Correzione del compito

19 Giugno 2006

Compito A

Esercizio 1. Si consideri la seguente relazione sull'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi.

$$R = \{ ((a, b) : a, b \in \mathbb{Z}, 4a - b \text{ è multiplo di } 3\}.$$

Dire se è una relazione di tipo noto, motivandone la risposta. Qual'è la classe d'equivalenza di 0?

Soluzione.

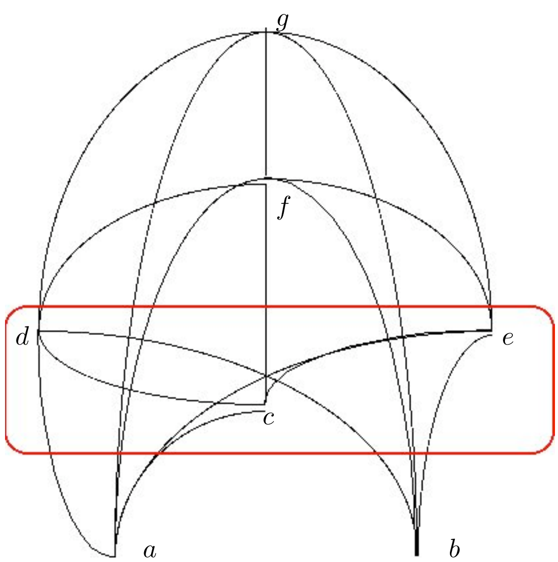
Mostriamo che la relazione R è di equivalenza.

1. • *Proprietà riflessiva*
   Sia $a \in \mathbb{Z}$, allora $(a, a) \in R$, infatti $4a - a = 3a$ che è multiplo di 3.
   • *Proprietà simmetrica*
   Sia $(a, b) \in R$ cioè esiste un $w \in \mathbb{Z}$ tale che $4a - b = 3w$. Consideriamo questa relazione e moltiplichiamo ambo i membri per 4, ottenendo $16a - 4b = 12w$, cioè $(4b - a) - 15a = -12w$ e quindi $4b - a = 3(5a - 4w)$. Di conseguenza $4b - a$ è multiplo di 3.
   • *Proprietà transitiva*
   Siano (a, b), $(b, c) \in R$, cioè esistono $w, v \in \mathbb{Z}$ tali che $4a - b = 3w$ e $4b - c = 3v$. Sommando tali espressioni membro a membro si ha che $4a - c = 3(w + v - b)$ e quindi $(a, c) \in R$.

2. La classe di equivalenza di 0 è $[0]_R = \{b | \ (0, b) \in R\}$, cioè $\{b | \ -b \text{ è multiplo di } 3\}$ cioè $[0]_R$ è formata dagli elementi $b \in \mathbb{Z}$ che sono multipli di 3.

Esercizio 2. Mostrare che $R = \{(a, c), (a, d), (a, e), (a, f), (a, g), (b, d), (b, e), (b, f), (b, g), (c, d), (c, e), (c, f), (c, g), (d, f), (d, g), (e, f), (e, g), (f, g)\}$ è una relazione d'ordine stretto sull'insieme $\{a, b, c, d, e, f, g\}$. Determinare gli elementi massimali, minimali, eventuali massimo, minimo, maggioranti, minoranti, estremo superiore o estremo inferiore del sottoinsieme $\{c, d, e\}$.

Soluzione.



Mostriamo che la relazione R è di ordine stretto.

1. • *Proprietà antiriflessiva*
   R è antiriflessiva, poichè il grafo non presenta lacci.
   • *Proprietà transitiva*
   R è transitiva, ad esempio $(a,c),(c,d) \to (a,d)$, $(b,e),(e,f) \to (b,f)$.
   Quindi R è relazione di ordine stretto.

2.

massimali	$\{d,e\}$	minimali	$\{c\}$
maggioranti	$\{f,g\}$	minoranti	$\{a,c\}$
sup	$\{\phi\}$	inf	$\{c\}$
max	$\emptyset$	min	$\{c\}$

Esercizio 3. Dimostrare per induzione che, per $n \geq 0$, $\Sigma_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} = \frac{2^{n+1}-1}{2^n}$.
Soluzione.

1. *Passo base.* $\sum_{i=0}^{0} \frac{1}{2^i} = 1$ e $\frac{2^{0+1}-1}{2^0} = 1$.
2. *Passo induttivo.* $\sum_{i=0}^{n+1} \frac{1}{2^i} = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{2^{n+1}-1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{2^{n+2}-1}{2^{n+1}}$.

Esercizio 4. Si dica, giustificando la risposta, se gli insiemi $3\mathbb{N} \cup \{\sqrt{2}\pi\}$ e $2\mathbb{N} \setminus \{2,6\}$ hanno la stessa cardinalità. (Nota: con $3\mathbb{N}$ denotiamo l'insieme dei numeri naturali multipli di 3 e con $2\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali multipli di 2.)
Soluzione.
Per dimostrare che $3\mathbb{N} \cup \{\sqrt{2}\pi\}$ e $2\mathbb{N} \setminus \{2,6\}$ hanno la stessa cardinalità esibiamo una biiezione tre di essi. La funzione $f : 3\mathbb{N} \cup \{\sqrt{2}\pi\} \longrightarrow 2\mathbb{N} \setminus \{2,6\}$, definita come segue

$$f(n) = \begin{cases} 0, & n = \sqrt{2}\pi \\ 4, & n = 0 \\ \dfrac{2}{3}n + 6, & n \geq 3 \end{cases}$$

è una possibile biiezione di $3\mathbb{N} \cup \{\sqrt{2}\pi\}$ in $2\mathbb{N} \setminus \{2,6\}$.

Esercizio 5. Si definisca quando due insiemi A e B hanno la stessa cardinalità.
Sia $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali, $P(\mathbb{N})$ l'insieme delle parti di $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali. Cosa si puó dire della cardinalità di $\mathbb{N}$ e di $P(\mathbb{N})$? E della cardinalità di $\mathbb{R}$ e $P(\mathbb{N})$?
Si giustifichino le risposte.
Soluzione.

Si vedano le dispense.

Esercizio 6. Si consideri la struttura $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, \{\equiv, \prec\}, \{\oplus, \otimes\}, \{\mathit{0}, \mathit{1}\})$, dove $\mathbb{N}$ denota l'insieme dei numeri naturali, $\equiv$ la relazione binaria di essere lo stesso numero, $\prec$, $\oplus$ e $\otimes$ rispettivamente l'ordine, l'addizione e la moltiplicazione tra numeri naturali, *0* e *1* i numeri zero e uno.

Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio adatto alla struttura i cui simboli propri siano i predicati $=$, $<$; i simboli per funzione $+$ e $\times$; i simboli per costante 0 e 1.

Nel linguaggio $\mathcal{L}$ si scriva una formula $\varphi(v_0, v_1)$ con le sole variabili libere indicate tale che $\mathfrak{N} \models \varphi(v_0, v_1)[a, b]$ se e solo se $a - 2b > 0$, $a - 2b$ è multiplo di 5 e il prodotto di a e b è divisibile per 3.

Soluzione: costruiamo per gradi le varie proposizioni e poi mettiamole assieme, assegnando, ovviamente alla variabile v_0 il valore a e v_1 il valore b.

1. "$a - 2b > 0$" diventa

$$< v_0 \times v_1 + \mathbf{11}$$

2. "$a - 2b$ è multiplo di 5" diventa

$$\exists v_2 = v_0 + \times v_1 + \mathbf{11} \times v_2 + + + + \mathbf{11111}$$

3. infine "ab è divisibile per 3" diventa semplicemente

$$\exists v_3 = \times v_0 v_1 \times v_3 + + \mathbf{111}$$

Adesso non resta che metterle assieme con gli opportuni connettivi...

$$\wedge \wedge < v_0 \times v_1 + \mathbf{11} \exists v_2 = v_0 + \times v_1 + \mathbf{11} \times v_2 + + + + \mathbf{11111} \exists v_3 = \times v_0 v_1 \times v_3 + + \mathbf{111}$$

Esercizio 7. Dire che cosa significa che una formula è valida. Dire cosa significa che la formula α è conseguenza logica della formula β. Dimostrare che, per ogni scelta delle formule α e β,

$$\{\alpha\} \models \rightarrow \beta \wedge \alpha\beta$$

Soluzione.

Si vedano le dispense.

Esercizio 8. In un linguaggio in cui è un simbolo di relazione unaria P e un simbolo di funzione binaria f, dire quali delle seguenti successioni di simboli sono formule (F), quali termini (T) e quali nulla (N); in quest'ultimo caso scrivere nell'ultima colonna una breve giustificazione.

	F	T	N	
$\forall v_0 \neg \wedge P f v_1 v_0$			$\times$	$\wedge$ deve essere seguito da due formule
$P f v_1 v_2$	$\times$			
$\wedge \forall v_1 P v_1 \neg P f v_0 v_1$	$\times$			
$\wedge \forall v_0 P f v_1 v_0 \neg P v_0 f v_1 v_2$			$\times$	P vuole un solo termine
$\wedge \wedge f v_1 v_0 \neg P v_4 \neg \forall v_0 P f v_0 v_2$			$\times$	$f v_1 v_2$ è un termine e non una formula
$\wedge \wedge P f v_1 v_2 \neg P v_3 \neg \forall v_1 P f v_1 v_3$	$\times$			
$f f v_0 v_1 v_2$		$\times$		

Esercizio 9. Dato l'insieme di coppie ordinate

$$\begin{aligned} g = \{(x, x - x^2) : x \in \mathbb{N}, 0 < x + 1 < 3\} \cup \\ \cup \{(x, x - 1) : x \in \mathbb{N}, 0 \leq x^2 - 1 \leq 20\} \cup \\ \cup \{(x, 2x - 7) : x \in \mathbb{N}, x > 5\} \cup \{(5, 4), (3, 2)\}, \end{aligned}$$

motivare perché g è una funzione da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$, precisando se è totale, suriettiva, iniettiva o biiettiva, giustificando le risposte.

Data poi la funzione $f = \{(0, 3), (1, 5), (3, 1)\}$, scrivere quali sono le funzioni $h = f(g)$ e $k = g(f)$. Di esse precisare insieme di definizione e insieme immagine e se sono iniettive.

Soluzione.

$$\begin{aligned} g &= \{(0,0), (1,1), (2,1), (3,2), (4,3), (5,4), (3,2), (6,5), (7,7), (8,9), \ldots\} \\ &= \{(0,0), (2,1), (3,2), (4,3), (5,4), (6,5), (7,7), (8,9), \ldots\} \end{aligned}$$

g è funzione totale, poichè è rispettata la proprietà di univocità e il dominio coincide con l'insieme di definizione. g non è suriettiva, poichè, ad esempio, 8 non è immagine di alcun elemento dell'insieme di definizione e g non è iniettiva, dal momento che 1 è immagine sia di 1 che di 2.

$h = \{(0,3),(1,5),(2,5),(4,1)\}$ e $Def(h) = \{0,1,2,4\}$, $Im(h) = \{3,5,1\}$. Infine h non è iniettiva poichè 1 e 2 hanno la stessa immagine.
$k = \{(0,0),(1,4),(3,1)\}$ e $Def(k) = \{0,1,3\}$, $Im(k) = \{0,2,4\}$. Infine, k è iniettiva.