_3, s''_1), (s'_3, s''_2), (s'_3, s''_3)\}.$

- iv. Si trovi una simulazione di M'' da parte di M' , se esiste; e' la simulazione massima (cioe' l'unione tra tutte le simulazioni di M'' da parte di M') ? Se no, si trovi la simulazione massima.

Traccia di soluzione.

M' simula M'' come mostrato dalla relazione:

$$R_{M''-M'} = \{(s_1'', s_1'), (s_1'', s_2'), (s_2'', s_2'), (s_3'', s_3'), (s_3'', s_2')\}.$$

La simulazione massima e' $\mathcal{R}_{M''-M'} = \{(s_1'', s_1'), (s_1'', s_2'), (s_1'', s_3'), (s_2'', s_1'), (s_2'', s_2'), (s_2'', s_3'), (s_3'', s_1'), (s_3'', s_2'), (s_3'', s_3')\}$.

- v. Si trovi una bisimulazione tra le due macchine, se esiste; e' la bisimulazione massima (cioe' l'unione tra tutte le bisimulazioni di M' e M'') ? Se no, si trovi la bisimulazione massima.

Traccia di soluzione.

Diamo subito la bisimulazione massima $\mathcal{R}_{M'-M''} \cup \mathcal{R}_{M''-M'} = \{(s_1', s_1''), (s_1', s_2''), (s_1', s_3''), (s_2', s_1''), (s_2', s_2''), (s_2', s_3''), (s_3', s_1''), (s_3', s_2''), (s_3', s_3''), (s_1'', s_1'), (s_1'', s_2'), (s_1'', s_3'), (s_2'', s_1'), (s_2'', s_2'), (s_2'', s_3'), (s_3'', s_1'), (s_3'', s_2'), (s_3'', s_3')\}$.

- vi. Si minimizzi la macchina M' e si mostri il diagramma di transizione della macchina minimizzata cosi' trovata $\min(M')$.

Traccia di soluzione.

Si noti che gli stati della macchina minimizzata sono indicati tra $\{\}$ poiche' sono insiemi di stati della macchina originale.

I tre stati s_1', s_2', s_3' sono tutti equivalenti.

Definiamo \hat{s}_1' come il rappresentante della classe di equivalenza di s_1', s_2', s_3' .

Macchina $\det(M')$:

- stati: $\{\hat{s}_1'\}$ con $\{\hat{s}_1'\}$ stato iniziale;
- transizione da $\{\hat{s}_1'\}$ a $\{\hat{s}_1'\}$: $\bullet/\perp, \bullet/0, \bullet/1$.

- vii. Si determinizzi la macchina M'' e si mostri il diagramma di transizione della macchina deterministica cosi' trovata $\det(M'')$.

Traccia di soluzione.

Macchina $\det(M'')$:

- stati: $\{s_1''\}, \{s_1'', s_2''\}, \{s_2'', s_3''\}, \{s_3''\}$ con $\{s_1''\}$ stato iniziale;
- transizione da $\{s_1''\}$ a $\{s_1''\}$: \bullet/\perp ,
transizione da $\{s_1''\}$ a $\{s_1'', s_2''\}$: $\bullet/0$,
transizione da $\{s_1'', s_2''\}$ a $\{s_1'', s_2''\}$: $\bullet/0, \bullet/\perp$,

transizione da $\{s_1''\}$ a $\{s_3''\}$: $\bullet/1$,
 transizione da $\{s_3''\}$ a $\{s_3''\}$: $\bullet/\perp, \bullet/0, \bullet/1$,
 transizione da $\{s_1'', s_2''\}$ a $\{s_2'', s_3''\}$: $\bullet/1$,
 transizione da $\{s_2'', s_3''\}$ a $\{s_2'', s_3''\}$: $\bullet/\perp, \bullet/0, \bullet/1$.

- viii. Si minimizzi la macchina $\det(M'')$ e si mostri il diagramma di transizione della macchina minimizzata così trovata $\min(\det(M''))$.

Traccia di soluzione.

I quattro stati $\{s_1''\}$, $\{s_1'', s_2''\}$, $\{s_2'', s_3''\}$, $\{s_3''\}$ sono tutti equivalenti.

Definiamo \tilde{s}_1'' come il rappresentante della classe di equivalenza di $\{s_1''\}$, $\{s_1'', s_2''\}$, $\{s_2'', s_3''\}$, $\{s_3''\}$.

Macchina $\min(\det(M''))$:

- stati: $\{\tilde{s}_1''\}$ con $\{\tilde{s}_1''\}$ stato iniziale;
- transizione da $\{\tilde{s}_1''\}$ a $\{\tilde{s}_1''\}$: $\bullet/\perp, \bullet/0, \bullet/1$.

- ix. Si trovi una simulazione di $\min(M')$ da parte di $\min(\det(M''))$, se esiste; una simulazione di $\min(\det(M''))$ da parte di $\min(M')$, se esiste; una bisimulazione tra $\min(M')$ e $\min(\det(M''))$, se esiste.

Traccia di soluzione.

Le macchine $\min(M')$ e $\min(\det(M''))$ hanno ciascuna un unico stato con le medesime transizioni, quindi sono isomorfe.

- x. Si commentino i risultati precedenti.

Traccia di soluzione.

Le due macchine M' e M'' sono equivalenti e bisimili. Determinizzando M'' e minimizzando M' e $\det(M'')$ si ottengono due macchine $\min(M')$ e $\min(\det(M''))$ con grafi delle transizioni isomorfi.

Tutto ciò è consistente con il fatto che le due macchine iniziali M' e M'' generano il medesimo insieme che comprende tutte le possibili successioni sull'alfabeto $\bullet/\perp, \bullet/0, \bullet/1$ e che tale linguaggio si può generare con un solo stato.

.

.

.

2. Si consideri una palla che rimbalza. Al tempo $t = 0$, la palla e' lanciata verso l'alto da un'altezza $y(0) = 0$ metri con velocita' $\dot{y}(0) = v > 0$ metri/sec. Dopo aver raggiunto un'altezza massima cade liberamente seguendo la legge $\ddot{y}(t) = -g$, con $g = 10m/sec^2$ costante di gravita'. A un tempo successivo t_1 , la palla colpisce il suolo con una velocita' $\dot{y}(t_1) < 0$ metri al secondo e si produce un evento discreto *rimbalzo*. La collisione e' inelastica e la palla rimbalza con velocita' $\dot{y}(t) = -c\dot{y}(t_1)$, con $0 < c < 1$ costante. Poi la palla risale sino a una certa altezza e ricade di nuovo al suolo e cosi' ripetutamente.

- (a) Si modelli il sistema come un automa ibrido e lo si descriva formalmente secondo la notazione usata in classe.

Traccia di soluzione.

- locazioni: $\{l_1\}$, dove l_1 e' la locazione iniziale con condizioni iniziali $y(0) := 0, \dot{y}(0) := v$;
- dinamica della locazione l_1 : $\ddot{y}(t) = -g$
- transizione da l_1 a l_1 : $A/rimbalzo, \dot{y}(t) := -c\dot{y}(t)$,
dove $A = \{(y(t), \dot{y}(t)) \mid y(t) = 0\}$ (la sintassi delle annotazioni di una transizione e' *guardia/uscita, azione*);
- ingresso assente perche' il sistema e' autonomo;
- uscita $e_u(t) \in \{rimbalzo, assente\}$,
uscita $y(t) \in Reali$.

- (b) Si disegnino qualitativamente i grafici delle variabili di stato $y(t)$ (che rappresenta lo spostamento) e $\dot{y}(t)$ (che rappresenta la velocità).

(c) Sia t_n il tempo in cui la palla tocca il suolo per l'ennesima volta, e sia $\dot{y}(t_n)$ la sua velocità a tale tempo.

- i. Si trovi una relazione tra $\dot{y}(t_{n+1})$ e $\dot{y}(t_n)$, e poi si calcoli $\dot{y}(t_n)$ in funzione di $\dot{y}(t_0 = 0) = v$.
- ii. Si ottenga t_n in funzione di $\dot{y}(t_0 = 0) = v$.
- iii. Si calcoli l'altezza massima raggiunta dalla palla dopo ogni rimbalzo. Traccia di soluzione.

Si calcoli l'altezza massima raggiunta dopo il lancio iniziale (raggiunta al tempo a cui si azzerà la velocità) e poi si generalizzi tale risultato.

Per calcolare la massima altezza raggiunta dopo il lancio iniziale serve il tempo a cui si azzerà la velocità, che si ottiene dall'equazione della velocità

$$\dot{y}(t) = \dot{y}(0) - gt,$$

ponendo $y(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = v$, da cui

$$0 = v - gt,$$

che dà $t = v/g$. Sostituendo tale tempo nell'equazione di $y(t)$ che è

$$y(t) = y(0) + \dot{y}(0)t - gt^2/2,$$

si ottiene l'altezza massima $H_M = 0 + vv/g - (g/2)(v/g)^2 = v^2/g - v^2/(2g) = v^2/(2g)$.

In generale dopo l'ennesimo rimbalzo al tempo t_n , si ha

$$H_M(t_n) = (c^n v)^2/2g.$$

.

3. (a) i. Si enunci il teorema di schedulabilita' per l'algoritmo RM.

Traccia di soluzione.

Un insieme di n processi periodici e' schedulabile con l'algoritmo RM se

$$\sum_{i=1}^n C_i/T_i \leq n(2^{1/n} - 1).$$

- ii. Si enunci il teorema di schedulabilita' per l'algoritmo RM ottenuto mediante il limite iperbolico (Hyperbolic Bound).

Traccia di soluzione.

Un insieme di n processi periodici e' schedulabile con l'algoritmo RM se

$$\prod_{i=1}^n (C_i/T_i + 1) \leq 2.$$

- iii. Si enunci il teorema di schedulabilita' per l'algoritmo EDF.

Traccia di soluzione.

Un insieme di n processi periodici e' schedulabile con l'algoritmo EDF se e solo se

$$\sum_{i=1}^n (C_i/T_i) \leq 1.$$

- iv. Nel caso di due processi, si disegnino qualitativamente le regioni di schedulabilita' e si commenti il grafico risultante.

Traccia di soluzione.

Si rinvia alle dispense per i grafici. L'asse delle ascisse corrisponde a $U_1 = C_1/T_1$, quello delle ordinate a $U_2 = C_2/T_2$.

La regione di schedulabilita' secondo il primo teorema e' limitata dalla retta che interseca gli assi U_1 e U_2 in $2(2^{1/2} - 1) \approx 0,828$.

La regione di schedulabilita' secondo il secondo teorema (limite iperbolico) e' limitata dall'iperbole che interseca gli assi U_1 e U_2 in 1 ed e' tangente in un punto mediano alla retta del punto precedente.

La regione di schedulabilita' secondo il terzo teorema (algoritmo EDF) e' limitata dalla retta che interseca gli assi U_1 e U_2 in 1.

L'analisi dei contenimenti tra queste regioni illustra la validita' rispettiva dei due criteri sufficienti per RM e del criterio necessario/sufficiente per EDF.

(b) Si considerino i seguenti processi:

i. processo	tempo di esecuzione	periodo/scadenza
P1	4	200
P2	1	10
P3	2	40
P4	6	50

Si trovi un assegnamento secondo l'algoritmo RM. Si potrebbe aggiungere un altro processo P0 con gli stessi parametri di P1 e soddisfare ancora le scadenze usando l'algoritmo RM ? Si mostri tale estensione, se esiste.

Traccia di soluzione.

Poiché $m.c.m.(200, 10, 40, 50) = 200$, si deve analizzare l'assegnamento per 200 unità di tempo. L'applicazione dell'algoritmo RM produce il seguente assegnamento:

[illegible]

```
P1 - - - - - - - - - |X - - - - - - - - - |X - - - - - - - - - |
P2 X . . - - - - - |X - - - - - - - - - |X - - - - - - - - - |
P3 - X X - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - |
P4 - - - - - - - - - |- X X X X X X X - - - - - - - - - - - -
```

P1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
P2	X	.	.	-	-	-	-	-	X	-	-	-	-	-	-	X	-	-	-	-
P3	-	X	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
P4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	X	X	X	X	X

[illegible][illegible]

Si noti che la condizione sufficiente di schedulabilit  con l'algoritmo RM   abbondantemente soddisfatta e lo   pure se si aggiunge un altro processo P0 con gli stessi parametri di P1. L'estensione segue (si mostra solo la parte interessante):

[illegible]