Esercizi sulle funzioni

Esercizio 1. *Siano* $f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definite da*

$$f(x) = x - \sqrt{1-x^2} \qquad g(x) = \ln x$$

1. *Trovare l'insieme di definizione di* f *e l'insieme di definizione di* g.
2. *Determinare le funzioni composte* $f \circ g$ *e* $g \circ f$*, specificandone gli insiemi di definizione.*

Sol.

- $Def(f) = [-1, 1]$, $Def(g) = (0, +\infty)$.
- $f \circ g : \left[\frac{1}{e}, e\right] \longrightarrow \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x) = \ln x - \sqrt{1 - (\ln x)^2}$.
  $1 - (\ln x)^2 \geq 0$ iff $x \in \left[\frac{1}{e}, e\right]$.
- $(g \circ f) : [\frac{\sqrt{2}}{2}, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $(g \circ f)(x) = \ln(x - \sqrt{1-x^2})$.
  $x - \sqrt{1-x^2} > 0$ per i valori di x per cui è soddisfatto il seguente sistema

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ -1 \leq x \leq 1 \\ (\sqrt{2}x - 1)(\sqrt{2}x + 1) \geq 0 \end{cases}$$

  Cioè se e solo se $x \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$.

Esercizio 2. *Sia* $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definita da:*

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & x \leq 0 \\ \lambda x + 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

in cui λ *è un parametro reale.*
Dire se f *è una funzione da* $\mathbb{R}$ *in* $\mathbb{R}$ *e, in caso affermativo, dire per quali valori del parametro reale* λ f *è*

(i) *totale;*

(ii) *iniettiva;*

(iii) *suriettiva.*

Per i valori del parametro λ *per cui* f *è invertibile, determinare la funzione inversa di* f.

Sol.
f è una funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, indipendentemente dai valori che assume il parametro λ. L'unico problema riguardo l'univocità di f si incontra in $x = 0$. Tuttavia si osserva che

$$f(0) = \begin{cases} 1 \\ 1 \end{cases}$$

e quindi f è effettivamente una funzione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.

(i) $Def(f) = \mathbb{R}$, indipendentemente da λ, quindi f è totale, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.

(ii) • se $\lambda = 0$, f non è iniettiva, infatti $f^{\leftarrow}(1) = \mathbb{R}_+$.
• se $\lambda < 0$, f non è iniettiva, infatti $f^{\leftarrow}(0) = \{-1, -\frac{1}{\lambda}\}$.
• se $\lambda > 0$, f è iniettiva, infatti

- siano $x_1, x_2 > 0$, $\lambda x + 1$ è iniettiva;
- siano $x_1, x_2 < 0$, $1 - x^2$ è iniettiva;
- siano, $x_1 > 0$ e $x_2 < 0$. Supponiamo, per assurdo, che $1 - x_2^2 = \lambda x_1 + 1$, da cui $x_1 = -\frac{x_2^2}{\lambda}$, che contraddice $x_1 > 0$.

(iii) Se $\lambda \leq 0$ f non è suriettiva.
Se $\lambda > 0$, f è suriettiva, l'inversa è

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt{1-x}, & x \leq 1 \\ \dfrac{x-1}{\lambda}, & x \geq 1 \end{cases}$$

Esercizio 3. *Sia $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da:*

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & x \leq 1 \\ -\ln x & x \geq 1 \end{cases}$$

Dire se f è una funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ e, in caso positivo, dire se f è totale, iniettiva, suriettiva. Esiste l'inversa di f? In caso affermativo, trovare f^{-1}.

Sol.
f è una funzione poichè $(x-1)^2|_1 = 0 = -\ln x|_1$, inoltre è totale. f è inoltre iniettiva, infatti per $x \leq 1$ $(x-1)^2$ è iniettiva e positiva, mentre, per $x \geq 1$, $-\ln x$ è iniettiva e negativa. La suriettività di f la mostriamo esibendo l'inversa di f e mostrando che il suo insieme di definizione è tutto $\mathbb{R}$.

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ e^{-x}, & x \leq 0 \end{cases}$$

Esercizio 4. *Siano $f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definite da*

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x} \qquad g(x) = 1 - e^{\frac{1}{x}}$$

1. *Trovare l'insieme di definizione di f e l'insieme di definizione di g.*
2. *Determinare le funzioni composte $f \circ g$ e $g \circ f$, specificandone gli insiemi di definizione.*

Sol.
$Def(f) = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$.
$Def(g) = \mathbb{R}^*$.

$h(x) = (g \circ f)(x) = 1 - e^{\frac{1}{\sqrt{x^2-x}}}$ e $Def(h) = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$
$k(x) = (f \circ g)(x) = \sqrt{e^{\frac{1}{x}}\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)}$, $Def(k) = (0, +\infty)$.

Esercizio 5. *Sia $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da:*

$$f(x) = \begin{cases} -(x-1)^2 & x \leq 1 \\ \ln x & x \geq 1 \end{cases}$$

Dire se f è una funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ e, in caso positivo, se f è totale, iniettiva, suriettiva. Esiste l'inversa di f? In caso affermativo, travare f^{-1}.

Sol.
f è una funzione poiché soddisfa la proprietà di univocità, infatti f è definita in due intervalli non disgiunti che hanno in comune in punto $x = 1$. Nei due intervalli $x < 1$ e $x > 1$ f è una funzione poiché è definita da funzioni, per cui l'unico punto in cui controllare l'univocità è $x = 1$ e in tale punto si ha che $-(1-1)^2 = 0 = \ln 1$.

f è totale (poichè il suo insieme di definizione è $\mathbb{R}$), è suriettiva dal momento che per $x \leq 1$ f è definita da un arco di parabola che assume solamente valori negativi e che si annula solo in $x = 1$, che è anche il vertice di tale parabola; per $x \geq 1$ f è definita dalla funzione logaritmo che è positiva e assume tutti i valori positivi per $x > 1$ e si annulla solo per $x = 1$. Inoltre f è iniettiva, dal momento che le due funzioni che la definiscono nei due intervalli $x \leq 1$ e $x \geq 1$, sono iniettive nei due intervalli, nulle in $x = 1$ e $-(x-1)^2$ è negativa in $x < 1$ e $\ln x$ è positiva per $x > 1$.
Di conseguenza f ammette inversa:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} - 1 & x \leq 0 \\ e^x & x \geq 0 \end{cases}$$

Esercizio 6. *Siano $f, g \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definite da*

$$f(x) = \ln \frac{x-1}{x} \qquad g(x) = \sqrt{e^x - 1}$$

1. *Trovare l'insieme di definizione di f e l'insieme di definizione di g.*

2. *Determinare le funzioni composte $f \circ g$ e $g \circ f$, specificandone gli insiemi di definizione.*

Sol.

1. $Def(f) = (-\infty, 0) \cap (1, +\infty)$;
   $Def(g) = [0, +\infty)$.

2. $f \circ g : [\ln 2, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x) = \ln \frac{\sqrt{e^x-1}-1}{\sqrt{e^x-1}}$;

   $(g \circ f)(x)$ non è mai definita.

Esercizio 7. *Date le seguenti funzioni $f(x)$ e $g(x)$ di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, determinare per ciascuna l'insieme di definizione, l'immagine, dire se sono, totali, iniettive, suriettive e biettive. Se le funzioni risultano iniettive calcolare l'inversa (sull'immagine). Quindi calcolare e dire dove sono definite $h := f \circ g$ e $k := g \circ f$.*

a. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 2x - 3$;

b. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2 - 1$;

b. $f(x) = x - 5$, $g(x) = x^2 - 1$;

c. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $g(x) = \frac{1}{x}$[1];

d. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, $g(x) = \sqrt{x - 1}$;

e. $f(x) = x + 1$, $g(x) = 3x^2 - 1$;

Esercizio 8. *Date le funzioni $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$ e $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x+2}$, dire se sono iniettive e in caso affermativo, determinare le inverse sull'imagine.*

Esercizio 9. *Data la funzione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x-3}{x-3}$ determinare insieme di definizione e immagine. Dire se f è iniettiva e iniettiva, suriettiva e biettiva. In caso di risposta f sia iniettiva, determinare l'inversa di f.*

Esercizio 10. *Data la funzione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$,*

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 4x - 7 \quad \text{per } x \leq -2 \\ x - 1 \quad \text{per } -1 < x \leq 2 \\ \dfrac{x^2}{4} - x + 2 \quad \text{per } x \geq -2 \end{cases}$$

determinare insieme di definizione e immagine. Disegnare $f(x)$. Dire se f è iniettiva, suriettiva e biettiva. In caso di risposta f sia iniettiva, determinare l'inversa di f.

[1] Questo l'ho fatto in aula.

Esercizio 11. *Sia* $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definita da:*

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & x \leq 0 \\ e^x - 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

Dire se f *è una funzione da* $\mathbb{R}$ *in* $\mathbb{R}$ *e, in caso positivo, dire se è totale, iniettiva, suriettiva. Esiste l'inversa di* f*? In caso affermativo trovare* f^{-1}.

Esercizio 12. *Siano* $f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definite da*

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2} \qquad g(x) = 1 - e^x$$

1. *Trovare l'insieme di definizione di* f *e l'insieme di definizione di* g.
2. *Determinare le funzioni composte* $f \circ g$ *e* $g \circ f$*, specificandone gli insiemi di definizione.*

Esercizio 13. *Sia* $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ e^x - 1 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Dire se f *è una funzione di* $\mathbb{R}$ *in* $\mathbb{R}$*, e in caso positivo, dire se* f *è totale, iniettiva o suriettiva. Esiste la funzione inversa di* f*? In caso affermativo, trovare* f^{-1}.