22. ANALISI DELLA FINITA SODDISFACIBILITA'

Ci si può domandare se, per analizzare la finita soddisfacibilità di un insieme di formule in un linguaggio anche più che numerabile, si può utilizzare il metodo degli alberi. Si osservi che la nozione di chiusura di una foglia (cioè la presenza in essa di una formula e della sua negazione), oltre la non soddisfacibilità dell'insieme di formule della foglia, implica anche la non finita soddisfacibilità dello stesso insieme di formule, in quanto, se in una foglia occorrono sia una formula che la sua negazione, allora tra tutti i sottinsiemi finiti di formule della foglia c'è anche il sottinsieme finito non soddisfacibile, quello costituito dalle due formule che sono una negazione dell'altra.

Per la ragionevolezza del metodo, bisognerebbe dimostrare che le regole preservano la finita soddisfacibilità. Se così fosse, si dovrebbe poter dimostrare che ci sarebbe almeno un ramo infinito aperto; che sarebbe un insieme di Hintikka e, dunque, soddisfacibile: sicché la finita soddisfacibilità implicherebbe la soddisfacibilità. Di fatto vale il seguente

Teorema. Le regole 1 e 2 preservano la finita soddisfacibilità.
DIMOSTRAZIONE.

Consideriamo anzitutto la regola 1. Sia Γ un insieme di formule finitamente soddisfacibile (in cui non occorrono sia una formula che la sua negazione), cioè tale che ogni sottinsieme finito di Γ sia soddisfacibile. Sia Γ' l'insieme ottenuto da Γ applicandogli la regola 1 relativamente ad un certo numero naturale n. Si deve far vedere che Γ' è finitamente soddisfacibile, cioè ciascuno dei sottinsiemi finiti di Γ' è soddisfacibile. Per ogni S' sottinsieme finito di Γ' sia $S_0=S'\cap\Gamma$ e $S_1=S'-S_0$. Sia S_2 l'insieme delle formule di Γ da cui si sono ottenute quelle di S_1 mediante l'applicazione della regola 1 relativamente a n (se una formula di S_1 è ottenuta da più formule di Γ applicando la regola 1, se ne scelga una sola di queste da mettere in S_2). La finitezza di S' implica la finitezza di S_0, di S_1 e di S_2. Così $S''=S_0\cup S_2$ è un sottinsieme finito di Γ.Per la finita soddisfacibiltà di Γ, esiste una $\mathcal{L}$-realizzazione (una realizzazione adatta al linguaggio $\mathcal{L}$, linguaggio che supponiamo essere quello in cui si esprimono le formule di Γ) che rende vere le formula di S". Sia $\sigma_{S''}$ una tale realizzazione. Le formule di Γ' si esprimono in un linguaggio $\mathcal{L}'$ ottenuto da $\mathcal{L}$ aggiungendo i simboli di costante dell'insieme $\{c_{\neg\forall x\alpha}: \neg\forall x\alpha\in\Gamma\}$ introdotti dalla regola 1 nelle formule $\neg\alpha(x/c_{\neg\forall x\alpha})$ di Γ' in corrispondenza delle formule $\neg\forall x\alpha$ di Γ. Ciò succederà in particolare nel passare dalle formule di tipo $\neg\forall x\alpha$ di S" alle formule $\neg\alpha(x/c_{\neg\forall x\alpha})$ di S'. Sia $\sigma_{S'}$ la $\mathcal{L}'$-realizzazione ottenuta espandendo la $\mathcal{L}$-realizzazione $\sigma_{S''}$ interpretando ciascun nuovo simbolo di costante $c_{\neg\forall x\alpha}$, occorrente in S' in una formula del tipo $\neg\alpha(x/c_{\neg\forall x\alpha})$, in un elemento $a_{\neg\forall x\alpha}$ dell'universo di $\sigma_{S''}$ tale che la formula $\neg\alpha$ sia vera nell'interpretazione $\sigma_{S''}(x/a_{\neg\forall x\alpha})$ (tale elemento deve esistere poiché la formula $\neg\forall x\alpha$ è vera nella realizzazione $\sigma_{S''}$, e non c'è conflitto tra le interpretazioni dei nuovi simboli per costante perché, al variare delle formule di tipo $\neg\forall x\alpha$ in S_2, cambia il nuovo simbolo per costante utilizzato), e gli altri nuovi simboli per costanti di $\mathcal{L}'$ come si vuole. La realizzazione $\sigma_{S'}$ rende vere tutte le formula di S': quelle con i nuovi simboli per costante proprio per come questi sono stati interpretati, le altre perché sono vere nella realizzazione $\sigma_{S''}$ e $\sigma_{S'}$ la espande. Vista l'arbitrarietà del sottinsieme finito S' di Γ', si può concludere che ciò vale per ogni sottinsieme finito di Γ', completando così la dimostrazione che la regola 1 preserva la finita soddisfacibilità.

Ora si vuole mostrare che anche la regola 2 preserva la finita soddisfacibilità, cioè si vuol far vedere che se si applica la regola 2 ad un insieme di formule Γ finitamente soddisfacibile, allora almeno uno degli insiemi ottenuti dall'applicazione della regola è finitamente soddisfacibile. Si indichi con Γ' l'insieme delle formule del tipo $\neg\wedge\alpha\beta$ in Γ. Si ricordi che gli insiemi ottenuti applicando la regola 2 possono essere tanti, ciascuno in corrispondenza di un modo di scegliere $\neg\alpha$ o $\neg\beta$ da ciascuna formula del tipo $\neg\wedge\alpha\beta$ in Γ', cioè in corrispondenza di una funzione f che opera tali scelte. Si indichi con f l'insieme di tali funzioni. Così si possono indicare con Γ_f gli insiemi ottenuti applicando la regola 2, per ciascuna funzione f appartenente a f. Ora, il fatto che la regola 2 preservi la finita soddisfacibilità si può esprimere dicendo che se Γ è finitamente soddisfacibile allora esiste una funzione f, appartenente a f, tale che Γ_f è finitamente soddisfacibile.

Come si potrà individuare una tale funzione? La proposta è di tentare di avvicinarsi ad essa mediante funzioni f che, pur avendo per dominio non tutte le formule del tipo $\neg\wedge\alpha\beta$ occorrenti in Γ, ma solo alcune di esse (eventualmente nessuna), forniscono insiemi $\Gamma\cup\{\mathit{f}(\neg\wedge\alpha\beta): \neg\wedge\alpha\beta\in dom(\mathit{f})\}$ finitamente soddisfacibili.

Sia F l'insieme di queste funzioni, cioè sia $\mathsf{F} = \{\mathit{f}: \mathit{f}$ è una funzione che 1) ha per dominio un sottinsieme delle formule del tipo $\neg\wedge\alpha\beta$ occorrenti in Γ, e 2) ad ogni formula $\neg\wedge\alpha\beta$ del suo dominio associa o $\neg\alpha$ o $\neg\beta$, e inoltre 3) è tale che $\Gamma\cup\{\mathit{f}(\neg\wedge\alpha\beta): \neg\wedge\alpha\beta\in dom(\mathit{f})\}$ sia finitamente soddisfacibile$\}$. Si ordini F per inclusione.

La speranza è che questo insieme F sia ricco di funzioni con dominio sempre più ampio fino al punto che il dominio di una di questa funzioni sia proprio $\Gamma'=\{\neg\wedge\alpha\beta: \neg\wedge\alpha\beta\in\Gamma\}$: allora una tale funzione (la si indichi con f), oltre ad appartenere a F, apparterrebbe anche ad f e sarebbe tale che Γ_f è finitamente soddisfacibile, come si vuole mostrare.

Anzitutto è opportuno mostrare che F non è vuoto. Infatti gli appartiene la funzione vuota; questa è la funzione che è un insieme privo di elementi che dovrebbero essere coppie ordinate, ed anche il suo dominio è vuoto: la funzione vuota appartiene a F perché sicuramente fa una scelta tra le due alternative di una formula di tipo $\neg\wedge\alpha\beta$ (che non c'è), ed inoltre dà un nuovo insieme Γ' che è esattamente Γ, sicché Γ' è finitamente soddisfacibile poiché lo è Γ per ipotesi.

Ora si vuol vedere se funzioni di F che dovrebbero approssimare sempre meglio la funzione cercata portano ad una funzione di F con approssimazione migliore di tutte quelle considerate, cioè se una successione di funzioni F ciascuna includente le precedenti, ma con dominio sempre più vasto, permette di ottenere una funzione di F che contenga tutte quelle della successione, e, in tal senso, approssimi sempre più la funzione cercata.

Si osservi che, se F_1 è un sottinsieme non vuoto totalmente ordinato dall'inclusione di elementi di F, allora $\cup\mathsf{F}_1$ è ancora un elemento di F che, evidentemente, sarà un maggiorante di F_1 in F. Infatti l'unione di funzioni una contenuta in un'altra è ancora una funzione che ha per dominio l'unione dei domini delle funzioni appartenenti a F_1 (cioè ancora un sottinsieme di Γ'); inoltre ad ogni elemento $\neg\wedge\alpha\beta$ del dominio $\cup\mathsf{F}_1$ associa o $\neg\alpha$ o $\neg\beta$; ed infine $\Gamma\cup\{\cup\mathsf{F}_1(\neg\wedge\alpha\beta): \neg\wedge\alpha\beta\in dom(\cup\mathsf{F}_1)\}$ è finitamente soddisfacibile.

Per rendersi conto della correttezza di quest'ultima affermazione, si consideri un qualsiasi sottinsieme finito S di $\Gamma\cup\{\cup\mathsf{F}_1(\neg\wedge\alpha\beta): \neg\wedge\alpha\beta\in dom(\cup\mathsf{F}_1)\}$. In S c'è un numero finito di formule $\gamma_1,...,\gamma_p$ non in Γ e pertanto immagini di qualche formula di Γ' mediante $\cup F_1$. Ma se, per ogni i tra 1 e p, $\gamma_i = \cup F_1(\neg\wedge\alpha_i\beta_i)$ allora, per ogni tale i, c'e una funzione $f_i \in F_1$ tale che $\gamma_i = f_i(\neg\wedge\alpha_i\beta_i)$; e poiché queste funzioni sono una contenuta nell'altra tra queste p funzioni ce ne è una, la si indichi con $f\sim$, che contiene le altre, sicché, per ogni i tra 1 e p, $\gamma_i = f\sim(\neg\wedge\alpha_i\beta_i)$. Allora $S = (\Gamma\cap S)\cup\{f\sim(\neg\wedge\alpha_i\beta_i)$: $i=1,...,p\}$ è soddisfacibile perché è un sottinsieme finito di $\Gamma\cup\{f\sim(\neg\wedge\alpha\beta)$: $\neg\wedge\alpha\beta\in dom(f\sim)\}$ che è finitamente soddisfacibile per l'ipotesi fatta su $f\sim$.

Visto che le funzioni di F permettono di generare funzioni che si avvicinano sempre più a quella cercata, viene da chiedersi se questo avvicinarsi porta a determinare una funzione di dominio Γ', o se si rimane comunque lontani. I migliori candidati per minare una funzione di dominio Γ' sono evidentemente gli elementi massimali di F (cioè quelli che hanno dominio più grande di tutte le altre funzioni di F in essi contenute), se ci sono. La dimostrazione dell'esistenza di questi elementi massimali nell'insieme F è il punto più delicato di tutta questa dimostrazione che la regola 2 preserva la finita soddisfacibilità poiché richiede una assunzione impegnativa sui metodi dimostrativi permessi in matematica: tale assunzione è l'assioma della scelta, qui nella sua forma equivalente del lemma di Zorn.

Discuteremo in altra sede perché l'assioma della scelta e il lemma di Zorn sono un'assunzione impegnativa sui metodi dimostrativi permessi in matematica. Qui sarà sufficiente ricordare che non tutti riconoscono questi metodi che sostanzialmente permettono di accettare come collezioni anche quelle non ben determinate nel senso che non esiste alcun metodo di decisione di quali elementi vi appartengono, pur essendoci una indicazione non decidibile di ciò (evidentemente parte della difficoltà è proprio precisare cosa debba intendersi per decidibile). Noi qui accetteremo questo strumento nella forma di lemma di Zorn che può essere enunciato nel modo seguente.

LEMMA DI ZORN. Sia dato un insieme S non vuoto parzialmente ordinato da una certa relazione d'ordine R, e in esso ogni catena (catena è un sottinsieme totalmente ordinato dalla relazione R) abbia maggioranti in S, allora nell'insieme S ci sono elementi massimali.

Poiché, come si è dimostrato precedentemente, ogni sottinsieme non vuoto totalmente ordinato di F ha un maggiorante in F, ci troviamo nelle ipotesi del lemma di Zorn, e in F ci saranno elementi massimali.

Si è così giunti a mostrare l'esistenza di funzioni candidate ottimali in F ad avere per dominio tutto Γ': le funzioni massimali di F, che hanno i domini più ampi possibile poiché si è scelto l'ordinamento per inclusione di F. La dimostrazione che anche la regola 2 preserva la finita soddisfacibilità si conclude mostrando che tali funzioni candidate hanno effettivamente per dominio Γ'.

Sia $f^\wedge$ un elemento massimale di F, si vuol mostrare che il suo dominio è Γ'. Altrimenti ci sarebbe una formula, diciamo $\neg\wedge\gamma\delta$, in Γ' ma non nel dominio di $f^\wedge$. Siano $f^\wedge_1=f^\wedge \cup\{(\neg\wedge\gamma\delta,\neg\gamma)\}$ e $f^\wedge_2= f^\wedge\cup\{(\neg\wedge\gamma\delta,\neg\delta)\}$, due estensioni proprie di $f^\wedge$. Se si fa vedere che una delle due appartiene a F si contraddice la massimalità di $f^\wedge$ che, per evitare la contraddizione, dovrà avere per dominio tutto Γ'.

Così si supponga che né $f^\wedge_1$ né $f^\wedge_2$ appartengano a F. Allora $\Gamma\cup\{f^\wedge_1(\neg\wedge\alpha\beta)$: $\neg\wedge\alpha\beta\in dom(f^\wedge_1)\}$ e $\Gamma\cup\{f^\wedge_2(\neg\wedge\alpha\beta)$: $\neg\wedge\alpha\beta\in dom(f^\wedge_2)\}$ non sono finitamente soddisfacibili e ci saranno un sottinsieme finito S' non soddisfacibile e un sottinsieme finito S" non soddisfacibile di ciascuno dei due insiemi rispettivamente. Siano $\underline{S}'$ = S'-

$\{f^{\wedge}{}_1(\neg\wedge\gamma\delta)\}$ e $\underline{S}'' = S''-\{f^{\wedge}{}_2(\neg\wedge\gamma\delta)\}$. Si noti che $S'\cup\underline{S}'' = \underline{S}'\cup\underline{S}''\cup\{\neg\delta\}$ e $S''\cup\underline{S}' = \underline{S}'\cup\underline{S}''\cup\{\neg\gamma\}$ sono insiemi finiti che contengono S' e S'' rispettivamente, e pertanto non sono soddisfacibili.Allora anche $\underline{S}'\cup\underline{S}''\cup\{\neg\wedge\gamma\delta\}$ sarebbe non soddisfacibile (se fosse soddisfacibile, ci sarebbe una realizzazione σ che rende vere tutte le formule che gli appartengono, in particolare sarebbe $(\neg\wedge\gamma\delta)^\sigma=V$, il che comporta che o $(\neg\gamma)^\sigma=V$ o $(\neg\delta)^\sigma=V$, sicché o $S'\cup\underline{S}''$ o $S''\cup\underline{S}'$ sarebbero soddisfacibili contro ciò che stiamo considerando) ma questo è un sottinsieme finito dell'insieme finitamente soddisfacibile $\Gamma\cup\{f^{\wedge}(\neg\wedge\alpha\beta)\text{: } \neg\wedge\alpha\beta\in dom(f^{\wedge})\}$ (per l'ipotesi fatta su $f^{\wedge}$ di appartenere a F). Questa contraddizione mostra che in effetti o $f^{\wedge}{}_1$ o $f^{\wedge}{}_2$ appartengono a F, ma non possono estendere la funzione $f^{\wedge}$ che, per ipotesi, è massimale in F, e allora, come si era detto, il dominio di $f^{\wedge}$ sarà Γ'.

Concludendo, la funzione $f^{\wedge}$ permette di ottenere l'insieme $\Gamma\cup\{f^{\wedge}(\neg\wedge\alpha\beta)\text{: } \neg\wedge\alpha\beta\in\Gamma'\}$ che è finitamente soddisfacibile, e che è uno di quegli insiemi che la regola 2 fa seguire a Γ: così anche la regola 2 preserva la finita soddisfacibilità nel senso che è finitamente soddisfacibile almeno uno degli insiemi a cui la regola fa passare a partire da un insieme finitamente soddisfacibile, come si voleva dimostrare.

23. LA COMPATTEZZA ED ALCUNE SUE CONSEGUENZE.

Avendo dimostrato che le regole 1 e 2 preservano la finita soddisfacibilità, si può asserire che, se si costruisce la successione di alberi finiti di confutazione T_n, partendo dall'albero T_0 che ha solo la radice costituita dall'insieme Γ finitamente soddisfacibile, e applicando le regole $R_{1,n}$ e R_2, ciascuno di questi alberi T_n ha almeno una foglia tale che l'insieme delle formule occorrenti in essa è finitamente soddisfacibile, e quindi aperta, e i nodi che la precedono sono pure aperti essendo contenuti in questa. Così l'albero $T^\infty=\cup\{T_n\text{: } n\in\mathsf{N}\}$ ha almeno un ramo infinito tale che ogni suo nodo è costituito da un insieme di formule finitamente soddisfacibile. Ne segue che, appunto nel caso in cui Γ è finitamente soddisfacibile, l'albero T^∞ dovrà avere almeno un ramo aperto (altrimenti quel ramo contiene una formula in un nodo e la sua negazione in un altro nodo del ramo, ed allora sia la formula che la sua negazione occorrono in quello dei due nodi che segue l'altro e costituiscono un insieme finito che dovrebbe essere soddisfacibile: impossibile). Allora l'insieme delle formule che occorrono in quel ramo aperto è un insieme di Hintikka, e dunque soddisfacibile, come si è già visto.

Poiché tale insieme include le formule occorrenti nella radice, anche l'insieme delle formule occorrenti nella radice è soddisfacibile.

Così dalla finita soddisfacibilità di Γ si è giunti alla soddisfacibilità di Γ.

D'altra parte è ovvio che se un insieme di formule è soddisfacibile allora anche ogni suo sottinsieme, in particolare finito, è soddisfacibile, essendo le sue formule vere in una realizzazione che rende vere le formule dell'insieme iniziale.

Abbiamo così dimostrato il seguente

Teorema di Compattezza (semantico): Ogni sottinsieme finito di un insieme Φ di formule in un linguaggio di cardinalità arbitraria è soddisfacibile, se e solo se l'insieme Φ di formule è soddisfacibile. Detto altrimenti (contronominale), un insieme di formule è non soddisfacibile, se e solo se c'è un suo sottinsieme finito che è non soddisfacibile.

Immediata conseguenza di questo risultato, utilizzando il teorema di completezza, è il seguente:

Teorema di Compattezza (sintattico): Un insieme di formule ha albero chiuso se e solo se c'è un suo sottinsieme finito che ha albero chiuso.

COMMENTO ALLA DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DI COMPATTEZZA.
Nella dimostrazione data del teorema di compattezza si è fatto uso del lemma di Zorn, che è equivalente all'assioma della scelta. Di fatto non è necessaria tutta la forza di queste forti assunzioni della matematica. Si può dimostrare lo stesso risultato ricorrendo al principio dell'ultrafiltro (ogni filtro può essere esteso ad un ultrafiltro), che si dimostra essere proprio equivalente (nel senso che da uno si dimostra l'altro) al teorema di compattezza. Così il principio dell'ultrafiltro sarebbe la minima assunzione necessaria per dimostrare il teorema di compattezza. Il principio dell'ultrafiltro può essere agevolmente dimostrato a partire dall'assioma della scelta. Tuttavia ci sono sofisticati risultati che mostrano che l'assioma della scelta non può essere ottenuto dal principio dell'ultrafiltro, quindi questo è più debole. Qui si è preferito presentare la dimostrazione usando il lemma di Zorn (equivalente all'assioma della scelta) per non dover sviluppare il tema dei filtri e degli ultrafiltri, necessario per usare l'ipotesi più debole. In effetti, ritengo che da una parte si sia alleggerito il percorso per giungere al teorema di compattezza, traguardo a cui si tendeva, e dall'altra non si sia perso molto accettando l'ipotesi più forte, poiché entrambe le ipotesi trovano problematiche e obiezioni sostanzialmente analoghe per essere accettate.
Comunque in appendice A viene riportato il diverso percorso che porta al teorema di compattezza facendo uso del solo principio dell'ultrafiltro. Di fatto, dopo aver introdotto le nozioni di filtro e di ultrafiltro, sarà sufficiente dimostrare che la regola 2 preserva la finita soddisfacibilità, senza usare l'assioma della scelta o qualcosa di equivalente, ma solo il principio dell'ultrafiltro, poiché tutto il resto del percorso per arrivare al teorema di compattezza si sviluppa in modo uguale a quello che si è già visto.

COMMENTO ALL'ACCETTAZIONE DELL'ASSIOMA DELLA SCELTA.
L'assioma della scelta equivale al lemma di Zorn, nel senso che da ciascuna di queste affermazioni si dimostra l'altra, e può essere enunciato nel modo seguente: dato un insieme K di insiemi non vuoti esiste una funzione ϕ che a ciascun tale insieme, chiamiamolo X, di K associa un suo elemento, cioè tale che, per ogni X appartenente a K, ϕ(X) appartiene a X. Si dice che sceglie un elemento in ciascun insieme X (che non è vuoto) di K.
L'esistenza di questa funzione è facilmente dimostrabile in molti casi interessanti. Ad esempio, se K è un insieme finito di insiemi non vuoti non c'è problema a scegliere un elemento per ciascuno degli insiemi di K (basta prendere uno che testimoni il fatto che l'insieme è non vuoto). Anche se K è infinito, ma ciascun insieme di K è bene ordinato (in modo che si possa individuare ad esempio un primo elemento rispetto a ciascun buon ordine) ancora non c'è alcun problema per dimostrare l'esistenza di una tale funzione. Pure se gli insiemi appartenenti a K non sono ordinati, ma c'è un criterio preciso per individuare un elemento in ciascuno di tali insiemi, l'esistenza della funzione scelta è dimostrabile.
Ciò che non si può dimostrare (come conseguenza degli usuali assiomi della teoria degli insiemi da tutti accettati) è che la funzione scelta esista quando gli insiemi appartenenti a K sono così grandi e ricchi di elementi da non essere in grado di aver un

preciso criterio per individuarne uno. Uno direbbe che tanto più grandi e ricchi di elementi sono gli insiemi che appartengono a K tanto più facile è considerare un elemento in ciascuno di questi insiemi, anche se non si sa bene qual è. Questa è la difesa estremamente ragionevole dell'assioma della scelta da parte di coloro che lo accettano, e tra questi la stragrande maggioranza dei matematici, perché senza assioma della scelta la matematica si ridurrebbe a ben poco.
I critici, cioè coloro che non lo accettano, si fermano su quel "anche se non si sa bene qual è". Come si può accettare - dicono - un insieme che pure dovrebbe esserci, ma non se ne conoscono bene i suoi elementi? E' chiaro il contrasto tra chi accetta entità anche non bene conosciute e chi accetta come esistente solo ciò che conosce pienamente.
Per il lemma di Zorn si può argomentare in modo parallelo con gli stessi esiti.
Da questo punto di vista la differenza con il principio dell'ultrafiltro non è tanto nel non accettare cose non completamente conosciute, ma sul dove si pone il limite di demarcazione tra quello che si accetta e quello che non si accetta, sempre tra cose non completamente conosciute (punto di demarcazione che comunque esiste anche per l'assioma della scelta).

24. LIMITI DI EFFETTIVITA' DEL METODO.

Si osservi che quanto si è sviluppato per l'analisi a blocchi e per l'analisi della finita soddisfacibilità è corretto a partire da un qualsiasi insieme di formule in un linguaggio arbitrario: in particolare si può anche partire da un insieme finito di formule (in tal caso soddisfacibilità e finita soddisfacibilità coincidono). Ma, se l'insieme iniziale di formule è finito, si è già visto che per decidere della soddisfacibilità o meno dell'insieme di formule iniziale non è necessario ricorrere all'albero unione degli alberi della successione, ma già uno di questi sarà chiuso se l'insieme dato è non soddisfacibile. Il teorema di compattezza potrebbe permettere di estendere il risultato di semidecibilità del metodo degli alberi di confutazione per gli alberi costruiti a partire da un insieme finito anche al caso di alberi costruiti a partire da un insieme infinito che lo contenga se si trovasse un legame tra gli alberi costruiti a partire da un insieme di formule e gli alberi costruiti a partire da un suo sottinsieme.
Si osservi ora che (come si può dimostrare per induzione sull'indice degli alberi della successione) tra la successione di alberi costruita a partire da un certo insieme di formule per rappresentare l'analisi a blocchi e la successione di alberi costruita a partire da un sottinsieme di quel insieme di formule, sempre per rappresentare l'analisi a blocchi, sussiste la seguente relazione:
Teorema. Ogni nodo dell'n-esimo albero T_n della prima successione, costruita a partire da un insieme di formule Δ (contenente un sottinsieme Δ^) contiene un nodo di ugual livello dell'n-esimo albero $T^\wedge_n$ della seconda successione costruita a partire dal sottinsieme Δ^ di quel insieme di formule.
DIMOSTRAZIONE. E' sufficiente mostrare, per induzione su n, che ogni foglia a livello n in T_n contiene una foglia a livello n di $T^\wedge_n$. Per n=0 il risultato è ovvio. Si tratta di mostrare che detta proprietà si preserva al passare da n a n+1. Bisogna distinguere i due casi n pari e n dispari perché se n è pari il passaggio avviene applicando la regola 1, n/2, mentre se n è dispari si applica la regola 2.

Sia dunque n un numero pari e si supponga, per ipotesi induttiva, che ciascuna foglia a livello n di T_n contenga una foglia a livello n di $T^\wedge_n$. Si può constatare, in base alla descrizione della regola 1, n/2, che se questa è applicata sia ad un insieme Γ che ad un suo sottinsieme $\Gamma^\wedge$ produce un due nuovi insiemi, Γ' e $\Gamma^{\wedge\prime}$ rispettivamente, tali che Γ' contiene $\Gamma^{\wedge\prime}$. Così ciascuna foglia ν' a livello n+1 nell'albero T_{n+1}, ottenuta dalla foglia ν dell'albero T_n mediante la regola 1,n/2 (ν deve essere aperta), conterrà la foglia a livello n+1 dell'albero $T^\wedge_{n+1}$ che la regola 1,n/2 fa seguire immediatamente ad una foglia $\nu^\wedge$ a livello n dell'albero $T^\wedge_n$ che era contenuta nella foglia ν (e quindi $\nu^\wedge$ è aperta).

Si supponga ora che n sia un numero dispari e che, per ipotesi induttiva, ciascuna foglia ν a livello n di T_n contenga una foglia $\nu^\wedge$ a livello n di $T^\wedge_n$. L'insieme Γ^* delle formule di tipo $\neg\wedge\alpha\beta$ in ν contiene l'insieme $\Gamma^{\wedge*}$ delle formule dello stesso tipo in $\nu^\wedge$. Sia f l'insieme delle funzioni f utilizzate dalla regola 2 per caratterizzare ciascuna delle foglie ν_f che seguono immediatamente a livello n+1 nell'albero T_{n+1} la foglia ν di T_n, e sia $\mathsf{f}^\wedge$ l'analogo insieme di funzioni $f^\wedge$ utilizzate dalla regola 2 per caratterizzare ciascuna delle foglie $\nu^\wedge_{f^\wedge}$ che seguono immediatamente a livello n+1 nell'albero $T^\wedge_{n+1}$ la foglia $\nu^\wedge$ di $T^\wedge_n$ Così ciascuna funzione f appartenente a f contiene una delle funzioni, diciamola $f^\wedge$, appartenenti a $\mathsf{f}^\wedge$, anzi $f^\wedge$ è $f_{|\Gamma^{\wedge*}}$, la restrizione di f a $\Gamma^{\wedge*}$. (Se Γ^* contiene propriamente $\Gamma^{\wedge*}$, più funzioni hanno la stessa restrizione a $\Gamma^{\wedge*}$). E' immediato, dalla descrizioni di come opera la regola 2, che ν_f contiene $\nu^\wedge_{f^\wedge}$, sicché anche in questo caso abbiamo raggiunto la conclusione voluta.

Avendo completato l'esame dei vari casi e il passo dell'induzione, la dimostrazione del risultato enunciato è completa.

La proprietà appena dimostrata e il teorema di compattezza, prima dimostrato, permettono di concludere con la semidecidibilità del metodo dell'analisi a blocchi in ogni caso, anche a partire da insiemi arbitrari di formule, cioè permettono di dimostrare che

Teorema di semidecidibilità. L'albero unione T^∞ è chiuso se e solo se c'è un numero naturale n tale che l'albero T_n della successione è chiuso.

Infatti

- l'albero unione è chiuso
- se e solo se il nodo iniziale Δ non è soddisfacibile,
- se e solo se c'è un sottinsieme finito $\Delta^\wedge$ delle formule di partenza che non è soddisfacibile,
- se e solo se esiste un numero naturale n tale che si chiude l'albero $T^\wedge_n$ della successione costruita a partire dall'insieme finito $\Delta^\wedge$,
- se e solo se è chiuso l'albero T_n costruito a partire dall'insieme di formule originale Δ in quanto ogni sua foglia, o è ad un livello minore di n e chiusa (se non fosse chiusa non sarebbe foglia di T_n ad un livello minore di n) o è a livello n e contiene una foglia chiusa dell'albero $T^\wedge_n$ costruito a partire dal sottinsieme finito $\Delta^\wedge$ di formule in quanto ogni nodo di $T^\wedge_n$ a livello n è una foglia chiusa.

In quanto detto è incluso anche il seguente

Teorema di completezza forte. Un insieme di formule è non soddisfacibile se e solo se esiste un numero naturale n tale che l'albero T_n, costruito a partire da quel insieme di formule, è chiuso. Equivalentemente un insieme di formule è soddisfacibile se e solo se per ogni numero naturale n l'albero T_n, costruito a partire da quel insieme di formule, è aperto.

Dai risultati ottenuti segue anche il

Teorema di Löwenheim Skolem (debole). Se un insieme di enunciati Γ ha modello infinito allora ha modelli di qualsiasi cardinalità maggiore od uguale alla cardinalità del linguaggio.

Ovviamente dire che un modello è infinito vuol dire che la sua cardinalità, che come si sa è la cardinalità del suo universo, è infinita. Questo risultato viene detto debole perché i risultati avviati da Lowenheim e completati da Skolem portano a conclusioni più forti di quelle che sono qui esposte. Tuttavia non è un obiettivo di questo insegnamento arrivare alle versioni più forti di questo teorema.

DIMOSTRAZIONE. Sia k una qualsiasi cardinalità maggiore od uguale alla cardinalità del linguaggio $\mathcal{L}$. Sia C un insieme, di cardinalità k, di nuovi simboli per costanti. Sia Σ l'insieme di enunciati del tipo $\neg c=c'$ per ogni coppia c, c' di simboli per costanti tra loro diversi in C, $\Sigma=\{\neg c=c'$: c, c' sono simboli per costanti tra loro diversi in C$\}$. E' chiaro che ogni modello di Σ deve avere un universo di cardinalità almeno k per poter interpretare in elementi diversi i simboli di costante di C e così rendere veri tutti gli enunciati di Σ. Sia $\mathcal{L}'$ il linguaggio ottenuto dal linguaggio iniziale in cui è espresso l'insieme di enunciati Γ aggiungendo l'insieme di nuovi simboli per costanti C.
La cardinalità di $\mathcal{L}'$ è proprio k.

Si vuole mostrare che l'insieme di enunciati $\Gamma\cup\Sigma$ è soddisfacibile. Il risultato può essere ottenuto facendo vedere che ogni sottinsieme finito di $\Gamma\cup\Sigma$ è soddisfacibile e sfruttando il teorema di compattezza.

Di fatto in un tale sottinsieme finito S occorrono al più un certo numero, diciamo m_S, di nuovi simboli per costante di C, e si può espandere il modello infinito di Γ, che c'è per ipotesi, interpretando gli m_S simboli per costante di C occorrenti in S in elementi diversi ed interpretando gli altri simboli per costante di C come si vuole. In questa realizzazione che espande il modello di Γ sono vere tutte le formule del sottinsieme finito S (quelle anche di Γ perché la realizzazione espande un modello di Γ, le altre che sono anche in Σ per il particolare modo di eseguire l'espansione). Così, data l'arbitrarietà del sottinsieme finito S, si può concludere che ogni sottinsieme finito di $\Gamma\cup\Sigma$ è soddisfacibile. Così, appunto per il teorema di compattezza, $\Gamma\cup\Sigma$ è soddisfacibile. Tra i suoi modelli c'è certo quello basico che ha per universo le classi di equivalenza di termini del linguaggio $\mathcal{L}'^{\infty}$ occorrenti nell'insieme di Hintikka che è un ramo aperto dell'albero T^{∞} ottenuto come unione degli alberi di confutazione costruiti a partire dall'insieme $\Gamma\cup\Sigma$ (essendo questo soddisfacibile, esisterà un ramo aperto dell'albero T^{∞}). Ovviamente queste classi non possono essere più della cardinalità k del linguaggio $\mathcal{L}'^{\infty}$(ottenuto da $\mathcal{L}'$ aggiungendo i simboli di costante necessari per analizzare le formule del tipo $\neg\forall$), che ha la stessa cardinalità del linguaggio $\mathcal{L}'$. Ma, come si è osservato, Σ, e perciò anche $\Gamma\cup\Sigma$, non può avere modelli di cardinalità minore di k. Così il modello costruito a partire dalle classi di equivalenza di termini avrà cardinalità esattamente k, come volevasi dimostrare.

25. PRIMI LIMITI DEI LINGUAGGI FORMALI.

Si ricordi che due strutture, $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$, dello stesso tipo si dicono isomorfe, e si scriverà $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, se esiste una biiettività (detta isomorfismo) dall'universo della prima sull'universo della seconda che preserva la struttura. Una funzione f dall'universo di una struttura nell'universo di un'altra preserva la struttura se sono soddisfatte le seguenti condizioni:
1) per ogni relazione n-aria R della prima struttura una qualsiasi n-upla $a_1,...,a_n$ del suo universo appartiene alla relazione R se e solo se l'n-upla ordinata $(f(a_1),...,f(a_n))$ che le corrisponde attraverso la funzione f appartiene alla corrispondente relazione (cioè la relazione, nella seconda struttura, associata al predicato associato alla relazione R); e inoltre
2) per ogni funzione n-aria F della prima struttura che fa corrispondere ad una qualsiasi data n-upla ordinata $(a_1,...,a_n)$ del suo universo l'elemento a, la corrispondente funzione (cioè la funzione, nella seconda struttura, associata al simbolo di funzione associato alla funzione F) fa corrispondere all'n-upla $(f(a_1),..., f(a_n))$ l'elemento $f(a)$; ed infine
3) ad ogni costante c della prima struttura la funzione f fa corrispondere la corrispondente costante (cioè la costante, nella seconda struttura, associata al simbolo di costante associato alla costante c).
La nozione di isomorfismo tra strutture collega strutture che non si distinguono per il comportamento degli elementi (elementi corrispondenti si comportano nello stesso modo), ma si distinguono solo per l'identità degli elementi, fatto questo difficilmente accertabile, e, spesso, di scarsa rilevanza. Si può dire che due strutture isomorfe non sono distinguibili dal loro manifestarsi, e sono sostanzialmente la stessa struttura.

Ricordando la nozione di isomorfismo (che dice quando due strutture non sono distinguibili in base al loro comportamento), dal teorema di Lowenheim Skolem si può ottenere il seguente
Corollario. Un insieme di enunciati che ha modello infinito ha modelli tra loro non isomorfi.
Infatti ha modelli di ogni cardinalità maggiore od uguale alla cardinalità del linguaggio, ma due modelli di diversa cardinalità non possono essere tra loro isomorfi (perché tra l'universo dell'uno e quello dell'altro non ci può essere alcuna biiettività).

Ricordando la nozione di elementare equivalenza (che dice quando due strutture non possono essere distinte mediante il linguaggio formale a loro adatto), il precedente teorema ha anche il seguente
Corollario Sia $\mathfrak{A}$ una struttura infinita, allora esiste una struttura $\mathfrak{B}$ non isomorfa ad $\mathfrak{A}$ tale che $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. Detto altrimenti una struttura infinita non può essere univocamente caratterizzata (a meno di isomorfismi) in un qualsiasi linguaggio in cui è descritta.
DIMOSTRAZIONE. Infatti, per il corollario al teorema di Löwenheim Skolem, Th($\mathfrak{A}$) ha modelli non isomorfi avendo un modello infinito, che tuttavia saranno elementarmente equivalenti, relativamente al linguaggio adatto ad $\mathfrak{A}$, proprio perché sono modelli di Th($\mathfrak{A}$).

Si ricordi che nella sezione 11 si era già dimostrato il ben diverso risultato nell'altra direzione. Infatti si era mostrato il seguente

Teorema. Se due strutture sono isomorfe, $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, allora sono elementarmente equivalenti, $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

L'ipotesi che l'insieme di enunciati considerato nel precedente teorema di Lowenheim Skolem abbia modello infinito, può essere leggermente indebolita assumendo, invece, che ci siano modelli finiti arbitrariamente grandi, perché, in tal caso, si dimostra che l'insieme di enunciati ha anche modelli infiniti. Infatti vale il seguente

Teorema. Se un insieme Γ di enunciati ha modelli finiti arbitrariamente grandi allora ha anche modelli infiniti.

Affermando che Γ ha modelli finiti arbitrariamente grandi si vuol dire che fissato un qualunque numero naturale m c'è un modello finito di Γ con almeno m elementi nel universo (di certo non si vuol dire che c'è un certo modello che è finito e che contemporaneamente è arbitrariamente grande (ha cardinalità maggiore di ogni numero naturale), affermazione che non ha senso).

DIMOSTRAZIONE. Sia C un insieme numerabile di nuovi simboli per costante non nel linguaggio usato per le formule di Γ, e si consideri il seguente insieme di enunciati $\Sigma = \{\neg c_i = c_j : c_i \text{ e } c_j \text{ appartengono a C e } i \neq j\}$. Chiaramente un modello di Σ deve essere almeno numerabile. Si consideri ora l'insieme di enunciati $\Gamma \cup \Sigma$. Se questo è soddisfacibile allora c'è un modello di Γ che è infinito. Sicché resta da dimostrare che $\Gamma \cup \Sigma$ è soddisfacibile. Ancora si sfrutta il teorema di compattezza facendo vedere che, nelle ipotesi enunciate, ogni sottinsieme finito di $\Gamma \cup \Sigma$ è soddisfacibile. In effetti, sia Δ un sottinsieme finito di $\Gamma \cup \Sigma$. In Δ occorrono un numero finito q_Δ di nuovi simboli per costanti. Per ipotesi si sa che Γ ha modelli finiti di cardinalità maggiore di un qualsiasi numero naturale, in particolare ha modelli finiti di cardinalità maggiore di q_Δ. Sia $\mathfrak{A}$ un tale modello (il modello è ora una struttura, e non una realizzazione, perché è modello di un insieme di enunciati e non è rilevante l'attribuzione di valori alle variabili). Si espanda $\mathfrak{A}$ ad una nuova struttura $\mathfrak{B}_\Delta$ adatta al linguaggio arricchito con i nuovi simboli di costante in cui i nuovi simboli di costante occorrenti in Δ vengono interpretati in elementi tra loro a due a due diversi, e gli altri nuovi simboli di costanti vengono interpretati come si vuole. Ciò è possibile perché i simboli di costante da interpretare in maniera diversa sono q_Δ e l'universo della struttura ha almeno q_Δ elementi. La struttura $\mathfrak{B}_\Delta$ è allora modello di Δ, che risulta soddisfacibile. Poiché Δ era un qualsiasi sottinsieme finito di $\Gamma \cup \Sigma$, per il teorema di compattezza, $\Gamma \cup \Sigma$ è pure soddisfacibile, e un suo modello oltre a rendere vere gli enunciati di Γ sarà anche infinito, dovendo rendere veri gli enunciati di Σ, come si voleva.

Una **teoria** si dice **categorica** se è soddisfacibile e tutti i suoi modelli sono tra loro isomorfi (si usa dire anche che ha un unico modello a meno di isomorfismi). Dai risultati precedenti segue che

Corollario di non categoricità. Se T è una teoria con almeno un modello infinito, o con modelli finiti arbitrariamente grandi, allora T non è categorica.

Sfruttando ancora il precedente teorema, si vuole fare vedere ora che ci sono certe proprietà delle strutture che non possono essere caratterizzate mediante il linguaggio formale, in particolare la finitezza e la cardinalità.

In generale si dirà che una certa proprietà di una struttura è **definibile mediante un linguaggio formale** se esiste un enunciato in quel linguaggio che è vero esattamente quando è interpretato in strutture con la proprietà da definire. In particolare la finitezza sarebbe definibile se esistesse un enunciato φ vero in tutte e sole le strutture finite: $\mathfrak{A}\models\varphi$ se e sole se $\mathfrak{A}$ è una struttura finita. Analogamente si potrebbe richiedere di caratterizzare la cardinalità infinita di strutture che inoltre soddisfino un certo insieme di enunciati Γ, mediante un enunciato φ: $\mathfrak{A}\models\{\varphi\}\cup\Gamma$ se e sole se $\mathfrak{A}$ è una struttura di cardinalità k, con k cardinale infinito.

Inoltre si dirà che una proprietà di una struttura è **debolmente definibile** mediante un linguaggio se esiste un insieme Σ di enunciati in quel linguaggio che sono veri esattamente quando interpretati in strutture con la proprietà da definire: $\mathfrak{A}\models\Sigma$ se e sole se $\mathfrak{A}$ è una struttura che soddisfa quella certa proprietà.

Corollario di non definibilità della nozione di finito. La finitezza di strutture non è né definibile né debolmente definibile mediante un linguaggio formale, cioè non esiste alcun insieme di enunciati che siano veri esattamente quando interpretati in una arbitraria struttura finita.

DIMOSTRAZIONE. Si supponga per assurdo che esista un tale insieme di enunciati Σ. Esso dovrà essere vero in tutte le strutture finite, e solo in quelle, dunque, in particolare, in strutture finite con un universo che ha un numero finito di elementi, ma in una quantità maggiore di un numero naturale n fissato ad arbitrio. Si è così esattamente nelle ipotesi del teorema precedente, sicché si può concludere che esiste un modello infinito di Σ, contro la definizione dello stesso insieme di enunciati Σ. Dunque un tale insieme di enunciati non può esistere, e la finitezza non è debolmente definibile, né tanto meno definibile, mediante un linguaggio formale.

Corollario di non definibilità della cardinalità di una struttura. Le cardinalità maggiori od uguali alla cardinalità del linguaggio usato non sono definibili, e neppure debolmente definibili mediante un linguaggio formale.

DIMOSTRAZIONE. Si supponga per assurdo che esista un tale insieme di enunciati Σ. Esso dovrà essere vero in tutte le strutture di quella cardinalità infinita k, e solo in quelle. Ma allora Σ ha modelli infiniti, e, per il teorema di Lowenheim Skolem, anche modelli di qualsiasi cardinalità maggiore od uguale a quella del linguaggio, e quindi ha modelli di cardilalità diversa da k, contro la definizione dello stesso insieme di enunciati Σ. Dunque un tale insieme di enunciati non può esistere, e la cardinalità (maggiore od uguale a quella del linguaggio) non è debolmente definibile, né tanto meno definibile, mediante un linguaggio formale.

Si noti che la nozione di infinito non è definibile in un linguaggio formale. Se lo fosse la negazione dell'enunciato che la definirebbe sarebbe una definizione in un linguaggio formale della nozione di finito, che sappiamo non esistere. Invece è debolmente definibile in un linguaggio con infiniti simboli per costante. Infatti basta considerare l'insieme di enunciati $\{\neg c_1=c_2$: c_1 e c_2 sono simboli per costante tra loro diversi$\}$: questo insieme di enunciati è vero in una struttura se e solo se l'universo di quella struttura ha almeno tanti elementi quanti sono i simboli per costante (devono essere interpretati in elementi tra loro a due a due diversi), e l'infinità dei simboli per costante comporta l'infinità della struttura. Questa situazione della nozione di infinito mostra che, se da una parte è banale che la definibilità implica le debole definibilità (per la debole definibilità basta considerare un insieme di enunciati che contiene quello che giustifica la definibilità), dall'altra la debole definibilità non implica la definibilità. Questa implicazione mancata è imputabile al fatto che non è detto che esista un enunciato che sia logicamente equivalente alla negazione di un insieme di enunciati (che non è l'insieme delle negazioni degli enunciati).

I corollari appena ottenuti sono evidenti limiti delle possibilità espressive dei linguaggi formali. E' chiaro che si vorrebbe potere caratterizzare una struttura attraverso enunciati o insiemi di enunciati del linguaggio in modo che quegli enunciati siano veri esattamente in quella struttura o in strutture ad essa isomorfe (che sono sostanzialmente quella struttura). Se si potesse trovare un tale insieme di enunciati potremmo dire di avere caratterizzato e definito quella struttura per mezzo del linguaggio. Il primo corollario ottenuto dice che ciò è impossibile per le strutture infinite. Detto altrimenti non sarà mai possibile precisare attraverso un linguaggio formale la struttura dei numeri naturali, o uno spazio geometrico, o la struttura dei numeri reali.

Si potrebbe obiettare che questo risultato limitativo riguarda i linguaggi formali e non quello naturale. In effetti il linguaggio naturale ha delle proprietà espressive che non sono colte dai linguaggi formali fin qui considerati (che vengono detti linguaggi del primo ordine per motivi che si vedranno in seguito), ma si possono costruire linguaggi formali più espressivi, a cui sarà fatto cenno in seguito (linguaggi del secondo ordine, eccetera), per i quali però rimangono le limitazioni espresse dai corollari appena dimostrati. Con i linguaggi del secondo ordine si saranno essenzialmente colte tutte le proprietà del linguaggio naturale. Ho detto "essenzialmente" perché il linguaggio naturale non può essere specificato completamente a causa della sua duttilità per adattarsi alle varie situazioni.

Ma, appunto per questa sua caratteristica duttilità che impedisce di fissarne il significato una volta per tutte, il linguaggio naturale non potrà (non è una dimostrazione) essere in grado di descrivere una struttura meglio di quanto possa fare un linguaggio formale sufficientemente potente. Così si può concludere che le strutture infinite non possono essere descritte mediante il linguaggio.

Le osservazioni appena svolte si ripetono anche per la nozione di finito e per quella di avere una certa cardinalità infinita, appoggiandosi al secondo e al terzo dei corollari visti. Anche queste nozioni non possono essere descritte mediante il linguaggio, e dunque neppure trasmesse, nonostante ciascuno possa dire di avere una chiara nozione di cosa vuole dire finito ed anche di cosa vuol dire avere una certa cardinalità infinita.

Si porrà allora il problema di come si acquisiscono le nozioni di finito, di numero naturale, di numero reale, di cardinalità infinita, eccetera, che certo non possono essere colte con l'esperienza (i finiti sono in quantità infinita), e neppure attraverso una descrizione linguistica, come si è osservato. Ma questo problema, che verrà lasciato ai fondamenti epistemologici della matematica, indica un limite nei linguaggi, formali in particolare, che non potranno esprimere tutto ciò che si vorrebbe. Questo è un limite anche per certe filosofie che si appoggiano sul linguaggio, come la filosofia analitica.

Ma è un forte limite anche per il celebrato metodo assiomatico così usato in matematica: gli assiomi, che avevano lasciato il loro ruolo di affermazioni di verità evidenti e fondamentali già con la crisi dovuta alla costruzione delle geometrie non euclidee (geometrie equi consistenti, equi accettabili, rispetto alla usuale geometria euclidea, ma in cui certi assiomi della geometria euclidea sono falsi), ora perdono anche la possibilità di indicare di cosa si vuole parlare. Infatti, se sono veri quando sono interpretati nella struttura infinita che si vuole descrivere, saranno veri anche in strutture non isomorfe a quella intesa, che così non sarà da questi caratterizzata. Si ripropone il problema di come cogliere e trasmettere l'idea di quella struttura intesa.

Ci si può chiedere a cosa sono dovuti i limiti dei linguaggi formali appena riscontrati, visto che prima si erano ottenuti dei risultati positivi e lusinghieri al loro riguardo.Infatti si era dimostrato il teorema di completezza che mostrava la completa corrispondenza tra analisi sintattica e contenuto significativo di un insieme di formule: esso è soddisfacibile se e solo se il controllo sintattico conferma questa situazione (cioè se e solo se nessuno degli alberi di confutazione costruiti a partire da quel insieme di formule è chiuso).In base ai legami a suo tempo dimostrati tra soddisfacibilità, validità e conseguenza logica (una formula è valida se e solo se la sua negazione è non soddisfacibile, una formula è conseguenza logica di un insieme di formule se e solo se aggiungendo la sua negazione a quel insieme di formule si ottiene un insieme non soddisfacibile) si può anche controllare sintatticamente la validità di una formula (una formula è valida se e solo se c'è un albero di confutazione chiuso costruito a partire dalla negazione di quella formula), o il fatto che una formula sia conseguenza logica di un insieme di formule ($\Delta \models \varphi$ se e solo se esiste un albero di confutazione chiuso costruito a partire dall'insieme di formula $\Delta \cup \{\neg\varphi\}$). Come mai un linguaggio costruito così bene da permettere di ottenere tutti i risultati di piena corrispondenza dell'analisi sintattica con le nozioni semantiche si dimostra poi insufficiente per descrivere con precisione molte nozioni delle quali si vorrebbe parlare?

In effetti è proprio in questi risultati positivi il motivo dei limiti del linguaggio. Si era cercato di realizzare (e ci si è riusciti) una analisi sintattica delle nozioni semantiche che ci interessavano perché era troppo difficile controllare il verificarsi di queste seguendo la loro definizione, mentre si prospettava un controllo accettabile attraverso l'analisi sintattica. Questa riduzione ad un controllo ragionevole è stata ottenuta per gli insiemi finiti di formule (quindi anche per la validità di una formula) ed anche per gli insiemi infiniti grazie al teorema di compattezza che riduce la ricerca di una contraddizione in un insieme infinito di formule alla ricerca di una contraddizione in un suo sottinsieme finito. Ma proprio questo successo è la fonte dei limiti dei linguaggi formali. Infatti la semplificazione di controllo non permette la situazione in cui un insieme infinito di formule possa portare ad una contraddizione non rilevabile da alcun suo sottinsieme finito. Così l'analisi diventa un po' grossolana, non più così precisa e discriminante come servirebbe per eliminare i limiti all'espressività del linguaggio che stiamo deprecando.

26. ALCUNE TEORIE CATEGORICHE.

L'ipotesi nel teorema di Loweheim Skolem che ci sia un modello infinito non può essere indebolita più di quanto fatto nel precedente teorema, come mostra il seguente

Teorema La teoria di una struttura finita ha solo modelli isomorfi a quella struttura.

COMMENTO. La seguente dimostrazione non è assolutamente banale. Se con i corollari precedenti si erano visti dei limiti dei linguaggi formali, ora si vede che, almeno per quanto riguarda le strutture finite di una certa precisata cardinalità, i linguaggi formali riescono a descriverle esattamente, ovviamente a meno di isomorfismi. Questo è sicuramente un successo dei linguaggi formali. Ai fini di questo studio forse non è poi così importante conoscere bene questa dimostrazione, ma essere coscienti che c'è. Tuttavia si è voluto riportare completamente la dimostrazione anzitutto per coloro che vogliono davvero rendersene conto, ma anche per gli altri perché siano consapevoli che l'affermazione del teorema non è una convinzione basata sull'idea che il finito è controllabile, ma un fatto laboriosamente dimostrato costruendo effettivamente, sfruttando quanto indicato con il linguaggio, la funzione che sarà l'isomorfismo. Inoltre la dimostrazione che segue è un ottimo esempio di come si possa ottenere un legame tra strutture caratterizzate mediante una teoria in un opportuno linguaggio.

DIMOSTRAZIONE. Si ricordi che la teoria di una struttura è l'insieme degli enunciati veri in quella struttura, e, come si è visto, questo insieme di enunciati è completo (nel senso che per ogni enunciato del linguaggio o lui o la sua negazione appartiene all'insieme), sicché ogni suo modello avrà la stessa teoria, cioè sarà elementarmente equivalente alla struttura data. Inoltre si sa che per ogni numero naturale n c'è un enunciato, lo si chiami φ_n, vero esattamente nelle strutture il cui universo ha cardinalità n. Sia $\mathfrak{A}$ la struttura data, abbia cardinalità n_0, e, al solito, sia $Th(\mathfrak{A})$ la sua teoria. Ovviamente φ_{n_0} appartiene a $Th(\mathfrak{A})$, sicché ogni modello di questa teoria dovrà avere esattamente n_0 elementi nell'universo. Sia $\mathfrak{B}$ un altro modello di $Th(\mathfrak{A})$. Si deve far vedere che $\mathfrak{B}$ è isomorfo ad $\mathfrak{A}$. Per far ciò si deve cercare di far corrispondere ad ogni elemento dell'universo A di $\mathfrak{A}$ uno ed un solo elemento dell'universo B di $\mathfrak{B}$. Per trovare il corrispondente, l'idea è di cercare di caratterizzare mediante il linguaggio un elemento dell'universo A di $\mathfrak{A}$ e vedere se nell'universo B di $\mathfrak{B}$ può essere individuato un elemento che soddisfa la stessa caratterizzazione linguistica.

Per caratterizzare mediante il linguaggio un individuo in una struttura è naturale considerare tutte le formule con una sola variabile libera vere in quella struttura quando la variabile viene interpretata nell'individuo che si vuol caratterizzare. Così, se nella struttura $\mathfrak{A}$ con universo A si vuol caratterizzare l'elemento a, si considererà il seguente insieme di formule con al più una variabile libera, $X_1 = \{\varphi(v_0): \mathfrak{A} \models \varphi(v_0)[a]\}$, che è generalmente detto il **tipo** dell'elemento a nella struttura $\mathfrak{A}$. Si noti che, per definizione, X_1 contiene propriamente $Th(\mathfrak{A})$. In un modello del tipo di a, che sarà una struttura $\mathfrak{C}$ con l'attribuzione di un valore alla variabile v_0 almeno, ci dovrà essere un elemento c (appunto il valore attribuito a v_0) che renderà vere in $\mathfrak{C}$ tutte le formule di X_1, cioè tale che, per ogni formula $\varphi(v_0)$ nel tipo di a, $\mathfrak{C} \models \varphi(v_0)[c]$.

Ma l'ipotesi del teorema che si sta cercando di dimostrare chiede di considerare i modelli di $Th(\mathfrak{A})$, e non del più ricco insieme X_1. Per cercare di ricondurre le informazioni che vengono dal tipo di a ad enunciati in $Th(\mathfrak{A})$, si possono considerare gli enunciati ottenuti dalle formule di X_1 quantificandole esistenzialmente rispetto alla variabile v_0, cioè affermando che, per ciascuna formula del tipo di a, c'è almeno un elemento dell'universo (di fatto c'è a) che le rende vere quando la variabile v_0 è interpretata in quel elemento: gli enunciati così ottenuti, cioè quelli dell'insieme $Y_1 = \{\exists v_0 \varphi(v_0): \varphi(v_0) \in X_1\}$ saranno sicuramente in $Th(\mathfrak{A})$.

Ma, a priori, gli enunciati di Y_1 non sono sufficienti per caratterizzare un elemento di un modello di $Th(\mathfrak{A})$ perché non è detto che l'elemento del modello che giustifica la verità di una formula esistenziale di Y_1 sia lo stesso di quello che giustifica la verità di un'altra formula esistenziale di Y_1. Tuttavia l'ipotesi che la struttura $\mathfrak{A}$ sia finita (da cui segue, come si è visto, che anche un modello $\mathfrak{B}$ di Th($\mathfrak{A}$) sia finito) comporta che sia unico l'elemento che giustifica la verità delle formule di Y_1. Infatti, se per assurdo non lo fosse, per ogni elemento b dell'universo B di $\mathfrak{B}$, ci dovrebbe essere una formula, diciamola $\varphi_b(v_0)$, di X_1, per la quale non è vero che $\mathfrak{B}\models\varphi_b(v_0)[b]$. Poiché gli elementi di B sono in numero finito, si può considerare la formula ottenuta prendendo la congiunzione di queste formule, ciascuna in corrispondenza di un b in B, cioè la formula $\psi(v_0)$ che è $\wedge\{\varphi_b(v_0)$: $b\in B\}$, che non può essere vera nella struttura $\mathfrak{B}$ comunque la variabile v_0 sia interpretata in un elemento b di B (per ciascun b in B almeno uno dei congiunti sarebbe falso). D'altra parte, la quantificazione esistenziale di tale formula, cioè la formula $\exists v_0\psi(v_0)$, è una formula di Th($\mathfrak{A}$) perché per ogni b appartenente a B la formula $\varphi_b(v_0)$ appartiene a X_1, cioè è vera nella struttura $\mathfrak{A}$ quando la variabile v_0 viene interpretata in *a*; sicché anche la congiunzione $\psi(v_0)$ è vera nella struttura $\mathfrak{A}$ quando la variabile v_0 viene interpretata in *a*; e quindi è vero in $\mathfrak{A}$ anche l'enunciato ottenuto per quantificazione esistenziale. Ma allora $\mathfrak{B}\models\exists v_0\psi(v_0)$ e ci deve essere un elemento, diciamolo $\underline{b}$, di B tale che $\mathfrak{B}\models\psi(v_0)[\underline{b}]$, assurdo. Pertanto, come era stato asserito, in $\mathfrak{B}$ gli enunciati esistenziali di Y_1 sono resi veri tutti da uno stesso elemento *b* dell'universo B di $\mathfrak{B}$, cioè in B c'è almeno un elemento *b* tale che, per ogni formula $\varphi(v_0)$ appartenente a X_1, si ha che $\mathfrak{B}\models\varphi(v_0)[b]$.

Ma non basta caratterizzare mediante il linguaggio l'elemento *a* e trovargli un corrispondente in $\mathfrak{B}$ per definire una funzione che dovrà essere un isomorfismo da $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}$, ma bisognerà caratterizzare linguisticamente tutti gli elementi dell'universo A di $\mathfrak{A}$. Ingenuamente uno potrebbe pensare di ripetere quanto si è fatto per l'elemento *a* per ogni altro elemento dell'universo A di $\mathfrak{A}$, cioè considerare i tipi di ciascun elemento di A. Però potrebbe succedere che due elementi a_0 e a_1 di A, pur essendo diversi soddisfino lo stesso tipo. Si noti che il tipo di un elemento è formato da formule con una sola variabile libera e non vi può appartenere la formula $\neg v_0=v_1$ che potrebbe distinguere tra gli elementi a_0 e a_1: infatti $\mathfrak{A}\models\neg v_0=v_1[a_0,a_1]$ e ogni modello di $\neg v_0=v_1$ deve interpretare le due variabili in modo diverso. Così i tipi dei singoli elementi dell'universo di A non sono sufficienti per caratterizzare i singoli elementi linguisticamente in modo differenziato. (Si noti che finora non si sono fatti passi sostanziali verso la dimostrazione del teorema, ma si sono solo esplorate alcune vie per capire il contesto, i possibili attacchi e le difficoltà da superare per giungere alla dimostrazione del teorema; ora, prendendo ispirazione da quanto si è discusso, si presenterà la dimostrazione cercata).

Siccome A ha n_0 elementi, si può pensare che A sia $\{a_0,a_1,...,a_{n_0-1}\}$. Così per caratterizzare linguisticamente tutti gli elementi di A si considererà il seguente insieme di formule con al più n_0 variabili libere

$$X = \{\varphi(v_0,v_1,...,v_{n_0-1}): \mathfrak{A}\models\varphi(v_0,v_1,...,v_{n_0-1})[a_0,a_1,...,a_{n_0-1}]\}.$$

Si noti che X contiene gli enunciati $\neg v_{i_0}=v_{i_1}$ con i_0 e i_1 minori di n_0 e diversi tra loro: infatti $\mathfrak{A}\models\neg v_{i_0}=v_{i_1}[a_0,a_1,...,a_{n_0-1}]$ proprio perché a v_{i_0} viene attribuito il valore a_{i_0} e a v_{i_1} viene attribuito il valore a_{i_1} e questi due valori sono diversi. Ad X si può associare l'insieme

$$Y=\{\exists v_0\exists v_1...\exists v_{n_0-1}\varphi(v_0,v_1,..,v_{n_0-1}): \varphi(v_0,v_1,..,v_{n_0-1}) \in X\}$$

di enunciati ciascuno dei quali è ottenuto per quantificazione esistenziale da una formula di X. E' chiaro che Y è un sottinsieme di Th($\mathfrak{A}$), sicché ogni suo enunciato è vero nella struttura $\mathfrak{B}$, se questa è un modello di Th($\mathfrak{A}$). Ma, a priori, non è detto che in $\mathfrak{B}$ questi enunciati esistenziali siano resi veri tutti da una stessa n_0-upla ordinata $(b_0,b_1,...,b_{n_0-1})$ di elementi dell'universo B di $\mathfrak{B}$.

Invece è proprio così. Infatti, se per assurdo non lo fosse, per ogni n_0-upla ordinata $(b_0,b_1,...,b_{n_0-1})$ dell'universo B ci dovrebbe essere una formula, la si chiami $\varphi_{b_0,b_1,...,b_{n_0-1}}(v_0,v_1,...,v_{n_0-1})$, di X, per la quale non è vero che $\mathfrak{B}\models\varphi_{b_0,b_1,...,b_{n_0-1}}(v_0,v_1,..., v_{n_0-1})[b_0,b_1,...,b_{n_0-1}]$. Poiché le n_0-uple ordinate di elementi di B sono in numero finito, si può considerare la formula ottenuta prendendo la congiunzione di queste formule, ciascuna in corrispondenza di una n_0-upla ordinata in B, cioè la formula $\psi(v_0,v_1,..., v_{n_0-1})$ che è $\wedge\{\varphi_{b_0,b_1,...,b_{n_0-1}}(v_0,v_1,...,v_{n_0-1})$: $(b_0,b_1,...,b_{n_0-1})\in B^{n_0}\}$, che non può essere vera nella struttura $\mathfrak{B}$ quando le variabili $v_0,v_1,...,v_{n_0-1}$ sono interpretate in una qualsiasi n_0-upla ordinata di elementi dell'universo B di $\mathfrak{B}$ (in quanto per ciascuna n_0-upla ordinata $(b_0,b_1,..,b_{n_0-1})\in B^{n_0}$ almeno uno dei congiunti è falso). D'altra parte, la quantificazione esistenziale di tale formula, cioè la formula $\exists v_0\exists v_1...\exists v_{n_0-1}\psi(v_0,v_1,.. .,v_{n_0-1})$, è una formula di Th($\mathfrak{A}$) perché per ogni $(b_0,b_1,..,b_{n_0-1})\in B^{n_0}$ la formula $\varphi_{b_0,b_1,...,b_{n_0-1}}(v_0,v_1,...,v_{n_0-1})$ appartiene a X, cioè è vera nella struttura $\mathfrak{A}$ quando le variabili $v_0,v_1,...,v_{n_0-1}$ sono interpretate rispettivamente in $a_0,a_1,...,a_{n_0-1}$; sicché anche la congiunzione $\psi(v_0,v_1,...,v_{n_0-1})$ è vera nella struttura $\mathfrak{A}$ quando le variabili $v_0,v_1,..., v_{n_0-1}$ sono interpretate rispettivamente in $a_0,a_1,...,a_{n_0-1}$; e quindi è vero in $\mathfrak{A}$ anche l'enunciato ottenuto per quantificazione esistenziale. Ma allora $\mathfrak{B}\models\exists v_0\exists v_1...\exists v_{n_0-1}\psi(v_0, v_1,...,v_{n_0-1})$ e ci deve essere una n_0-upla ordinata di elementi, siano $(\underline{b}_0,\underline{b}_1,...,\underline{b}_{n_0-1})$, di B tale che $\mathfrak{B}\models\psi(v_0,v_1,...,v_{n_0-1})$ $[\underline{b}_0,\underline{b}_1,...,\underline{b}_{n_0-1}]$, assurdo. Pertanto, come era stato asserito, in $\mathfrak{B}$ gli enunciati esistenziali di Y possono essere resi veri tutti da una stessa n_0-upla ordinata di elementi dell'universo B di $\mathfrak{B}$, cioè in B c'è almeno una n_0-upla ordinata $(b_0,b_1,...,b_{n_0-1})$ di elementi di B tale che, per ogni formula $\varphi(v_0,v_1,...,v_{n_0-1})$ appartenente a X, si ha che $\mathfrak{B}\models\varphi(v_0,v_1,...,v_{n_0-1})[b_0,b_1,...,b_{n_0-1}]$.

Poiché, come si è osservato, le formule $\neg v_{i_0}=v_{i_1}$ con i_0 e i_1 minori di n_0 e diversi tra loro appartengono a X, esse devono essere vere anche in $\mathfrak{B}$ quando le variabili vengono interpretate in $b_0,b_1,...,b_{n_0-1}$ rispettivamente. Pertanto gli elementi di questa n_0-upla ordinata $(b_0,b_1,...,b_{n_0-1})$ devono essere a due a due diversi, e includeranno tutti gli elementi di B essendo n_0 elementi.

Si è così riusciti a stabilire una corrispondenza biiettiva, diciamola *f*, tra gli elementi di A e quelli di B che occupino un ugual posto nelle due n_0-uple ordinate $(a_0,a_1,..., a_{n_0-1})$ e $(b_0,b_1,...,b_{n_0-1})$.

Resta da dimostrare che *f* è un isomorfismo, cioè che essa preserva la struttura. Ciò vuol dire che bisogna dimostrare che per ogni R, relazione k-aria in $\mathfrak{A}$, e ogni k-upla ordinata $(a_1,...,a_k)$ di elementi di A, si ha che $(a_1,...,a_k)\in R$ se e solo se la corrispondente k-upla ordinata di elementi di B $(f(a_1),...,f(a_k))$ appartiene a R', dove R' è la relazione k-aria in $\mathfrak{B}$ che corrisponde a R (cioè ha ugual nome, diciamo il predicato P). Inoltre bisogna dimostrare che per ogni funzione h-aria F in $\mathfrak{A}$, e ogni h-upla (incluso il caso che h sia 0 per non dover trattare separatamente le costanti) ordinata $(a_1,...,a_h)$ di elementi di A, si ha che $f(F(a_1,..., a_h))=F'(f(a_1),...,f(a_h))$, dove F' è la funzione h-aria in $\mathfrak{B}$ che corrisponde a F (cioè ha ugual nome, diciamo il simbolo di funzione f). Ma questi fatti possono essere descritti con il linguaggio mediante formule atomiche. In effetti ogni elemento a_j, j=1,...,k, della k-upla $(a_1,...,a_k)$ è un elemento a_{n_j} dell'insieme ordinato di tutti gli elementi di A $(a_0,a_1,...,a_{n_0-1})$, e la k-upla $(a_1,...,a_k)$ può essere indicata come $(a_{n_1},...,a_{n_k})$, sicché $(a_1,...,a_k)\in R$ se e solo se $\mathfrak{A}\models Pv_{n_1}..\,.v_{n_k}[a_0,a_1,...,a_{n_0-1}]$, se e solo se $\mathfrak{B}\models Pv_{n_1}...v_{n_k}[b_0,b_1,...,b_{n_0-1}]$, se e solo se $(f(a_1),..\,.,f(a_k))\in R'$. Analogamente, supposto che $F(a_1,...,a_h)=a=a_{n_{h+1}}$, si ha che $F(a_1,..,a_h)=a$ se e solo se $\mathfrak{A}\models fv_{n_1}...v_{n_h}=v_{n_{h+1}}[a_0,\ a_1,...,a_{n_0-1}]$, se e solo se $\mathfrak{B}\models fv_{n_1}...v_{n_h}=v_{n_{h+1}}[b_0,b_1,...,b_{n_0-1}]]$, se e solo se $f(F(a_1,..\,.,a_h))=f(a)=F'(f(a_1),...,f(a_h))$.

Così f è davvero un isomorfismo e la dimostrazione è completata.

27. ULTERIORI CONSEGUENZE DEL TEOREMA DI COMPATTEZZA.

Per avere esempi di strutture elementarmente equivalenti ma non isomorfe, si è fatto ricorso al teorema debole di Lowenheim Skolem facendo cadere l'isomorfismo a causa della diversa cardinalità delle strutture. Ma si possono fare anche esempi di strutture elementarmente equivalenti, non isomorfe e della stessa cardinalità infinita (si rammenti che il fatto di essere della stessa cardinalità infinita non è esprimibile mediante il linguaggio formale, sicché è una ipotesi espressa nel metalinguaggio). Per esibire un tale esempio si farà ricorso ancora direttamente al teorema di compattezza.

Teorema. Si consideri l'usuale struttura dei numeri naturali $\mathfrak{N}=(\mathbb{N},\{\equiv,\angle\},\{succ,\oplus,\oplus\},\{0\})$, dove $\mathbb{N}$ rappresenta l'insieme dei numeri naturali, $\equiv$ la relazione binaria di essere lo stesso numero, $\angle$ l'usuale relazione binaria d'ordine tra numeri naturali, succ la funzione successore immediato, $\oplus$ l'addizione tra numeri naturali, $\oplus$ la moltiplicazione tra numeri naturali e 0 il numero naturale zero. Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio adatto alla struttura introdotta i cui simboli propri siano rispettivamente i predicati = e <, i simboli per funzione ', + e ×, e il simbolo per costante 0. Esiste una struttura numerabile $\mathfrak{N}'$, elementarmente equivalente ad $\mathfrak{N}$, ma non isomorfa a questa.

DIMOSTRAZIONE. Come già osservato, per essere elementarmente equivalenti, due strutture devono essere modello della stessa teoria di una struttura, in questo caso della Th($\mathfrak{N}$).

Poiché si è deciso di considerare l'uguaglianza come simbolo logico, è chiaro come debba essere interpretato il simbolo = in un qualsiasi modello di Th($\mathfrak{N}$).

Ma come vanno interpretati gli altri simboli propri di $\mathcal{L}$ in un modello di Th($\mathfrak{N}$)? Dal momento che $\angle$ è una relazione d'ordine totale, essa è antiriflessiva, tricotomica e transitiva, proprietà che sono esprimibili nel linguaggio $\mathcal{L}$ dai tre enunciati $\forall v_0\neg v_0<v_0$, $\forall v_0\forall v_1(v_0<v_1\vee v_0=v_1\vee v_1<v_0)$, $\forall v_0\forall v_1\forall v_2((v_0<v_1\wedge v_1<v_2)\rightarrow v_0<v_2)$, che dunque apparterranno alla Th($\mathfrak{N}$) e così ogni modello di questa dovrà interpretare il predicato < in una relazione binaria d'ordine totale. Analogamente, poiché 0 è il minimo numero naturale rispetto alla relazione $\angle$, e ciò è esprimibile dall'enunciato $\forall v_0((\neg 0=v_0)\rightarrow 0<v_0)$ che apparterrà alla Th($\mathfrak{N}$), allora ogni modello di questa dovrà interpretare il simbolo per costante 0 in una costante che dovrà essere il minimo elemento rispetto alla relazione d'ordine che interpreta <. Sfruttando l'esprimibilità mediante opportune formule (la cui determinazione a questo punto è lasciata per esercizio) delle usuali proprietà delle funzioni successore, addizione e moltiplicazione, si conclude che anche le funzioni che interpreteranno, in un modello di Th($\mathfrak{N}$), i simboli corrispondenti a dette funzioni avranno le corrispondenti proprietà.

Per far cadere l'isomorfismo, l'idea è di mostrare che ci deve essere un modello di Th($\mathfrak{N}$) con un elemento maggiore (nella relazione d'ordine che interpreta < in quella struttura) di tutte le interpretazioni dei nomi dei numeri naturali, in modo che ci siano difficoltà nel trovargli un corrispondente in un tentativo di individuare un isomorfismo, che infine risulterà non esistente.

Costruire un tale modello è un'impresa improba. L'aggiunta di un elemento all'universo, da pensare come più grande di ogni altro elemento, non funziona perché bisogna, pur con l'aggiunta di tale elemento, ottenere ancora un modello di Th($\mathfrak{N}$).E' immediato che ciò non è vero perché, per rispettare l'enunciato $\forall v_0 \exists v_1\ v_0<v_1$ vero nella struttura $\mathfrak{N}$) dal momento che in $\mathfrak{N}$ ogni elemento ha degli elementi maggiori, anche l'elemento introdotto come maggiore degli altri deve averne di più grandi. Si potrebbe continuare nel proporre l'aggiunta di altri elementi, ma sempre si dovrebbero estendere le relazioni e le funzioni in modo da rendere veri tutti gli infiniti enunciati di Th($\mathfrak{N}$) e non c'è speranza di poter fare ciò con un numero ragionevole di controlli.

Viste queste difficoltà, e ricordando quanto si è fatto finora, si può tentare di dimostrare per altra via l'esistenza di una tale struttura. L'idea è di caratterizzare mediante un insieme di enunciati in un linguaggio arricchito la nuova proprietà che si vuole aggiungere ai modelli di Th($\mathfrak{N}$) (la nuova proprietà in questo caso è avere un elemento maggiore di tutti quelli già dati), e successivamente mostrare che l'insieme degli enunciati ottenuto aggiungendo quelli detti alla Th($\mathfrak{N}$) è soddisfacibile e quindi avrà un modello che sarà la struttura che si cerca. A prima vista può sembrare di non aver fatto alcun passo avanti perché per mostrare che un insieme di enunciati è soddisfacibile bisogna esibire una struttura che li renda veri, e saremmo ritornati alla difficoltà precedente di costruire una tale struttura. Tuttavia, si può cercare di dimostrare la soddisfacibilità senza esibire un modello, ma ricorrendo a risultati ottenuti. Ad esempio si può ricorrere al teorema di compattezza che assicura la soddisfacibiltà di un insieme di formule se i suoi sottinsiemi finiti sono soddisfacibili, anche se non si è in grado si dire quale sarà un modello che certifichi la soddisfacibilità dell'insieme, anche se bisognerà dimostrare la soddisfacibilità dei sottinsiemi finiti. Si ricordi che il teorema di compattezza è stato dimostrato grazie all'uso del lemma di Zorn, equivalente all'assioma della scelta, e fornisce l'esistenza di un modello anche se non si sa bene quale sia (si riveda a proposito il commento sull'assioma della scelta).

Così, per imporre mediante il linguaggio ad un modello di Th($\mathfrak{N}$) di contenere un elemento maggiore delle interpretazioni dei nomi dei numeri naturali, si può inventare un nuovo simbolo di costante, lo si chiami c, e considerare l'insieme degli enunciati ciascuno dei quali è vero solo se l'interpretazione del simbolo di costante c è maggiore dell'interpretazione del nome di un numero naturale. Fortunatamente ciascun elemento n di $\mathbb{N}$ ha un nome che è il termine ottenuto usando n volte il simbolo di funzione successore e il simbolo di costante 0; si indicherà con $\underline{n}$ il termine ottenuto applicando n volte il simbolo per funzione ' al simbolo per costante 0. Così si consideri l'insieme di enunciati $\Sigma=\{0<c, '0<c, ''0<c, '''0<c, \dots\} = \{\underline{n}<c: n \text{ è un numero naturale}\}$: ovviamente una struttura in cui siano veri questi enunciati dovrà avere un elemento che interpreta c maggiore (nel senso della relazione d'ordine di quella struttura) di tutti gli elementi che interpretano i nomi dei numeri naturali.

Si consideri l'insieme di enunciati Th($\mathfrak{N}$)$\cup\Sigma$ nel linguaggio $\mathcal{L}'$ ottenuto dal linguaggio $\mathcal{L}$ aggiungendo il simbolo di costante c. Si noti che la cardinalità di $\mathcal{L}'$ è il numerabile, come quella di $\mathcal{L}$.

Come anticipato, per mostrare che Th($\mathfrak{N}$)$\cup\Sigma$ ha modello senza dover costruirlo direttamente, si può sfruttare il teorema di compattezza e far vedere che ogni sottinsieme finito di Th($\mathfrak{N}$)$\cup\Sigma$ ha modello. Così sia S un qualsiasi sottinsieme finito di Th($\mathfrak{N}$)$\cup\Sigma$: si dovrà dimostrare che S è soddisfacibile. Poiché S contiene degli enunciati della Th($\mathfrak{N}$) si può avviare la ricerca si un modello di S proprio a partire da $\mathfrak{N}$ che almeno renderà veri gli enunciati di S che sono pure in Th($\mathfrak{N}$). Però $\mathfrak{N}$ non può bastare perché in $\mathfrak{N}$ non si interpreta c che può occorrere in S. Ecco allora l'idea di espandere $\mathfrak{N}$ con l'aggiunta di una opportuna interpretazione del simbolo per costante c. Poiché S è un insieme finito di enunciati, e questi sono successioni finite di simboli, S conterrà un numero finito di termini che sono nomi di numeri naturali, e sia n_S il più grande numero naturale interpretazione di tali termini nella struttura $\mathfrak{N}$ (ovviamente tale n_S dipende da S). Se si espande la struttura $\mathfrak{N}$ ad una struttura $\mathfrak{N}^*$ adatta al linguaggio arricchito con il simbolo per costante c interpretando c in n_S+1 si ottiene una struttura in cui sono veri tutti gli enunciati di S che sono in Th($\mathfrak{N}$) per quanto si era già osservato, ad anche gli altri enunciati di S, appunto per la scelta del numero in cui interpretare c, sicché gli enunciati di S sono veri in tale espansione $\mathfrak{N}^*$ di $\mathfrak{N}$,e pertanto S è soddisfacibile.Così si può concludere, proprio per il teorema di compattezza e grazie all'arbitrarietà del sottinsieme finito S di Th($\mathfrak{N}$)$\cup\Sigma$, che Th($\mathfrak{N}$)$\cup\Sigma$ è soddisfacibile, cioè ha un modello, anche se non si ha la minima idea di come questo sia fatto. Poiché alla Th($\mathfrak{N}$) appartengono tutti gli enunciati del tipo $\neg\underline{n}=\underline{m}$ con n e m numeri naturali tra loro diversi (dal momento che tali enunciati sono veri in $\mathfrak{N}$), ogni modello di Th($\mathfrak{N}$) (e, quindi, anche di Th($\mathfrak{N}$)$\cup\Sigma$) dovrà avere un universo con infiniti elementi per interpretare i termini del tipo $\underline{n}$, per ogni numero naturale n, in elementi diversi dell'universo, al fine di rendere veri detti enunciati. Poiché, dunque, Th($\mathfrak{N}$)$\cup\Sigma$ ha modelli infiniti, per il teorema di Lowenheim Skolem visto nella scorsa lezione, Th($\mathfrak{N}$)$\cup\Sigma$ avrà modelli di qualsiasi cardinalità maggiore od uguale alla cardinalità del linguaggio $\mathcal{L}'$, che, si è già visto, essere numerabile: in particolare Th($\mathfrak{N}$)$\cup\Sigma$ avrà almeno un modello numerabile, lo si chiami $\mathfrak{A}''$. Il modello ottenuto da $\mathfrak{A}''$ trascurando di interpretare c (pertanto adatto al linguaggio $\mathcal{L}$), cioè la riduzione al linguaggio $\mathcal{L}$ della struttura $\mathfrak{A}''$, chiamiamolo $\mathfrak{A}'$, sarà ancora esattamente numerabile, ed elementarmente equivalente, relativamente al linguaggio $\mathcal{L}$, a $\mathfrak{N}$ dovendo essere modello di Th($\mathfrak{N}$).Infine $\mathfrak{A}'$ non può essere isomorfo a $\mathfrak{N}$ poiché, se ci fosse una funzione *f* che realizza l'isomorfismo, l'elemento $\underline{c}$ (che nella struttura $\mathfrak{A}''$ interpreta c, e che è presente anche nell'universo di $\mathfrak{A}'$, che è uguale a quello di $\mathfrak{A}''$, anche se nella struttura $\mathfrak{A}'$ non è una costante), dovrebbe corrispondere, tramite *f*, ad un numero naturale che ha un numero finito di predecessori (nell'ordine $\angle$) mentre $\underline{c}$ ne ha infiniti (nell'ordine che interpreta < in $\mathfrak{A}'$), e ciò impedirebbe di preservare la relazione d'ordine, e *f* non può essere un isomorfismo.

Il risultato precedente è n esempio di teoria completa con modelli non isomorfi di cardinalità numerabile.

In generale una teoria con modelli non isomorfi della stessa cardinalità α viene detta non α-categorica, mentre sarà detta **α-categorica** se tutti i suoi modelli di cardinalità α sono tra loro isomorfi. Esistono risultati molto interessanti sulla α-categorica o meno di teorie al variare della cardinalità α e della cardinalità del linguaggio, ma questi vanno oltre l'obiettivo di queste note e non saranno toccati qui. Piuttosto vengono riportate, in appendice B, altre conseguenze del teorema di compattezza che hanno un certo interesse anche per quello che dicono di fondamentali nozioni della matematica.

28. IMMERSIONE DI UNA STRUTTURA IN UN'ALTRA, SOTTOSTRUTTURE, SOTTOSTRUTTURE ELEMENTARI.

Nel paragrafo precedente a partire da strutture date si sono costruite altre strutture elementarmente equivalenti alla corrispondente di partenza, e con ulteriori proprietà, ma non si è stabilito alcun rapporto tra gli elementi della struttura di partenza e quelli della struttura costruita: infatti questa doveva essere modello di un certo insieme di enunciati, ma ciò non dà alcuna informazione su chi sono gli elementi dell'universo. Nonostante si voglia mantenere un atteggiamento che si cura più del comportamento degli elementi che non di chi sono, tuttavia a partire da una certa struttura sarebbe naturale costruire altre strutture, in opportuni rapporti con la prima, proprio a partire dagli elementi di questa. I prossimi risultati tenderanno ad evidenziare i progressi che si possono fare in questa direzione, e si baseranno su nozioni che si devono ora definire.
Si è già detto cosa si intende per isomorfismo tra strutture dello stesso tipo e quando due strutture sono isomorfe. Si è anche già detto quando due strutture sono elementarmente equivalenti rispetto al linguaggio minimo a cui sono adatte o rispetto ad un altro linguaggio. Ancora si sono già definiti i concetti di espansione e riduzione di una struttura o di una realizzazione. Ora si vogliono indagare, con maggiore attenzione, altri tipi di rapporti che possono intercorrere tra strutture, ricordando anzitutto alcune nozioni già introdotte.

Per **ampliamento** o **arricchimento** di un linguaggio $\mathcal{L}$ si intende un linguaggio $\mathcal{L}'$ che contenga il precedente $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}'\supseteq\mathcal{L}$.

Un'**espansione** di una struttura $\mathfrak{A}$ ad un linguaggio $\mathcal{L}'$ che arricchisce il linguaggio $\mathcal{L}$ adatto alla struttura data è una struttura $\mathfrak{A}'$ adatta al linguaggio $\mathcal{L}'$ tale che 1) ha lo stesso universo di $\mathfrak{A}$; 2) i simboli di $\mathcal{L}$ sono interpretati nello stesso modo sia in $\mathfrak{A}'$ che in $\mathfrak{A}$; 3) in $\mathfrak{A}'$ sono interpretati anche i simboli di $\mathcal{L}'$-$\mathcal{L}$.

La **riduzione** di una struttura è l'operazione inversa dell'espansione: data una struttura $\mathfrak{A}$ adatta ad un linguaggio $\mathcal{L}$, la sua riduzione al linguaggio $\mathcal{L}'$ contenuto in $\mathcal{L}$ è la struttura $\mathfrak{A}'$ ottenuta da $\mathfrak{A}$ trascurando di interpretare i simboli in $\mathcal{L}$ - $\mathcal{L}'$. Si noti che $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{A}'$ hanno lo stesso universo, interpretano in modo uguale i simboli in $\mathcal{L}'$, e $\mathfrak{A}$ è una espansione di $\mathfrak{A}'$.

Si dice **finita** una struttura il cui universo sia finito. Più in generale, si dice **cardinalità di una struttura** la cardinalità dell'universo di quella struttura.
Si noti che l'espansione, non cambiando l'universo della struttura, non cambia la cardinalità della struttura.

Per **immersione** di una struttura $\mathfrak{A}$ in un'altra $\mathfrak{B}$ si intende una funzione totale iniettiva ϕ dall'universo di una nell'universo dell'altra che preserva la struttura. Si è già detto cosa si intende per preservare la struttura quando si è introdotta la nozione di isomorfismo. Si noti che una immersione è quasi un isomorfismo: manca solo la suriettività della funzione. Così una immersione suriettiva è un isomorfismo.
Si dice che una struttura **si immerge** in un'altra se c'è una immersione dalla prima nella seconda.
Un esempio di immersione è il seguente. Si considerino la struttura $\mathfrak{A} = (\mathbb{N},\{\equiv,\angle\},\emptyset,\{1\})$ e la struttura $\mathfrak{B} = (\mathbb{N}-\{0\}, \{\equiv,\angle\},\emptyset,\{1\})$. Si vede facilmente che la funzione identica f dai naturali privati dello zero nei naturali definita da f(n)=n è un'immersione di $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{A}$: la sua totalità, iniettività e il preservare sia l'uguaglianza che l'ordine che la costante sono evidenti. Tuttavia le due strutture si distinguono mediante il linguaggio, cioè non sono elementarmente equivalenti. Infatti l'enunciato $\forall v_0 \neg v_0<1$ è vero in $\mathfrak{B}$ ma non in $\mathfrak{A}$. Ciò mostra che la nozione di immersione tra strutture non è molto forte, e decisamente più debole della nozione di isomorfismo anche al di là della mancanza della suriettività.

Un rafforzamento della nozione di immersione è la seguente nozione di immersione elementare.
Per **immersione elementare** di una struttura $\mathfrak{A}$ in un'altra $\mathfrak{B}$ dello stesso tipo si intende una funzione ϕ dall'universo di una nell'universo dell'altra tale che per ogni formula φ del linguaggio adatto ad $\mathfrak{A}$ con variabili tra le prime n+1 e per ogni (n+1)-upla ordinata $(a_0,...,a_n)$ di elementi dell'universo di $\mathfrak{A}$ si ha che $\mathfrak{A}\models\varphi[a_0,...,a_n]$ se e solo se $\mathfrak{B}\models\varphi[\phi(a_0),...,\phi(a_n)]$.
Banalmente, se una struttura $\mathfrak{A}$ si immerge elementarmente in un'altra $\mathfrak{B}$, allora le due sono elementarmente equivalenti, $\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B}$, rispetto al linguaggio loro adatto (segue dal fatto che tra le formule ci sono anche gli enunciati la cui verità nell'interpretazione non dipende dall'attribuzione di valore alle variabili).

Si osservi che una immersione elementare di una struttura $\mathfrak{A}$ in una struttura $\mathfrak{B}$ è una immersione di $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}$. Per poter sostenere questa affermazione si deve far veder che la funzione ϕ è totale, iniettiva e preserva la struttura. Questi tre fatti saranno mostrati separatamente.
1) ϕ è totale perché $\mathfrak{A}\models v_0=v_0[a]$ per ogni $a\in A$, così deve essere anche $\mathfrak{A}'\models v_0=v_0[\phi(a)]$ e a appartenere al dominio di ϕ.
2) ϕ è iniettiva perché fissata una qualsiasi coppia di elementi diversi a_1 e a_2 dell'universo A, si ha che $\mathfrak{A}\models \neg v_0=v_1[a_1,a_2]$, sicché deve essere anche $\mathfrak{A}'\models \neg v_0=v_1[\phi(a_1), \phi(a_2)]$, così $\phi(a_1)$ sarà diverso da $\phi(a_2)$.
3) Per mostrare che ϕ preserva la struttura, si consideri una qualsiasi n-upla ordinata di elementi dell'universo di A, $(a_1,...,a_n)$, e, dapprima, si supponga che R sia una qualsiasi relazione n-aria della struttura $\mathfrak{A}$ cui è associato il predicato n-ario P. Allora $(a_1,..$

.,a_n)$\in$R se e solo se $\mathfrak{A}\models$ P$v_0,...,v_{n-1}[a_1,...,a_n]$, ed anche, poiché ϕ è una immersione elementare, se e solo se $\mathfrak{A}'\models$ P$v_0,...,v_{n-1}[\phi(a_1),...,\phi(a_n)]$, e ciò avviene se e solo se $(\phi(a_1),...,\phi(a_n))\in$R', dove R' è la relazione che interpreta P in $\mathfrak{A}'$. Ciò mostra che ϕ preserva le relazioni.

Analogamente, per le funzioni, si supponga che F sia una qualsiasi funzione n-aria della struttura $\mathfrak{A}$ cui è associato il simbolo di funzione f. Allora F$(a_1,...,a_n)$=a se e solo se $\mathfrak{A}\models$ f$v_0,...,v_{n-1}=v_n$ $[a_1,...,a_n, a]$, ed anche, ancora poiché ϕ è una immersione elementare, se e solo se $\mathfrak{A}'\models$ f$v_0,...,v_{n-1}=v_n$ $[\phi(a_1),...,\phi(a_n),\phi(a)]$, e, di nuovo, ciò avviene se e solo se F'$(\phi(a_1),...,\phi(a_n))=\phi(a)$, dove F' è la funzione che interpreta f in $\mathfrak{A}'$.

Similmente, per le costanti, si supponga che $\underline{c}$ sia una qualsiasi costante della struttura $\mathfrak{A}$ cui è associato il simbolo di costante c. Allora $\mathfrak{A}\models$ c=v_0 [$\underline{c}$]. Ma, poiché ϕ è una immersione elementare, ciò avviene se e solo se $\mathfrak{A}'\models$ c=v_0 [$\phi(\underline{c})$], cioè se e solo se $\underline{c}' = \phi(c)$, dove $\underline{c}'$ è la costante che interpreta c in $\mathfrak{A}'$.

Si è già osservato che se una struttura si immerge elementarmente in un'altra allora le due sono elementarmente equivalenti. In generale non vale il viceversa come si può facilmente vedere sfruttando il teorema di Lowenheim Skolem. Infatti tra due strutture elementarmente equivalenti ma di diversa cardinalità non può esistere un'immersione da quella di cardinalità maggiore in quella di cardinalità minore, e tanto meno un'immersione elementare. Tuttavia, se si aggiunge l'ipotesi che una delle due strutture sia tale che ogni elemento del suo universo abbia nome, la situazione cambia, come è asserito nel seguente

Teorema di immersione elementare. Si supponga che le strutture $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ siano elementarmente equivalenti rispetto al linguaggio $\mathcal{L}$ in cui ogni elemento dell'universo di $\mathfrak{A}$ ha nome (cioè è l'interpretazione di un termine), $\mathfrak{A} \equiv_{\mathcal{L}} \mathfrak{B}$. Se ad un qualsiasi elemento della prima struttura si associa l'elemento della seconda struttura che ha lo stesso nome (possibile perché tutti gli elementi della prima struttura hanno nome), la funzione così ottenuta è una immersione elementare.

DIMOSTRAZIONE. Sostanzialmente il motivo è che il linguaggio è sufficientemente ricco per determinare il comportamento di ogni relazione e di ogni funzione delle strutture. Infatti, anzitutto la corrispondenza descritta nell'enunciato è una funzione, la si chiami ϕ, dall'universo di $\mathfrak{A}$ in quello di $\mathfrak{B}$, e poi per ogni (n+1)-upla $a_o,...,a_n$ di elementi dell'universo di $\mathfrak{A}$ si ha che $\mathfrak{A}\models\varphi(v_0,...,v_n)[a_0,...,a_n]$ se e solo se $\mathfrak{A}\models\varphi(v_0/t_0,..., v_n/t_n)$, dove $t_0,...,t_n$ sono i termini che sono i nomi di $a_o,...,a_n$ rispettivamente, ma, per l'elementare equivalenza, ciò vale se e solo se $\mathfrak{B}\models\varphi(v_0/t_0,...,v_n/t_n)$, che vale se e solo se $\mathfrak{B}\models\varphi(v_0,...,v_n)[(t_1)^{\mathfrak{B}},...,(t_n)^{\mathfrak{B}}]$, cioè se e solo se $\mathfrak{B}\models\varphi(v_0,...,v_n)[\phi(a_0),...,\phi(a_n)]$, sicché ϕ è una immersione elementare.

Si dice che una struttura è **indicizzata** se l'insieme delle sue costanti (che sono gli elementi dell'universo evidenziati nella struttura) coincide con il suo universo.

Poiché in una struttura indicizzata ogni elemento dell'universo ha nome, alle strutture di questo tipo si applica il teorema appena dimostrato.

Le considerazioni svolte da ultimo ci indicano la strada per rafforzare il corollario al teorema di Lowenheim Skolem. In esso si parla di strutture elementarmente equivalenti ad una struttura infinita data, ma non isomorfe ad essa, e se ne asserisce l'esistenza senza alcuna ulteriore precisazione di legami tra la struttura ottenuta e quella di partenza. Invece, proprio in base a quanto visto, si può dire ben di più. Di fatto si dimostra il seguente

Primo corollario al teorema di immersione elementare. Data una qualsiasi struttura infinita, esiste una struttura, di una cardinalità arbitrariamente fissata maggiore od uguale al massimo tra la cardinalità del linguaggio e quella della struttura data, in cui la struttura data si immerge elementarmente.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathfrak{A}$ la struttura data e $\mathcal{L}$ il linguaggio ad essa adatto. Si espanda $\mathfrak{A}$ ad una struttura $\mathfrak{A}'$ aggiungendo una costante per ciascun elemento dell'universo. Il linguaggio adatto ad $\mathfrak{A}'$ sarà $\mathcal{L}'$ ottenuto da $\mathcal{L}$ aggiungendo un nuovo simbolo di costante per ciascun elemento dell'universo, così $\mathfrak{A}'$ è una struttura indicizzata nel linguaggio $\mathcal{L}'$. La cardinalità del nuovo linguaggio sarà il massimo tra le cardinalità del linguaggio di partenza e la cardinalità della struttura, e sia k un qualsiasi cardinale maggiore od uguale a tale massimo. Si applichi ora il teorema di Lowenheim Skolem a partire dall'insieme Th($\mathfrak{A}'$) di enunciati di $\mathcal{L}'$. Si otterrà un modello, lo si chiami $\mathfrak{B}'$ di Th($\mathfrak{A}'$) di cardinalità k. Per quanto osservato precedentemente, $\mathfrak{A}'$ si immerge elementarmente in $\mathfrak{B}'$. Passando alla riduzione di $\mathfrak{B}'$ al linguaggio $\mathcal{L}$, la si chiami $\mathfrak{B}$, questa ha lo stesso universo di $\mathfrak{B}'$, sicché la sua cardinalità rimane k, ed inoltre rimane la funzione che era l'immersione di $\mathfrak{A}'$ in $\mathfrak{B}'$, che ora può essere letta come immersione elementare di $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}$, c.v.d..

Secondo corollario al teorema di immersione elementare. Una qualsiasi struttura indicizzata si immerge elementarmente in ogni modello della sua teoria.

DIMOSTRAZIONE. Basta notare che ogni modello delle teoria della struttura data è elementarmente equivalente a questa, e applicare il teorema di immersione elementare.

Ma si può fare ancora meglio. Il sapere che una struttura si immerge elementarmente in un'altra non ci dice ancora chi sono esattamente gli elementi della nuova struttura che corrispondono a quelli della vecchia. Per dare una risposta più puntuale ci servono le seguenti definizioni.

Si dice che una struttura $\mathfrak{B}$ **estende** una struttura $\mathfrak{A}$, e che $\mathfrak{A}$ è una **sottostruttura** di una struttura $\mathfrak{B}$ (e lo si indica così:$\mathfrak{B}\supseteq\mathfrak{A}$) se

1) $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{A}$ sono strutture dello stesso tipo (cioè adatte allo stesso linguaggio),

2) l'universo B di $\mathfrak{B}$ contiene l'universo A di $\mathfrak{A}$, B⊇A,

3) A è chiuso rispetto alle funzioni della struttura $\mathfrak{B}$ (cioè per ogni numero naturale n e per ogni funzione n-aria F di $\mathfrak{B}$ e per ogni n-upla $a_1,...,a_n$ di elementi di A risulta che $F(a_1,...,a_n)\in A$),

4) le relazioni e le funzioni di $\mathfrak{A}$ sono le relazione e le funzioni di $\mathfrak{B}$ con lo stesso nome ristrette ad A.

Nella situazione descritta, si dice anche che $\mathfrak{A}$ è **una restrizione di $\mathfrak{B}$ all'insieme** A, e per $\mathfrak{A}$ si usa la notazione $\mathfrak{B}_{|A}$.

E' ovvio che la funzione identica su A è una immersione di $\mathfrak{B}_{|A}$ in $\mathfrak{B}$. Vale, banalmente, anche il viceversa: se la funzione identica sull'universo di una struttura è una immersione di questa in una seconda struttura allora la seconda struttura estende la prima.

Si dice che $\mathfrak{B}$ **estende elementarmente** la struttura $\mathfrak{A}$, e che $\mathfrak{A}$ è **sottostruttura elementare** della struttura $\mathfrak{B}$ (e si indica così: $\mathfrak{B} \succ \mathfrak{A}$) se

1) $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}$, ed inoltre

2) per ogni formula φ le cui variabili sono tra le prime n e per ogni n-upla $a_0,...,a_{n-1}$ di elementi di A si ha che $\mathfrak{B} \models \varphi[a_0,...,a_{n-1}]$ se e solo se $\mathfrak{A} \models \varphi[a_0,...,a_{n-1}]$.

Tra la nozione di sottostruttura e quella di sottostruttura elementare c'è un legame molto stretto. Infatti una sottostruttura è quasi una sottostruttura elementare nel senso che, come si vedrà nel prossimo teorema ed in particolare nella sua dimostrazione, se si volesse dimostrare che ogni sottostruttura è una sottostruttura elementare c'è solo un punto nell'induzione sulla costruzione delle formule in cui la dimostrazione non funziona. Per superare quel punto è necessaria un'ipotesi ulteriore che è precisata nel seguente teorema

Teorema. Sia $\mathfrak{A}$ una sottostruttura di $\mathfrak{B}$. Sia A l'universo di $\mathfrak{A}$ e B l'universo di $\mathfrak{B}$. $\mathfrak{A}$ è una sottostruttura elementare di $\mathfrak{B}$ se e solo se fissata una qualsiasi formula φ le cui variabili libere occorrano tra le prime n, per ogni n-upla $(a_0,...,a_{n-1})$ di elementi di A e un qualsiasi ulteriore elemento b di B esiste un elemento a di A tale che se $\mathfrak{B} \models \varphi[a_0,..., a_{n-1},b]$ allora $\mathfrak{B} \models \varphi[a_0,...,a_{n-1}, a]$.

DIMOSTRAZIONE. Essendo $\mathfrak{A}$ una sottostruttura di $\mathfrak{B}$, per far vedere che è sottostruttura elementare basta far vedere che per ogni formula φ le cui variabili sono tra le prime n e per ogni n-upla $a_0,..., a_{n-1}$ di elementi di A si ha che $\mathfrak{B} \models \varphi[a_0,...,a_{n-1}]$ se e solo se $\mathfrak{A} \models \varphi[a_0,...,a_{n-1}]$. Si dimostrerà questa proprietà per induzione nella costruzione della formula φ.

Anzitutto si osservi che, per un qualsiasi numero naturale n, se $\underline{a}$ è una attribuzione di valori alle variabili che alle prime n variabili assegna i valori $a_0,..., a_{n-1}$ dell'universo A di $\mathfrak{A}$ e t è un termine in cui occorrono variabili solo entro le prime n, allora $t^{\sigma}=t^{\sigma'}$ dove σ è l'interpretazione $(\mathfrak{A}.\underline{a})$ e σ' è $(\mathfrak{B},\underline{a})$. Infatti, argomentando per induzione sulla costruzione dei termini, se t è un simbolo di costante o una variabile allora è pressoché immediato vedere che $t^{\sigma}=t^{\sigma'}$; se poi t è il termine $ft_1...t_m$ allora, per ipotesi induttiva, per ogni $i \leq m$ $t_i^{\sigma}=t_i^{\sigma'}$, sicché$(ft_1...t_m)^{\sigma} = f^{\sigma}(t_1^{\sigma},...,t_m^{\sigma}) = f^{\sigma'}(t_1^{\sigma'},...,t_m^{\sigma'}) =(ft_1...t_m)^{\sigma'}$.

Si avvii ora l'induzione e si cominci con il considerare una qualsiasi formula atomica $Pt_1...t_m$, con P predicato m-ario, le cui variabili (tutte libere) sono tra le prime n. Sia $\underline{a}$ è una attribuzione di valori alle variabili che alle prime n variabili assegna i valori $a_0,...,a_{n-1}$, σ la realizzazione $(\mathfrak{A}.\underline{a})$ e σ' la realizzazione $(\mathfrak{B},\underline{a})$. Allora $\mathfrak{A} \models Pt_1..t_m[a_0,...,a_{n-1}]$ se e solo se $(Pt_1...t_m)^{\sigma}=V$, se e solo se $(t_1^{\sigma},...,t_m^{\sigma}) \in P^{\sigma}$, se e solo se $(t_1^{\sigma'},...,t_m^{\sigma'}) \in P^{\sigma'}$ (per il precedente risultato sui termini e perché P^{σ} è la restrizione ad A di $P^{\sigma'}$), se e solo se $(Pt_1...t_m)^{\sigma'}=V$, se e solo se $\mathfrak{B} \models Pt_1.. .t_m[a_0,...,a_{n-1}]$, come volevasi mostrare.

Si supponga ora che il risultato valga per una formula φ le cui variabili libere sono tra le prime n. Si deve far vedere che vale anche per la formula $\neg\varphi$. Infatti, per ogni n-upla $a_0,...,a_{n-1}$ di elementi di A, $\mathfrak{A} \models \neg\varphi[a_0,...,a_{n-1}]$ se e solo se non è vero $\mathfrak{A} \models \varphi[a_0,..., a_{n-1}]$ se e solo se (per ipotesi induttiva) non è vero che $\mathfrak{B} \models \varphi[a_0,...,a_{n-1}]$ se e solo se $\mathfrak{B} \models \neg\varphi[a_0,...,a_{n-1}]$, che è ciò che si voleva mostrare.

Si consideri poi il caso in cui il risultato valga per le formule φ e ψ le cui variabili libere sono tra le prime n. Si deve far vedere che vale anche per la formula $\wedge\varphi\psi$. Infatti, per ogni n-upla $a_0,...,a_{n-1}$ di elementi di A, $\mathfrak{A} \models \wedge\varphi\psi[a_0,...,a_{n-1}]$ se e solo se sia $\mathfrak{A} \models$

$\varphi[a_0,...,a_{n-1}]$ che $\mathfrak{A} \models \psi[a_0,...,a_{n-1}]$ se e solo se (per ipotesi induttiva) sia $\mathfrak{B} \models \varphi[a_0,..., a_{n-1}]$ che $\mathfrak{B} \models \psi[a_0,...,a_{n-1}]$, se e solo se $\mathfrak{B} \models \wedge\varphi\psi[a_0,...,a_{n-1}]$, che è ciò che si voleva mostrare.

Infine si consideri il caso in cui il risultato valga per la formula φ le cui variabili libere sono tra le prime n+1. Si deve far vedere che vale anche per la formula $\forall x\varphi$. Qui si divide la dimostrazione nelle due direzioni. Dapprima si mostra che se $\mathfrak{B} \models \forall x\varphi[a_0,..., a_{n-1}]$ allora anche $\mathfrak{A} \models \forall x\varphi[a_0,...,a_{n-1}]$, e poi si vedrà l'altra direzione. Poiché non è restrittivo supporre che x sia v_n (se non lo fosse si effettui un cambio alfabetico) e si supponga che $\mathfrak{B} \models \forall v_n\varphi[a_0,...,a_{n-1}]$. Ne segue che, per definizione, per ogni $a\in B$, $\mathfrak{B} \models \varphi[a_0,...,a_{n-1},a]$. Essendo $A\subseteq B$, ciò implica anche che, per ogni $a\in A$, $\mathfrak{B} \models \varphi[a_0,...,a_{n-1},a]$. Allora, per ipotesi induttiva, per ogni $a\in A$, $\mathfrak{A}\models \varphi[a_0,...,a_{n-1},a]$. Ciò significa che $\mathfrak{A} \models \forall x\varphi[a_0,...,a_{n-1}]$.

Si noti che finora non è stata mai usata l'ipotesi aggiuntiva introdotta nell'enunciato: ecco in che senso si era detto che un sottostruttura è quasi una sottostruttura elementare.

Per completare l'induzione rimane da mostrare solo l'altra direzione dell'ultimo caso, e cioè che se $\mathfrak{A} \models \forall x\varphi[a_0,...,a_{n-1}]$ allora anche $\mathfrak{B} \models \forall x\varphi[a_0,...,a_{n-1}]$. Per sfruttare l'ipotesi aggiunta che parla dell'esistenza di un elemento di a di A, dimostriamo la contronominale dell'affermazione voluta, e cioè che se non è vero che $\mathfrak{B} \models \forall x\varphi[a_0,. ..,a_{n-1}]$ allora non è vero che $\mathfrak{A} \models \forall x\varphi[a_0,...,a_{n-1}]$, ovverosia se $\mathfrak{B} \models \neg\forall x\varphi[a_0,...,a_{n-1}]$ allora $\mathfrak{A} \models \neg\forall x\varphi[a_0,...,a_{n-1}]$. Si supponga perciò che $\mathfrak{B} \models \neg\forall x\varphi[a_0,...,a_{n-1}]$, allora (per definizione) esiste un elemento $b\in B$ tale che $\mathfrak{B} \models \neg\varphi[a_0,...,a_{n-1},b]$. Così, applicando l'ipotesi aggiunta nell'enunciato del teorema (e qui è il solo passaggio dove la si usa), si ottiene che esiste $a\in A$ tale che $\mathfrak{B}\models \neg\varphi[a_0,...,a_{n-1},a]$. Allora, per ipotesi induttiva, esiste $a\in A$ tale che $\mathfrak{A}\models \neg\varphi[a_0,...,a_{n-1},a]$, che equivale a $\mathfrak{A} \models \neg\forall x\varphi[a_0,...,a_{n-1}]$. Si è così mostrato che l'affermazione del teorema vale anche in questo caso. Avendo completato l'induzione, si è anche ultima la dimostrazione del teorema.

L'ulteriore rafforzamento auspicato del teorema di Lowenheim Skolem passa attraverso il legame tra immersioni (e immersioni elementari) e sottostrutture (e sottostrutture elementari) precisato dai seguenti due risultati

Teorema. Se una struttura $\mathfrak{A}$ si immerge (elementarmente) in una struttura $\mathfrak{B}$ allora è isomorfa ad una sottostruttura (elementare) della struttura $\mathfrak{B}$.

DIMOSTRAZIONE. Si supponga che $\mathfrak{A}$ si immerga elementarmente in $\mathfrak{B}$, e sia ϕ la funzione da A in B che compie tale immersione. Sia C il codominio di ϕ. Si osservi che l'insieme C è chiuso rispetto alle funzioni e costanti della struttura $\mathfrak{B}$ poiché se F' è una funzione k-aria (incluso il caso che k=0, cioè anche se F' è una costante) della struttura e $c_0,...,c_{k-1}$ è una qualsiasi k-upla di elementi di C, allora $F'(c_0,...,c_{k-1}) \in C$. Infatti $c_0=\phi(a_0),...,c_{k-1}=\phi(a_{k-1})$ per una opportuna k-upla $a_0,...,a_{k-1}$ di elementi di A. Sia F la funzione che nella struttura $\mathfrak{A}$ interpreta il simbolo di funzione (costante) associato alla funzione F', e sia $F(a_0,...,a_{k-1})=a$. Poiché l'immersione preserva la struttura dovrà essere $F'(c_0,. ..,c_{k-1})=F'(\phi(a_0),...,\phi(a_{k-1}))=\phi(a)$ e $\phi(a)\in C$ per definizione di C. Poiché C è chiuso rispetto alle funzioni di $\mathfrak{B}$ si può considerare la restrizione $\mathfrak{B}_{|C}$ della struttura $\mathfrak{B}$ al sottinsieme C del suo universo. Si sa che $\mathfrak{B}_{|C}$ è una sottostruttura di $\mathfrak{B}$, ed inoltre ϕ è una immersione suriettiva sull'universo di $\mathfrak{B}_{|C}$, sicché ϕ è un isomorfismo.

Se poi l'immersione ϕ è elementare (cioè per ogni n-upla $a_0, ..., a_{n-1}$di elementi di A e per ogni formula φ le cui variabili libere sono tra le prime n, si ha che $\mathfrak{A}\models\varphi[a_0,...,a_{n-1}]$ se e solo se $\mathfrak{B}\models\varphi[\phi(a_0),...,\phi(a_{k-1})]$), dal momento che $\mathfrak{A}\models\varphi[a_0,...,a_{n-1}]$ se e solo se $\mathfrak{B}_{|C}\models\varphi[\phi(a_0),...,\phi(a_{k-1})]$ (essendo ϕ un isomorfismo tra $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}_{|C}$), e, poiché per ogni n-upla $c_0,...,c_{n-1}$ di C c'è un' n-upla $a_0,...,a_{n-1}$ di A tale che $c_0=\phi(a_0),.., c_{n-1}=\phi(a_{n-1})$, si ottiene anche che per ogni n-upla $c_0,...,c_{n-1}$ di C $\mathfrak{B}_{|C}\models \varphi[c_0,...,c_{n-1}]$ se e solo se $\mathfrak{B}_{|C}\models \varphi[\phi(a_0),...,\phi(a_{n-1})]$ se e solo se $\mathfrak{A}\models \varphi[a_0,...,a_{n-1}]$ se e solo se $\mathfrak{B}\models \varphi[\phi(a_0),..., \phi(a_{n-1})]$ se e solo se $\mathfrak{B}\models\varphi[c_0,...,c_{n-1}]$, il che mostra che $\mathfrak{B}_{|C}$ è sottostruttura elementare di $\mathfrak{B}$.

Il secondo risultato che si preannunciava è il seguente

Teorema di estensione elementare. Se la struttura $\mathfrak{A}$ è isomorfa alla struttura $\mathfrak{B}$ che è sottostruttura (elementare) della struttura $\mathfrak{B}'$ allora $\mathfrak{A}$ è sottostruttura elementare di una struttura $\mathfrak{A}'$ isomorfa alla struttura $\mathfrak{B}'$. Cioè se $\mathfrak{B}'\supseteq\mathfrak{B}\cong\mathfrak{A}$ allora esiste $\mathfrak{A}'$ tale che $\mathfrak{B}'\cong\mathfrak{A}'\supseteq\mathfrak{A}$ (se $\mathfrak{B}'\succ\mathfrak{B}\cong\mathfrak{A}$ allora $\mathfrak{B}'\cong\mathfrak{A}'\succ\mathfrak{A}$).

DIMOSTRAZIONE. Sia ϕ_1 l'isomorfismo da $\mathfrak{A}$ su $\mathfrak{B}$. Sia C un insieme disgiunto da A di cardinalità uguale a quella di B'-B; A, B' e B siano gli universi di $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}'$ e $\mathfrak{B}$ rispettivamente. Sia ϕ_2 una biiettività da C su B'-B. La funzione $\phi=\phi_1\cup\phi_2$ è una biiettività da $A\cup C$ su B', la cui restrizione ad A è ϕ_1, mentre quella a C è ϕ_2. Si vuole costruire una nuova struttura $\mathfrak{A}'$ con universo $A\cup C$ che sia isomorfa a $\mathfrak{B}'$. Per fare ciò bisogna definire le relazioni, funzioni e costanti della nuova struttura, e ciò può essere fatto atteggiando l'insieme C come B'-B attraverso la corrispondenza ϕ_2 (o attraverso la corrispondenza ϕ che su C si comporta nello stesso modo), cioè prescrivendo che ogni elemento c di C si comporti come l'elemento $\phi_2(c)$. Più precisamente, si definisce ciascuna relazione $P^{\mathfrak{A}'}$ di $\mathfrak{A}'$ che interpreti il predicato P, diciamo n-ario, come il seguente insieme di n-uple di A': $\{(a'_0,...,a'_{n-1}): (\phi(a'_0),...,\phi(a'_{n-1}))\in P^{\mathfrak{B}'}\}$, ciascuna funzione $f^{\mathfrak{A}'}$ di $\mathfrak{A}'$ che interpreti il simbolo di funzione f, diciamo n-ario, come la funzione $f^{\mathfrak{A}'}$ tale che, per ogni n-upla di $\mathfrak{A}'$, risulta che $f^{\mathfrak{A}'}(a'_0,...,a'_{n-1})= \phi^{-1}(f^{\mathfrak{B}'}(\phi(a'_0),. ..,\phi(a'_{n-1})))$, e ciascuna costante come la costante di $\mathfrak{A}$ associata allo stesso simbolo per costante. Si osservi che il sottinsieme A di A' è chiuso rispetto alle funzioni $f^{\mathfrak{A}'}$ di $\mathfrak{A}'$, perché, scelta comunque una n-upla $(a_0,...,a_{n-1})$ di A, la controimmagine mediante ϕ^{-1} dell'applicazione della funzione $f^{\mathfrak{B}}$ in $\mathfrak{B}$ alla sua immagine mediante ϕ coincide con il risultato delle stesse operazioni mediante ϕ_1, infatti $f^{\mathfrak{A}'}(a_0,...,a_{n-1}) = \phi^{-1}(f^{\mathfrak{B}'}(\phi(a_0),...,\phi(a_{n-1}))) = \phi_1^{-1}(f^{\mathfrak{B}}(\phi_1(a_0),...,\phi_1(a_{n-1})))$ sicché $\phi^{-1}(f^{\mathfrak{B}}(\phi(a_0),...,\phi(a_{n-1}))) \in A$ poiché $(f^{\mathfrak{B}}(\phi_1(a_0),..., \phi_1(a_{n-1}))) \in B$. Inoltre le relazioni e funzioni di $\mathfrak{A}$ sono le relazioni e funzioni di $\mathfrak{A}'$ ristrette ad A, ancora perché ϕ e ϕ_1 si comportano nello stesso modo su A. Poiché le costanti sono le stesse, $\mathfrak{A}$ è la restrizione di $\mathfrak{A}'$ ad A, così $\mathfrak{A}$ è una sottostruttura di $\mathfrak{A}'$, e, per costruzione, ϕ è un isomorfismo da $\mathfrak{A}'$ su $\mathfrak{B}'$. Se poi $\mathfrak{B}$ è una sottostruttura elementare di $\mathfrak{B}'$ allora anche $\mathfrak{A}$ è una sottostruttura elementare di $\mathfrak{A}'$ proprio in base alle definizioni coinvolte.

Gli ultimi due risultati, combinati tra loro, forniscono il seguente

Corollario. Se una struttura $\mathfrak{A}$ si immerge elementarmente in una struttura $\mathfrak{B}$, allora esiste una estensione elementare $\mathfrak{A}'$ di $\mathfrak{A}$ che è isomorfa a $\mathfrak{B}$.

DIMOSTRAZIONE. Infatti, per il primo risultato, se $\mathfrak{A}$ si immerge elementarmente in $\mathfrak{B}$ allora $\mathfrak{A}$ è isomorfa ad una sottostruttura elementare $\mathfrak{C}$ di $\mathfrak{B}$, sicché, per il teorema dell'estensione, c'è una estensione elementare $\mathfrak{A}'$ di $\mathfrak{A}$ isomorfa a $\mathfrak{B}$.

Nelle stesse dimostrazioni che hanno portato al precedente corollario è inserita anche la prova che
se una struttura $\mathfrak{A}$ si immerge in una struttura $\mathfrak{B}$, allora esiste una estensione $\mathfrak{A}'$ di $\mathfrak{A}$ che è isomorfa a $\mathfrak{B}$.
Questo è un risultato che serve ad esempio quando si costruiscono i reali a partire dai razionali e si parla di reali razionali da identificarsi (cosa vuol dire?) con i razionali: si potrebbe introdurre una struttura, ad esempio quella delle sezioni di Dedekind sui razionali, in cui i razionali si immergono, e poi, in base al risultato precedente, affermare che c'è un'estensione dei razionali isomorfa alla struttura introdotta.

29. TEOREMI DI LOWENHEIM E SKOLEM.

L'ultimo corollario e il teorema di immersione elementare permettono di concludere con il
Teorema di Lowenheim Skolem ascendente. Ogni struttura infinita può essere estesa elementarmente ad una struttura di una qualsiasi cardinalità maggiore od uguale al massimo tra la cardinalità della struttura e quella del suo linguaggio.
DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathfrak{A}$ la struttura infinita di partenza. La si espanda alla struttura $\mathfrak{A}'$ ottenuta facendo si che ogni elemento del suo universo sia anche una costante. La cardinalità h del linguaggio di $\mathfrak{A}'$ sarà il massimo tra le cardinalità della struttura data e del suo linguaggio. Sia k un cardinale maggiore od uguale ad h. Per il teorema dell'immersione elementare esiste una struttura $\mathfrak{C}$ (modello di Th($\mathfrak{A}'$)) in cui $\mathfrak{A}'$ si immerge elementarmente. Per il precedente corollario, c'è una estensione elementare $\mathfrak{B}$ di $\mathfrak{A}'$ isomorfa a $\mathfrak{C}$. Volendo una soluzione nel linguaggio iniziale basta ridurre la struttura $\mathfrak{B}$ a quel linguaggio.

Il teorema di Lowenheim Skolem ascendente migliora il teorema di Lowenheim Skolem debole nel senso che precisa meglio le caratteristiche di una struttura di una voluta cardinalità che sia modello della teoria di una struttura data. Ma questo miglioramento si ha solo nel caso in cui si cerchi una struttura di cardinalità maggiore od uguale al massimo tra la cardinalità della struttura di partenza e quella del suo linguaggio. Si può migliorare in modo analogo il teorema debole di Lowenheim Skolem cercando una struttura modello della teoria di un'altra struttura, ma di cardinalità compresa tra la cardinalità del linguaggio e quella della struttura data? Ovviamente ci si deve porre nel caso che la struttura data abbia cardinalità maggiore di quella del proprio linguaggio. Evidentemente una struttura non si può immergere elementarmente in un'altra struttura di cardinalità minore. Tuttavia ci possiamo chiedere se, data una struttura di cardinalità κ infinita in un linguaggio di cardinalità λ, con $\lambda<\kappa$, ci siano strutture di una qualsiasi cardinalità compresa tra λ e κ "fortemente legate" alla struttura data.
Ovviamente bisognerà anzitutto precisare cosa si intende per "fortemente legate".

Se per "fortemente legate" si intende che non siano distinguibili mediante il linguaggio, cioè che in esse siano veri gli stessi enunciati, allora la risposta affermativa è già pronta: basta considerare la teoria T della struttura data, e il teorema debole di Lowenheim Skolem debole applicato a T garantisce l'esistenza di modelli di T della cardinalità voluta, e in questi sono veri esattamente gli enunciati veri nella struttura data.

Ma se per "fortemente legate" vogliamo intendere qualcosa di più, ad esempio che la nuova struttura si immerga elementarmente in quella data, o che addirittura ne sia una sottostruttura elementare, allora il teorema di Lowenheim Skolem debole non è più sufficiente. Serve il

Teorema di Lowenheim Skolem discendente. Una struttura $\mathfrak{A}$ di cardinalità ζ maggiore od uguale alla cardinalità λ del suo linguaggio ha sottostrutture elementari ciascuna tale che

1) il suo universo contiene un prefissato sottinsieme di cardinalità ξ dell'universo della struttura data, e

2) la sua cardinalità κ può essere arbitrariamente scelta tra ζ e il massimo tra λ e ξ.

DIMOSTRAZIONE. Si osservi che il numero delle funzioni della struttura è minore od uguale a λ, poiché ad ogni funzione deve corrispondere un simbolo di funzione nel linguaggio.

Sia A l'universo della struttura $\mathfrak{A}$ e sia X un suo sottinsieme di cardinalità minore od uguale a ξ.

Si costruisca, per induzione, una successione $X_0, \ldots, X_i, \ldots$ ($i \in \mathbb{N}$, con $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali) di sottinsiemi di A nel modo seguente.

X_0 sia un sottinsieme di A di cardinalità κ che contiene X. X_{i+1} sia la chiusura di X_i rispetto all'applicazione di funzioni della struttura ad elementi di X_i e alla scelta di un elemento dell'universo tra quelli che, attribuiti alla variabile v_j, rendono vera nella struttura $\mathfrak{A}$ una formule con variabili libere entro la v_j e le cui altre variabili libere sono interpretate in X_i, cioè $X_{i+1} = \{F(a_o, \ldots, a_{n-1}) : (a_o, \ldots, a_{n-1}) \in X_i^n$, F è una funzione n-aria di $\mathfrak{A}$, $n \in \mathbb{N}\} \cup \{scel(X_{\varphi,(a_o, \ldots, a_{n-1})}) : X_{\varphi,(a_o, \ldots, a_{n-1})}$ è non vuoto, $(a_o, \ldots, a_{n-1}) \in X_i^n$, φ formula con variabili libere entro v_n, $n \in \mathbb{N}\}$ dove $X_{\varphi,(a_o, \ldots, a_{n-1})} = \{a : \mathfrak{A} \models \varphi[a_o, \ldots, a_{n-1}, a]\}$ e *scel* è una funzione scelta sugli insiemi non vuoti $X_{\varphi,(a_o, \ldots, a_{n-1})}$.

Si osservi subito che $X_{i+1} \supseteq X_i$. Infatti, per ogni elemento a_o di X_i, se φ è la formula $v_0 = v_1$, l'insieme $X_{\varphi,(a_o)} = \{a : \mathfrak{A} \models v_0 = v_1[a_o, a]\} = \{a_o\}$, e $scel(X_{\varphi,(a_o)})$ non può che essere a_o, sicché a_o deve appartenere anche ad X_{i+1}, proprio in base alla sua definizione.

Ancora, per ogni naturale i, $|X_i| = \kappa$. Infatti, per induzione, $|X_0| = \kappa$ per definizione, mentre per gli altri valori dell'indice si ottiene il risultato per induzione. Di fatto, la cardinalità di $X_{i+1} - X_i$ è uguale al più alla somma del numero di funzioni della struttura $\mathfrak{A}$ moltiplicato per il numero di n-uple di X_i e del numero di formule del linguaggio moltiplicato per il numero delle n-uple di X_i. Poiché 1) le n-uple di X_i sono κ, e 2) le funzioni di $\mathfrak{A}$ sono al più tante quanti sono i simboli di funzione del linguaggio e questi sono un insieme di cardinalità minore od uguale a quella del linguaggio che ha cardinalità λ minore di κ, e 3) le formule sono un insieme di cardinalità λ minore di κ, per le proprietà dell'aritmetica delle cardinalità infinite, si ha che $|X_{i+1}| = \kappa$.

Sia ora $B = \cup\{X_i : i \in \mathbb{N}\}$. Evidentemente $B \subseteq A$ e $|B| = \kappa$. Inoltre B è chiuso rispetto alle funzioni di $\mathfrak{A}$. Infatti, per ogni $n \in \mathbb{N}$, ogni n-upla $(a_o, \ldots, a_{n-1})$ di B ha ciascuno dei suoi elementi in qualche X_i, sicché, detto i' il massimo di tali indici, tutti gli elementi dell'n-upla appartengono anche a $X_{i'}$ poiché ciascun X_i contiene i precedenti; ma allora

$F(a_o,\ldots,a_{n-1})$ appartiene a $X_{i'+1}$, e dunque anche a B, per ciascuna funzione n-aria F della struttura.

Poiché B è chiuso rispetto alle funzioni della struttura $\mathfrak{A}$, si può considerare la struttura $\mathfrak{B}$ che è la restrizione di $\mathfrak{A}$ all'insieme B, $\mathfrak{B}=\mathfrak{A}_{|B}$. Ovviamente $|\mathfrak{B}|=\kappa$. Si dimostra che $\mathfrak{B}$ è una sottostruttura elementare di $\mathfrak{A}$ mostrando che vale la condizione necessaria e sufficiente affinché una sottostruttura sia una sottostruttura elementare. Cosi,' sia fissata una qualsiasi n-upla $(a_o,\ldots,a_{n-1})$ di elementi di B e una qualsiasi formula φ le cui variabili libere sono entro la v_n, allora per ogni elemento a di A tale che $\mathfrak{A}\models\varphi[a_o,\ldots, a_{n-1},a]$ deve esistere un elemento b di B tale che $\mathfrak{A}\models\varphi[a_o,\ldots, a_{n-1},b]$. Infatti, come prima, se $(a_o,\ldots,a_{n-1})$ è un'n-upla di B, c'è un naturale i' tale che $(a_o,\ldots,a_{n-1})$ è un'n-upla di $X_{i'}$, sicché se $\mathfrak{A}\models\varphi[a_o,\ldots, a_{n-1},a]$, cioè se $X_{\varphi,(a_o,\ldots, a_{n-1})}\neq\emptyset$, allora c'è b appartenente a $X_{i'+1}$, e dunque anche a B, tale che $\mathfrak{A}\models\varphi[a_o,\ldots, a_{n-1},b]$, che è quanto si voleva far vedere.

Così $\mathfrak{B}$ è una sottostruttura elementare di $\mathfrak{A}$ il cui universo B ha cardinalità κ e contiene un qualsiasi fissato insieme di cardinalità minore od uguale a κ, e la dimostrazione è completata.

Si osservi che per dimostrare il teorema debole di Lowenheim Skolem, o il teorema di Lowenheim Skolem ascendente, si è usato il teorema di compattezza che era stato dimostrato inizialmente usando l'assioma della scelta, ma poi anche limitandosi all'assunzione più debole del principio dell'ultrafiltro. Nella dimostrazione che il teorema di compattezza implica il teorema debole di Lowenheim Skolem, o il teorema di Lowenheim Skolem ascendente, non si è usato l'assioma della scelta in nessuna delle forme ad esso equivalenti. Ma dal teorema di Lowenheim Skolem segue il seguente
Teorema. Sia κ una qualsiasi cardinalità infinita. Allora $\kappa^2=\kappa$.
DIMOSTRAZIONE. Si consideri un linguaggio con il simbolo logico = e con un simbolo di funzione binario f. Gli enunciati

$$\forall x\forall y\forall v\forall w\ ((\neg x=v\vee\neg y=w)\rightarrow\neg fxy=fvw)\ \text{ e }\ \forall x\exists t\exists u(x=ftu)$$

sono veri in una realizzazione se e solo se il simbolo di funzione f è interpretato in una funzione totale (le funzioni delle strutture sono sempre totali) iniettiva (per rendere vero il primo enunciato) e suriettiva (per rendere vero il secondo enunciato) dall'insieme delle coppie ordinate di elementi dell'universo negli elementi dell'universo dell'interpretazione. Si sa che dato un insieme numerabile esiste una biiettività dall'insieme delle sue coppie ordinate nell'insieme stesso, sicché c'è un modello numerabile degli enunciati proposti. Allora, per il teorema di Lowenheim Skolem, detti enunciati hanno modelli di qualsiasi cardinalità infinita κ. Così per ogni cardinalità infinita c'è una biiettività tra il suo quadrato e la cardinalità stessa, come volevasi dimostrare.

Una dimostrazione delicata, che va oltre lo scopo di queste note, mostra che l'assioma della scelta segue dall'affermazione che per ogni cardinalità il quadrato di quella cardinalità dà la stessa cardinalità. Poiché si è dimostrato che dal teorema di Lowenheim Skolem segue che, per ogni cardinale, il quadrato di quel cardinale ha la cardinalità dello stesso cardinale, si è ottenuto che l'assioma della scelta segue dal teorema di Lowenheim Skolem. Se non si è usato l'assioma della scelta senza accorgersene, si potrebbe concludere che il principio dell'ultrafiltro implica l'assioma della scelta, mentre esiste una dimostrazione che ciò non è vero (fatto, che pure va oltre lo scopo di queste note, già ricordato e che ha motivato la dimostrazione, fatta, in appendice, senza usare l'assioma della scelta ma il solo principio dell'ultrafiltro, che la regola R2 preserva la finita soddisfacibilità).

In realtà si è utilizzato l'assioma della scelta non nelle dimostrazioni fatte, ma per enunciare il teorema di Lowenheim Skolem. Infatti nell'enunciato del teorema di Lowenheim Skolem si è anche ipotizzato tacitamente che ogni due cardinalità siano tra loro confrontabili, cioè che dati due qualsiasi insiemi esiste certamente una funzione totale iniettiva o dal primo insieme nel secondo o dal secondo insieme nel primo. L'assunzione che due qualsiasi insiemi abbiano cardinalità tra loro confrontabili segue facilmente dall'assioma della scelta, nella sua forma equivalente del principio del buon ordinamento, ma è anche equivalente ad esso. Così, per quanto si sia arrivati a situazioni che possono far sorgere dubbi e preoccupare, di fatto non si è pervenuti a contraddizioni.

30. PARADOSSO DI SKOLEM.

Si vuole ora considerare una situazione particolarmente interessante per la matematica e, da certi punti di vista, sorprendente: essa riguarda l'usuale collezione degli insiemi con l'appartenenza.

In senso stretto, ciò che stiamo considerando non è neppure una struttura, poiché il suo universo non è un insieme, ma una classe propria. Anche l'appartenenza non è una relazione, nel senso che non è un insieme di coppie ordinate, ma una collezione propria di coppie ordinate.

Ma non tutto è perduto. Si può cercare di estendere la nozione di struttura per includere situazioni del tipo presentato che richiedono di considerare classi proprie. Per una maggiore chiarezza espositiva, conveniamo di chiamare ***struttura generalizzata*** il nuovo concetto che si sta per introdurre, simile a quello di struttura. Una struttura generalizzata non sarà più una quaderna ordinata, perché una quaderna deve avere quattro elementi, mentre le classi proprie non sono elementi. Si considerino, allora, alcune (in numero finito) collezioni (non una collezione di collezioni, perché ad una collezione appartengono solo elementi): una collezione da chiamarsi universo; una o più (ma in numero finito) collezioni i cui elementi sono n-uple ordinate di elementi dell'universo, con n ben fissato per ciascuna di queste collezioni, (ciascuna di queste collezioni sarà detta una relazione generalizzata); ed ancora delle (sempre in numero finito) collezioni (eventualmente nessuna) di (n+1)-uple ordinate di elementi dell'universo, con n ben fissato per ciascuna di queste collezioni, con l'ulteriore proprietà che, scelti i primi n elementi dell'(n+1)-upla, è unico l'(n+1)-esimo elemento tale che l'(n+1)-upla appartenga alla collezione (ciascuna di queste collezioni sarà detta una funzione generalizzata).

Le strutture generalizzate possono non essere insiemi. Pertanto, in generale, non si potrà più parlare di proprietà di certe strutture generalizzate, o di relazioni tra strutture generalizzate, o di collezioni di strutture generalizzate. Ma si potranno fare considerazioni che dipendono dagli elementi delle varie collezioni. In particolare si potrà ancora dire come interpretare una formula di un linguaggio in una struttura generalizzata con una attribuzioni di valori alle variabili, e così dire anche quando una formula è vera; si può ancora considerare la teoria di una struttura generalizzata.

L'usuale collezione degli insiemi con l'appartenenza è una struttura generalizzata e si può considerare la sua teoria $Th(\mathfrak{I})$, che chiameremo teoria completa degli insiemi.

Se l'usuale struttura generalizzata degli insiemi non è un'assurdità, la sua teoria Th($\mathfrak{I}$) sarà soddisfacibile, e, come tale, avrà un modello (nel senso a suo tempo precisato).

Le osservazioni che seguono mantengono lo stesso rilievo anche si non si fossero introdotte le strutture generalizzate, ma, al posto di Th($\mathfrak{I}$), si fosse considerata direttamente una teoria degli insiemi T, supponendo che tale insieme di enunciati, contenuto in Th($\mathfrak{I}$) e non necessariamente completo, sia consistente e contenga le affermazioni che seguono dagli usuali assiomi accettati per la teoria degli insiemi.

Poiché il linguaggio della Th($\mathfrak{I}$) è numerabile, avendo il solo simbolo extralogico $\in$, per il teorema di Lowenheim Skolem, ci saranno modelli numerabili di Th($\mathfrak{I}$).

Ma tra gli enunciati di Th($\mathfrak{I}$) ci sarà il cosiddetto teorema di Cantor, quello che ha per conseguenza l'esistenza di insiemi più che numerabili, affermando che l'insieme dei sottinsiemi di un insieme infinito è strettamente più numeroso dell'insieme infinito dato, in particolare quando questo è l'insieme dei numeri naturali. Si indichi con $\exists z\psi(z)$ l'enunciato richiedente l'esistenza di insiemi più che numerabili[1]. Esso dovrà essere vero in ogni modello di Th($\mathfrak{I}$), in particolare in un modello numerabile la cui esistenza era stata affermata nel capoverso precedente.

Non è strano che *in una struttura numerabile ci sia un elemento "più che numerabile"*? Detta in questo modo l'affermazione ha tutta l'aria di una assurdità!

Questa stranezza va sotto il nome di **paradosso di Skolem**. Si noti che, se il paradosso di Skolem fosse davvero un'assurdità, metterebbe in crisi la teoria degli insiemi e tutta la matematica moderna che si fonda su di essa: infatti per giungere al paradosso non si sono introdotte altre ipotesi se non quelle usuali della teoria degli insiemi e gli sviluppi di logica basati su di essa.

Si analizzi la situazione con maggiore attenzione, per comprendere effettivamente in cosa consiste la difficoltà.

Certamente ogni modello di Th($\mathfrak{I}$) dovrà avere nel suo universo un elemento a0 che deve fare il ruolo di insieme vuoto affinché sia vero l'enunciato $\exists v_0 \forall v_1\ \neg v_1 \in v_0$ che appartiene alla Th($\mathfrak{I}$) essendo vero nella struttura generalizzata degli insiemi. Si noti come l'enunciato indicato sia vero in una struttura se e solo se la struttura ha un elemento che, si descrive nel metalinguaggio in un modo corrispondente al modo di descriverlo nel linguaggio formale, cioè dicendo che c'è un elemento che non è nella relazione che interpreta il predicato di appartenenza con nessun elemento. Inoltre, e qui non vengono indicati gli enunciati che di volta in volta giustificano le varie affermazioni lasciandone la determinazione per esercizio, ci deve essere un elemento a1 che fa il ruolo di insieme il cui solo elemento è l'insieme vuoto. Questi due insiemi sono quelli che in una interpretazione dei numeri naturali nella struttura generalizzata degli insiemi rappresentano zero e uno. Analogamente nell'universo di ogni struttura che sia modello di Th($\mathfrak{I}$) dovrà esserci un elemento ai che fa il ruolo di essere l'insieme corrispondente ad un numero naturale i, ed anche uno aw che farà il ruolo di essere l'insieme dei rappresentanti dei numeri naturali, poiché è un assioma della teoria degli insiemi che ci sia un tale elemento. Gli elementi dell'universo prima menzionati sa-

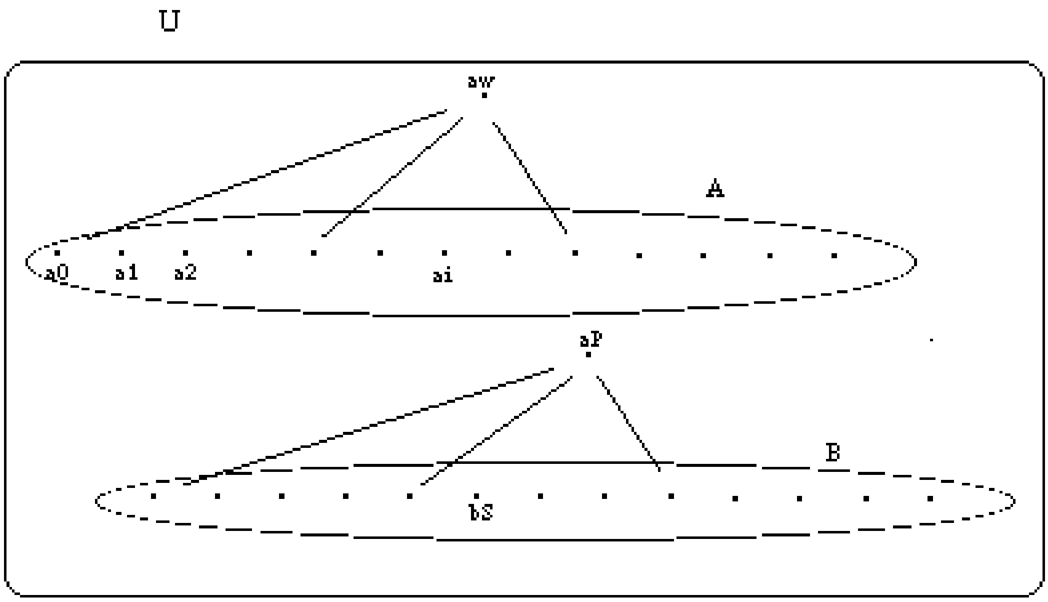
[1] $\psi(z)$ sarà la formula della teoria degli insiemi, nella sola variabile libera z, che dice che, per ogni ordinale α minore od uguale ad ω (l'ordinale dei numeri naturali), non c'e' alcuna biiettività tra α e l'interpretazione di z**.**

ranno nella relazione E che interpreta il predicato di appartenenza nel modello di Th(ℑ): (ai,aw) appartiene a E.

Inoltre un ulteriore assioma della teoria degli insiemi afferma che, dato un qualsiasi insieme, anche la collezione dei suoi sottinsiemi (detta anche collezione potenza dell'insieme dato) è un insieme, sicché nell'universo di un modello di Th(ℑ) dovrà esserci un elemento aP che fa il ruolo di insieme dei sottinsiemi dell'insieme dei rappresentanti dei numeri naturali. Nell'universo di questo modello di Th(ℑ) ci dovranno essere anche gli elementi bS che fanno il ruolo dei sottinsiemi appartenenti all'insieme dei sottinsiemi S dei rappresentanti dei naturali, sicché saranno in relazione E con l'elemento aP.

I due insiemi A={ai: i è un numero naturale} e B={bS: bS appartiene a U e (bS,aP) appartiene ad E} sono infiniti e contenuti entrambi in U, anche se, attenzione, non è detto che siano elementi di U. Si noti come si sia usata la parola appartiene, e non alcun simbolo con cui rappresentare l'appartenenza, per sottolineare come ci si stia muovendo nel metalinguaggio descrivendo "dal di fuori" ciò che avviene nella struttura (non si dice che la struttura deve avere certe caratteristiche perché deve rendere veri certi enunciati del linguaggio formale, ma si descrivono direttamente quelle caratteristiche nel metalinguaggio). Il seguente disegno vuole rappresentare, sempre dal punto di vista del metalinguaggio, la situazione in un modello di Th(ℑ) con universo U e in cui con segmenti sono legate alcune delle coppie ordinate (il primo elemento sotto il segmento e il secondo sopra il segmento) che appartengono alla relazione E. Poiché U è stato legittimamente supposto numerabile (come applicazione del teorema di Lowenheim Skolem), i due insiemi infiniti A e B sono pure numerabili, perché sottinsiemi di U, e quindi tra loro equinumerosi, ed esiste una biiettività tra i due insiemi A e B.

D'altra parte, il teorema di Cantor asserisce che l'insieme P(N) dei sottinsiemi dell'insieme dei numeri naturali ha cardinalità strettamente maggiore dell'insieme N dei numeri naturali, cioè non ci può essere alcuna biiettività tra N e P(N). Attenzione però che ora chi interpreta il nome di N e P(N) nel modello di sono rispettivamente aw e aP.



Il teorema di Cantor è un enunciato di $Th(\mathfrak{I})$ e deve essere vero in ogni modello di questa teoria, in particolare in quello numerabile che si sta considerando. In questo modello gli elementi di A fanno il ruolo dei numeri naturali (cioè di coloro che sono in relazione E con aw) e gli elementi di B fanno il ruolo dei sottinsiemi dei numeri naturali (cioè di coloro che sono in relazione E con aP), e quindi fra i due non deve esserci nessuna biiettività. aP deve essere *un elemento "più che numerabile"*, cioè non ci deve essere nessuna biettività in U tra A e B, insiemi che tuttavia sono contenuti nell'universo U che è numerabile e fra i quali dunque c'è una biiettività: com'è possibile?
Si è così ribadito con maggiori dettagli il paradosso di Skolem.
A ragione veduta la locuzione "più che numerabile" è stata messa tra virgolette poiché corrisponde ad un enunciato del tipo $\psi(z)$ da interpretarsi nel modello numerabile di $Th(\mathfrak{I})$ in cui z dovrà essere interpretato nell'elemento aP (che è quello che in U fa il ruolo di insieme dei sottinsiemi dell'insieme dei naturali) e la formula dovrà affermare mediante il linguaggio formale la non esistenza di una biiettività con gli insiemi numerabili, in particolare tra gli elementi in relazione E con aP e gli elementi in relazione E con aw.

Attenzione che niente dice che A e B debbano appartenere all'universo del modello (pur appartenendovi aw e aP), né che aw e aP, che appartengono a U, debbano essere sottinsiemi dello stesso universo (pur essendolo sia A che B). A e B vengono colti nella descrizione metalinguistica della struttura con il suo universo e con questi due sottinsiemi dell'universo. Tutt'altro è affermare che un enunciato sia vero in quella struttura: in tale caso bisognerà rifarsi all'interpretazione in quella struttura in cui i simboli possono avere interpretazioni del tutto diverse da quelle intese.

Si osservi che il paradosso si gioca tutto sul contrasto tra l'affermazione di numerabilità dell'universo della struttura, e l'interpretazione dell'enunciato che proclama l'esistenza di un elemento "più che numerabile". L'affermazione di numerabilità della struttura è, evidentemente, effettuata nel metalinguaggio, diciamo dal di fuori della stessa struttura; mentre l'enunciato che proclama l'esistenza di un elemento "più che numerabile" è nella teoria della struttura e fa una affermazione, diciamo, dal di dentro della struttura. La formula $\psi(z)$, prima ricordata, è una formula del tipo $\neg\exists f\,\chi(f,z)$, dove $\chi(f,z)$ è la formula (che può essere scritta nel linguaggio formale della teoria degli insiemi) [2] che dice che la variabile f è interpretata in una biiettività dall'insieme delle rappresentazioni insiemistiche dei numeri naturali sull'insieme che interpreta z. Ora affinché la formula $\psi(z)$ non sia vera in un modello numerabile di $Th(\mathfrak{I})$, diciamo $\mathfrak{A}=(A,E)$, quando z viene valutata nell'elemento aP, bisogna che in U (proprio in U, come era già stato detto) ci sia una biiettività f_o da A (cioè gli elementi di U che sono in relazione E con aw) su B (cioè gli elementi di U che sono in relazione E con aP).

---

[2] La formula $\chi(f,\alpha,z)$ si può scrivere nel linguaggio degli insiemi così:
$Fun(f,\alpha,z)\wedge N(\alpha)\wedge\forall x(x\in\alpha\rightarrow\exists y<x,y>\in f)\wedge\forall y(y\in z\rightarrow\exists x<x,y>\in f)$, dove
$Fun(x,y,z)$ e'
$\forall u(u\in x\rightarrow\exists v\exists w(v\in y\wedge w\in z\wedge u=<v,w>))\wedge\forall v\forall w\forall w'((<v.w>\in x\wedge<v,w'>\in x)\rightarrow w=w')$,
$N(\alpha)$ è $Lim(\alpha)\wedge\forall x(x\in\alpha\rightarrow\neg Lim(x))$
$Lim(\alpha)$ é $Ord(\alpha)\wedge(\exists v\forall x(\neg x\in v\wedge\neg v\in\alpha))\wedge\forall u(\exists w\forall t(t\in u\leftrightarrow(t\in w\vee t=w)\rightarrow\neg u=\alpha)$
$Ord(\alpha)$ e' $\forall x\forall y((x\in\alpha\wedge y\in\alpha)\rightarrow(x=y\vee x\in y\vee y\in x))\wedge\forall x(x\in\alpha\rightarrow\alpha\supseteq x)$,
$<x,y>\in f$ è $\exists v(v=<x,y>\wedge v\in f)$ e
$v=<x,y>$ è $\exists w\forall u\forall t((t\in w\leftrightarrow(t=x\vee t=y))\wedge(u\in v\leftrightarrow(u=x\vee u=w)))$

Ora, dall'assunzione che U sia numerabile fatta nel metalinguaggio, non segue che la biiettività osservata tra A e B, esistente perché entrambi sono numerabili, sia un elemento di U, mentre dovrebbe esserlo per affermare che c'è una biiettività tra aw e aP che renda vera in questo modello la formula $\chi(f,z)$ interpretando la variabile f nella biiettività e la variabile z in aP. Solo la presenza di una tale biiettività in U contraddirebbe il teorema di Cantor.

Così basta supporre che la biiettività colta tra A e B non sia un elemento di U per non precludere la possibilità di avere un modello di Th($\mathfrak{I}$), ed in particolare del teorema di Cantor, numerabile; infatti allora aP resterebbe non numerabile "dal di dentro" perché in U non ci sarebbe alcuna biiettività tra gli elementi in relazione E con lui e gli elementi in relazione E con aw, sicché la formula $\neg\exists f\,\chi(f,z)$ è vera nel modello quando la variabile z è interpretata in aP. In tal modo il paradosso di Skolem resta un paradosso e non diviene una contraddizione. Anzi, le osservazioni svolte ci dicono che in ogni modello di Th($\mathfrak{I}$) nell'universo non ci dovrà essere un elemento che rende vere le formule che dicono che è una biiettività tra gli appartenenti (nel senso del modello) all'elemento che interpreta il nome dell'insieme dei numeri naturali e gli appartenenti (sempre nel senso del modello) all'elemento che interpreta il nome dell'insieme dei sottinsiemi dei numeri naturali.

Si era notato che l'enunciato $\exists v_0\forall v_1\ \neg v_1\in v_0$ è vero in una struttura se e solo se la struttura ha un elemento che, si descrive nel metalinguaggio in un modo corrispondente al modo di descriverlo nel linguaggio formale. D'altra parte si è visto come l'enunciato $\neg\exists f\,\chi(f,z)$ è vero in una struttura pure potendo esserci una biiettività, che però non appartiene all'universo, tra gli elementi in relazione di appartenenza (nel senso della struttura) con l'interpretazione di z e gli elementi in relazione di appartenenza (sempre nel senso della struttura) con l'interpretazione del nome dell'insieme dei numeri naturali.

Si può sintetizzare questa osservazione nello slogan: ci sono affermazioni che viste "dal di dentro" o "dal di fuori" danno le stesse informazioni sulla struttura, e altre affermazioni che viste "dal di dentro" danno informazioni sulla struttura diverse da quelle che provengono dalla loro visione "dal di fuori". Le nozioni colte dalle prime affermazioni vengono dette assolute, mentre le altre non assolute.

Questa è una distinzione delicata, e forse poco aspettata, estremamente importante nello sviluppo della matematica, in particolare nel vedere cosa si può dedurre e cosa non si può dedurre da certe assunzioni. Come si è potuto vedere, questa distinzione deriva da precisi limiti espressivi dei linguaggi formali, e mette in luce detti limiti. Il mettere in evidenza questi limiti dei linguaggi formali si ottiene comparandoli con quanto si riesce a dire attraverso il metalinguaggio sviluppato nel linguaggio naturale, nel quale si danno nomi a certe nozioni (ad esempio di finito, di cardinalità infinita ed altri) delle quali però il linguaggio naturale non precisa, e non può precisare, il significato. Così resta aperto il problema di come si acquisiscono questi significati.

31. PROPRIETA' DI CONSISTENZA

In questa sezione si accetterà l'ipotesi che il linguaggio che si considera sia numerabile. Nel caso di linguaggio non numerabile, si devono apportare lievi modifiche che saranno esposte nell'appendice C.

Finora si sono raggiunti dei buoni risultati con i teoremi di completezza e di semidecidibilità, utili in particolare per insiemi di formule di fatto non soddisfacibili.A volte però si è interessati alla soddisfacibilità di un insieme di formule, ed in tal caso, per quanto se ne sa finora, si sarebbe costretti a costruire una successione infinita di alberi, prima di poter concludere positivamente con il controllo sintattico. Inoltre, di fatto, la costruzione della successione di alberi è molto specifica, perché bisogna partire esattamente dall'insieme di formule dato e conoscerlo completamente, per ottenere una successione di alberi relativi esattamente a quel insieme di formule. Normalmente non si conosce esattamente l'insieme dato di formule, ma si conoscono delle sue caratteristiche. Così è interessante studiare se c'è un metodo per vedere se, e quando, queste caratteristiche sono sufficienti per garantire un controllo sintattico che permetta di concludere con la soddisfacibilità dell'insieme. Ovviamente in tale caso la conclusione vale anche per qualsiasi altro insieme di formule con le stesse caratteristiche, sicché si potrebbe considerare l'insieme degli insiemi di formule che hanno quelle caratteristiche e cercare di vedere sotto quali condizioni sulle caratteristiche, che sono comuni tra gli insiemi di formule dell'insieme dato, ciascuno di essi è soddisfacibile.

Per raggiungere un tale risultato mediante un controllo sintattico, in base all'esperienza finora conseguita in questa direzione, si potrebbe cercare di vedere se all'interno di dell'insieme S di insiemi si trovano insiemi che possano fungere da iterate estensioni di un ramo di un albero di confutazione fino a costruire il corrispondente di un ramo infinito aperto in cui ogni formula del ramo è analizzata, ottenendo così un insieme di Hintikka. Le regole $R_{1,n}$ e R_2, come pure le regole per l'analisi di una formula alla volta che si introdurranno, non sono l'ideale in questa circostanza perché vanno applicate ad insiemi ben precisati, ma forse basta cogliere altrimenti l'analisi delle formule che volevano effettuare.

Ecco allora l'idea di verificare se, considerato un insieme s di formule dell'insieme S dato ed una sua formula, l'analisi di questa porta ad un insieme di formule ancora nel dato insieme S di insiemi.

Si chiamerà **proprietà di consistenza** rispetto ad un insieme numerabile M di simboli per costante un insieme di insiemi di formule in cui non occorrono infiniti simboli di M e che abbia la proprietà di chiusura a cui si è accennato, e precisamente un insieme Σ di insiemi s di formule, in un linguaggio che include M, che rispetta le seguenti clausole.

0) nessun insieme s di Σ contiene una formula e la sua negazione, cioè, se $s\in\Sigma$ allora, per ogni formula φ, o $\varphi\notin\Sigma$ oppure $\neg\varphi\notin\Sigma$, e, per ogni insieme s di Σ, i simboli di costante di M che non occorrono in s sono infiniti;

1) se $\neg\neg\varphi\in s\in\Sigma$ allora esiste s' tale che $s\cup\{\varphi\}\subset s'\in\Sigma$;

2) se $\wedge\varphi\psi\in s\in\Sigma$ allora esiste s' tale che $s\cup\{\varphi,\psi\}\subset s'\in\Sigma$;

3) se $\neg\wedge\varphi\psi\in s\in\Sigma$ allora o esiste s' tale che $s\cup\{\neg\varphi\}\subset s'\in\Sigma$ o esiste s" tale che $s\cup\{\neg\psi\}\subset s''\in\Sigma$;

4) se $\forall v_i\varphi\in s\in\Sigma$ allora, per ogni termine t, esiste s' tale che $s\cup\{\varphi(v_i/t)\}\subset s'\in\Sigma$.

5) se $\neg\forall v_i\varphi\in s\in\Sigma$ allora esistono t e s' tali che t è un termine e $s\cup\{\neg\varphi(v_i/t)\}\subset s'\in\Sigma$;

6) se $s\in\Sigma$ e t è un termine, allora esiste s' tale che anche $s\cup\{t=t\}\subset s'\in\Sigma$;

7) se $\{t=t', \varphi(v_i/t)\}\subset s\in\Sigma$ allora esiste s' tale che anche $s\cup\{\varphi(v_i/t/t')\}\subset s'\in\Sigma$, dove $\varphi(v_i/t/t')$ ha lo stesso significato che era già stato attribuito a questa notazione in precedenza.

Si noti che, se infiniti simboli per costante di M non occorrono in s, ognuna delle clausole introdotte permette che infiniti simboli per costante di M non occorrono neppure in s' (né in s' né in s" eventualmente).

Prima di far vedere l'utilità di questa nozione attraverso interessanti applicazioni, si vuole mostrare che la nozione di proprietà di consistenza risponde alle esigenze per cui era stata costruita dimostrando il seguente

Teorema di esistenza del modello. Data la proprietà di consistenza Σ rispetto ad un insieme numerabile di simboli per costante M, ogni insieme s di formule che le appartiene ha modello (cioè se $s \in \Sigma$ allora s è soddisfacibile).

DIMOSTRAZIONE. Poiché si sta supponendo che il linguaggio, che include M, in cui sono scritte le formule occorrenti in qualche insieme di Σ sia numerabile, è numerabile anche la quantità delle formule di quel linguaggio. Così ad ogni formula di tale linguaggio si può assegnare biunivocamente un numero naturale che può essere pensato come un suo indice, e l'insieme delle formule diviene $\{\varphi_i$: i è un numero naturale$\}$. Si può allora costruire, mediante una definizione per induzione, una successione di elementi di Σ nel modo seguente. s_0 sia s, l'insieme di Σ che si vuole mostrare essere soddisfacibile. Se s_n è già stato ottenuto, si definisca s_{n+1} nel seguente modo

- se $s_n \cup \{\varphi_n\}$ non è contenuto in alcun elemento di Σ, allora s_{n+1} è s_n;
- se $s_n \cup \{\varphi_n\}$ è contenuto in qualche elemento di Σ e φ_n non è del tipo $\neg\wedge$, o del tipo $\neg\forall$, allora s_{n+1} è un elemento di Σ che contiene $s_n \cup \{\varphi_n\}$;
- se $s_n \cup \{\varphi_n\}$ è contenuto in qualche elemento s di Σ e φ_n è del tipo $\neg\wedge\alpha\beta$ allora o c'è un elemento s' di Σ che contiene $s \cup \{\neg\alpha\}$ e s_{n+1} sia un tale elemento di Σ, oppure non c'è alcun elemento di Σ che contiene $s \cup \{\neg\alpha\}$ (in tal caso c'è un elemento s" di Σ che contiene $s \cup \{\neg\beta\}$) e s_{n+1} sia un elemento di Σ che contiene $s \cup \{\neg\beta\}$;
- se $s_n \cup \{\varphi_n\}$ è contenuto in qualche elemento s di Σ e φ_n è del tipo $\neg\forall v_i\varphi$, allora c'è un termine t tale che $s \cup \{\varphi(v_i/t)\}$ sia contenuto in un elemento di Σ, e s_{n+1} sia un elemento di Σ che contiene $s \cup \{\varphi(v_i/t)\}$;

Sia $s_\omega = \{s_n$: n è numero naturale$\}$. Si noti che non è detto che s_ω appartenga a Σ, anche se, per ogni n, s_n appartiene a Σ. Si vuole mostrare che s_ω è un insieme di Hintikka. Per fare ciò si dovrà controllare che le varie clausole della definizione di insieme di Hintikka sono rispettate.

* Anzitutto ad s_ω non possono appartenere sia una formula che la sua negazione, perché altrimenti la formula apparterrebbe ad un insieme $s_{n'}$ della successione costruita e la sua negazione ad un insieme $s_{n''}$ della stessa successione, ma, poiché uno dei due insiemi della successione contiene l'altro, a questo apparterrebbero sia la formula che la sua negazione, impossibile perché è un elemento di Σ.

* Si supponga ora che la formula $\neg\neg\varphi$ appartenga a s_ω, si vuole dimostrare che anche φ appartiene a s_ω. Di fatto $\neg\neg\varphi$ sarà una formula nella successione ordinata delle formule, diciamo φ_i, ed analogamente φ sarà la formula φ_j. Certamente $s_i \cup \{\neg\neg\varphi\}$, che è uguale a $s_i \cup \{\varphi_i\}$, è contenuto in qualche insieme che appartiene a Σ altrimenti φ_i, che è $\neg\neg\varphi$, non apparterrebbe a s_ω. Siccome $s_i \cup \{\neg\neg\varphi\}$ è contenuto in un insieme che appartiene a Σ anche $s_i \cup \{\neg\neg\varphi, \varphi\}$ deve essere contenuto in un insieme che appartiene a Σ dal momento che questa è una proprietà di consistenza. Ci sono due casi da esaminare, il primo in cui $j<i$, e il secondo in cui $i<j$.

a) Se $j<i$ allora $s_j \cup \{\varphi\}$, che è uguale a $s_j \cup \{\varphi_j\}$, è contenuto in un insieme che appartiene a Σ, essendo contenuto in $s_i \cup \{\neg\neg\varphi, \varphi\}$, sicché φ_j, che è φ, appartiene a s_{j+1} e quindi anche a s_ω.

b) Se invece i<j allora $\neg\neg\varphi \in s_{i+1} \subset s_j \in \Sigma$, sicché $s_j \cup \{\varphi_j\}$, che è $s_j \cup \{\varphi\}$, è contenuto in un insieme che appartiene a Σ, essendo questa una proprietà di consistenza. Così pure in questo caso φ appartiene a s_{j+1} e quindi anche a s_ω.

* Si supponga poi che la formula $\wedge\varphi\psi$ appartenga a s_ω, si vuole dimostrare che anche φ e ψ appartengono a s_ω. Di fatto $\wedge\varphi\psi$ sarà una formula nella successione ordinata delle formule, diciamo φ_i, ed analogamente φ sarà la formula φ_j e ψ sarà la formula φ_k. Certamente $s_i \cup \{\wedge\varphi\psi\}$, che è uguale a $s_i \cup \{\varphi_i\}$, è contenuto in qualche insieme che appartiene a Σ altrimenti φ_i, che è $\wedge\varphi\psi$, non apparterrebbe a s_ω. Siccome $s_i \cup \{\wedge\varphi\psi\}$ è contenuto in un insieme che appartiene a Σ anche $s_i \cup \{\wedge\varphi\psi, \varphi, \psi\}$ deve essere contenuto in un insieme che appartiene a Σ dal momento che questa è una proprietà di consistenza. Ci sono tre casi da esaminare, il primo in cui i è maggiore sia di j che di k, un secondo in cui i è minore sia di j che di k, e un terzo in cui i è compreso tra j e k.

a) Se j<i e k<i allora $s_j \cup \{\varphi\}$, che è uguale a $s_j \cup \{\varphi_j\}$, e $s_k \cup \{\psi\}$, che è uguale a $s_k \cup \{\varphi_k\}$, sono contenuti in un insieme che appartiene a Σ, essendo contenuti in $s_i \cup \{\wedge\varphi\psi, \varphi, \psi\}$, sicché φ_j, che è φ, appartiene a s_{j+1} e φ_k, che è ψ, appartiene a s_{k+1}, cioè φ e ψ appartengono a s_ω.

b) Se invece i<j e i<k allora $\wedge\varphi\psi \in s_{i+1} \subset s_j \in \Sigma$ ed anche $\wedge\varphi\psi \in s_{i+1} \subset s_k \in \Sigma$ sicché $s_j \cup \{\varphi_j\}$, che è $s_j \cup \{\varphi\}$, e $s_k \cup \{\varphi_k\}$, che è $s_k \cup \{\psi\}$, sono contenuti in insiemi che appartengono a Σ, essendo questa una proprietà di consistenza. Così pure in questo caso φ appartiene a s_{j+1} e ψ appartiene a s_{k+1}, cioè anche φ e ψ appartengono a s_ω.

c) Se infine i è compreso tra j e k, senza perdere in generalità si può supporre che sia j<i<k, allora $s_j \cup \{\varphi\}$, che è uguale a $s_j \cup \{\varphi_j\}$, è contenuto in un insieme che appartiene a Σ, essendo contenuto in $s_i \cup \{\wedge\varphi\psi, \varphi, \psi\}$, sicché φ_j, che è φ, appartiene a s_{j+1} ed anche a s_ω, mentre $\wedge\varphi\psi \in s_{i+1} \subset s_k \in \Sigma$ sicché $s_k \cup \{\varphi_k\}$, che è $s_k \cup \{\psi\}$, è contenuto in insiemi che appartiene a Σ, essendo questa una proprietà di consistenza, ed anche φ_k, che è ψ, appartiene a s_{k+1} ed anche a s_ω.

* Si supponga che la formula $\neg\wedge\varphi\psi$ appartenga a s_ω, si vuole dimostrare che o $\neg\varphi$ o $\neg\psi$ appartengono a s_ω. Di fatto $\neg\wedge\varphi\psi$ sarà una formula nella successione ordinata delle formule, diciamo φ_i, ed analogamente $\neg\varphi$ sarà la formula φ_j e $\neg\psi$ sarà la formula φ_k. Certamente $s_i \cup \{\neg\wedge\varphi\psi\}$, che è uguale a $s_i \cup \{\varphi_i\}$, è contenuto in qualche insieme che appartiene a Σ altrimenti φ_i, che è $\neg\wedge\varphi\psi$, non apparterrebbe a s_ω. Siccome $s_i \cup \{\neg\wedge\varphi\psi\}$ è contenuto in un insieme che appartiene a Σ anche o $s_i \cup \{\neg\wedge\varphi\psi, \neg\varphi\}$ deve essere contenuto in un insieme s' che appartiene a Σ oppure $s_i \cup \{\neg\wedge\varphi\psi, \neg\psi\}$ deve essere contenuto in un insieme s'' che appartiene a Σ dal momento che Σ è una proprietà di consistenza. Per come è stato definito s_{i+1}, segue che o $\neg\varphi$ appartiene a s_{i+1}, oppure $\neg\psi$ appartiene a s_{i+1}, comunque o $\neg\varphi$ o $\neg\psi$ appartiene a s_ω.

* Si supponga ora che la formula $\forall v_n\varphi$ appartenga a s_ω, si vuole dimostrare che, per ogni termine t, anche $\varphi(v_n/t)$ appartiene a s_ω. Di fatto $\forall v_n\varphi$ sarà una formula nella successione ordinata delle formule, diciamo φ_i, ed analogamente $\varphi(v_n/t)$ sarà la formula φ_j. Certamente $s_i \cup \{\forall v_n\varphi\}$, che è uguale a $s_i \cup \{\varphi_i\}$, è contenuto in qualche insieme che appartiene a Σ altrimenti φ_i, che è $\forall v_n\varphi$, non apparterrebbe a s_ω. Siccome $s_i \cup \{\forall v_n\varphi\}$ è contenuto in un insieme che appartiene a Σ anche $s_i \cup \{\forall v_n\varphi, \varphi(v_n/t)\}$ deve essere contenuto in un insieme che appartiene a Σ dal momento che questa è una proprietà di consistenza. Ci sono due casi da esaminare, il primo in cui j<i, e il secondo in cui i<j.

a) Se j<i allora $s_j \cup \{\varphi(v_n/t)\}$, che è uguale a $s_j \cup \{\varphi_j\}$, è contenuto in un insieme che appartiene a Σ, essendo contenuto in $s_i \cup \{\forall v_n\varphi, \varphi(v_n/t)\}$, sicché φ_j, che è $\varphi(v_n/t)$, appartiene a s_{j+1} e quindi anche a s_ω.

b) Se invece i<j allora $\forall v_n\varphi \in s_{i+1} \subset s_j \in \Sigma$, sicché $s_j \cup \{\varphi_j\}$, che è $s_j \cup \{\varphi(v_n/t)\}$, è contenuto in un insieme che appartiene a Σ, essendo questa una proprietà di consistenza. Così pure in questo caso $\varphi(v_n/t)$ appartiene a s_{j+1} e quindi anche a s_ω.
* Si supponga ora che la formula $\neg\forall v_n\varphi$ appartenga a s_ω, si vuole dimostrare che esiste un termine t tale che anche $\neg\varphi(v_n/t)$ appartiene a s_ω. Di fatto $\neg\forall v_n\varphi$ sarà una formula nella successione ordinata delle formule, diciamo φ_i, ed analogamente $\neg\varphi(v_n/t)$ sarà la formula φ_j. Certamente $s_i \cup \{\neg\forall v_n\varphi\}$, che è uguale a $s_i \cup \{\varphi_i\}$, è contenuto in qualche insieme che appartiene a Σ altrimenti φ_i, che è $\neg\forall v_n\varphi$, non apparterrebbe a s_ω. Siccome $s_i \cup \{\neg\forall v_n\varphi\}$ è contenuto in un insieme che appartiene a Σ esiste un opportuno termine t tale che anche $s_i \cup \{\neg\forall v_n\varphi, \neg\varphi(v_n/t)\}$ deve essere contenuto in un insieme che appartiene a Σ dal momento che questa è una proprietà di consistenza. Per come è stato definito s_{i+1}, segue che $\neg\varphi(v_n/t)$ appartiene a s_{i+1}, sicché $\neg\varphi(v_n/t)$ appartiene a s_ω.
* Ora si vuole mostrare che per ogni termine t la formula t=t appartiene a s_ω. Di fatto t=t sarà una formula nella successione ordinata delle formule, diciamo φ_i, e si consideri l'insieme s_i della successione di elementi di Σ che è stata costruita. Certamente anche $s_i \cup \{t=t\}$, che è uguale a $s_i \cup \{\varphi_i\}$, è contenuto in qualche insieme che appartiene a Σ poiché Σ è una proprietà di consistenza. Così t=t appartiene a s_{i+1} ed anche a s_ω.
* Infine si supponga che le formule t=t' e $\varphi(v_n/t)$ appartengano a s_ω. Si vuole dimostrare che anche le formule del tipo $\varphi(v_n/t/t')$ appartengono a s_ω. Di fatto $\varphi(v_n/t)$ sarà una formula nella successione ordinata delle formule, diciamo φ_i, ed analogamente t=t' sarà la formula φ_j e $\varphi(v_n/t/t')$ sarà la formula φ_k. Certamente $s_i \cup \{\varphi(v_n/t)\}$, che è uguale a $s_i \cup \{\varphi_i\}$, è contenuto in qualche insieme che appartiene a Σ altrimenti φ_i, che è $\varphi(v_n/t)$, non apparterrebbe a s_ω. Analogamente $s_j \cup \{t=t')\}$, che è uguale a $s_j \cup \{\varphi_j\}$, è contenuto in qualche insieme che appartiene a Σ altrimenti φ_j, che è t=t', non apparterrebbe a s_ω. Sia h=max{i,j}, allora t=t' e $\varphi(v_n/t)$ appartengono a s_{h+1}. Allora esiste un elemento s' di Σ che contiene $s_{h+1} \cup \{\varphi(v_n/t/t')\}$, poiché Σ è una proprietà di consistenza. Ci sono due casi da esaminare, il primo in cui k<h, e il secondo in cui h<k.
a) Se k<h allora $s_k \cup \{\varphi(v_n/t/t')\}$, che è uguale a $s_k \cup \{\varphi_k\}$, è contenuto in un insieme che appartiene a Σ, essendo contenuto in $s_{h+1} \cup \{\varphi(v_n/t/t')\}$, sicché φ_k, che è $\varphi(v_n/t/t')$, appartiene a s_{k+1} e quindi anche a s_ω.
b) Se invece h<k allora $\{t=t',\varphi(v_n/t)\} \subset s_{h+1} \subset s_k \in \Sigma$, sicché $s_k \cup \{\varphi_k\}$, che è $s_k \cup \{\varphi(v_n/t)\}$, è contenuto in un insieme che appartiene a Σ, essendo questa una proprietà di consistenza. Così pure in questo caso $\varphi(v_n/t)$ appartiene a s_{k+1} e quindi anche a s_ω.
Avendo controllato tutte le clausole di un insieme di Hintikka, si può concludere che s_ω è un insieme di Hintikka, e pertanto s_ω è soddisfacibile. Di conseguenza anche s, che è contenuto in s_ω, è soddisfacibile ed ha modello, come volevasi dimostrare.

COMMENTO AL TEOREMA DI ESISTENZA DEL MODELLO

Può sembrare che nella dimostrazione del teorema precedente si sia fatto uso dell'assioma della scelta. Infatti, quando nel determinare la successione di insiemi di Σ la cui unione è s_ω, si è dichiarato che s_{n+1} è un insieme con certe caratteristiche rispetto a s_n, ma siccome non si è detto che di insiemi con quelle caratteristiche ce ne è uno solo (perché in generale ciò è falso), segue che s_{n+1} sarà un particolare insieme da scegliersi tra quelli con le caratteristiche volute. Di fatto, a causa della numerabilità del linguaggio (e della possibilità di bene ordinare i simboli del linguaggio associando biunivocamente ciascuno di essi ad un numero naturale), non è necessario l'uso dell'assioma della scelta, perché i singoli insieme che appartengono a Σ possono essere rappresentati in modo standardizzato, ordinando lessicograficamente le formule che appartengono a ciascuno di essi, e quindi si possono ordinare lessicograficamente anche gli insiemi di Σ, una volta che sono stati così rappresentati, e si può stabilire che s_{n+1} sia il primo elemento nell'ordine lessicografico con le caratteristiche volute, evitando così l'uso dell'assioma della scelta.

Per cominciare a mostrare l'utilità della nozione di proprietà di consistenza, che, come detto introducendo questo argomento, vuole cercare di dimostrare la soddisfacibilità di insiemi di formule che hanno certe caratteristiche, si ridimostrerà il teorema di compattezza seguendo questa diversa strada.

Teorema di compattezza (nuova dimostrazione). Gli insiemi di formule finitamente soddisfacibili sono soddisfacibili. (Detto altrimenti se tutti i sottinsiemi finiti di un insieme di formule sono soddisfacibili, allora anche l'insieme è soddisfacibile).

DIMOSTRAZIONE. Non è restrittivo supporre che ci siano infiniti simboli per costante di un insieme numerabile M che non occorrono in un insieme di formule finitamente soddisfacibile (basta considerare un linguaggio in cui si possono scrivere tutte le formule dell'insieme finitamente soddisfacibile e considerare per M un insieme numerabili di nuovi simboli per costante). Si vuole mostrare che l'insieme di tutti gli insiemi s di formule finitamente soddisfacibili e tali che infiniti simboli per costante di M non occorrono in s, è una proprietà di consistenza rispetto a M, cioè l'insieme Γ, che è {s: s è un insieme di formule finitamente soddisfacibile in cui infiniti simboli di M non occorrono}, è una proprietà di consistenza. Per provare ciò, bisognerà controllare, una per una, che le clausole di una proprietà di consistenza siano soddisfatte.

0) Un insieme finitamente soddisfacibile non può contenere una formula e la sua negazione, perché queste due costituirebbero un sottinsieme finito non soddisfacibile. Inoltre infiniti simboli per costante dell'insieme M non occorrono in un qualsiasi insieme dell'insieme Γ proprio per come questo è stato definito. Così la prima clausola di una proprietà di consistenza è soddisfatta.

1) Si supponga che una formula del tipo $\neg\neg\varphi$ appartenga ad un insieme s di Γ, cioè ad un insieme s finitamente soddisfacibile tale che un insieme infinito di simboli per costante di M non vi occorre. Si deve far vedere che anche l'insieme $s\cup\{\varphi\}$ è contenuto in un insieme che appartiene a Γ, addirittura si mostrerà che lui stesso appartiene a Γ mostrando che è finitamente soddisfacibile e tale che una infinità di simboli per costante di M non vi occorrono. Infatti i sottinsiemi finiti di $s\cup\{\varphi\}$a cui non appartiene φ sono anche sottinsiemi finiti di s, e dunque soddisfacibili per ipotesi; mentre uno qualsiasi di quelli a cui appartiene φ, lo si indichi con $s_0\cup\{\varphi\}$, è contenuto in $s_0\cup\{\varphi\}$ $\cup\{\neg\neg\varphi\}$, ancora un insieme finito, che è soddisfacibile se e solo se lo è $s_0\cup\{\neg\neg\varphi\}$ che è un sottinsieme finito di s, e dunque soddisfacibile per ipotesi: sicché anche $s\cup\{\varphi\}$ è finitamente soddisfacibile. Inoltre i simboli per costante di M che non occorrono in $s\cup\{\varphi\}$ sono quelli che non occorrono in s (e questi sono in numero infinito) in quanto quelli che occorrono in φ occorrono già in $\neg\neg\varphi$ che è in s, sicché c'è una infinità di simboli per costante di M che non occorrono in $s\cup\{\varphi\}$. Così si è completata la dimostrazione che $s\cup\{\varphi\}$ appartiene a Γ.

2) Si supponga che una formula del tipo $\wedge\varphi\psi$ appartenga ad un insieme s di Γ cioè ad un insieme s finitamente soddisfacibile tale che un insieme infinito di simboli per costante di M non vi occorre. Si deve far vedere che anche l'insieme $s\cup\{\varphi,\psi\}$ è contenuto in un insieme che appartiene a Γ, addirittura si mostrerà che lui stesso appartiene a Γ mostrando che è finitamente soddisfacibile e tale che una infinità di simboli per co-

stante di M non vi occorrono. Infatti i sottinsiemi finiti di $s\cup\{\varphi,\psi\}$ a cui non appartiene né φ né ψ sono anche sottinsiemi finiti di s, e dunque soddisfacibili per ipotesi; mentre ciascuno di quelli a cui appartengono o φ o ψ o entrambe le formule, lo si indichi o con $s_0\cup\{\varphi\}$ o con $s_0\cup\{\psi\}$ o con $s_0\cup\{\varphi,\psi\}$ a seconda del caso, è contenuto in $s_0\cup\{\varphi,\psi\}\cup\{\wedge\varphi\psi\}$, ancora un insieme finito, che è soddisfacibile se e solo se lo è $s_0\cup\{\wedge\varphi\psi\}$ che è un sottinsieme finito di s, e dunque soddisfacibile per ipotesi: sicché anche $s\cup\{\varphi,\psi\}$ è finitamente soddisfacibile. Inoltre i simboli per costante di M che non occorrono in $s\cup\{\varphi,\psi\}$ sono quelli che non occorrono in s (e questi sono in numero infinito) in quanto quelli che occorrono o in φ o in ψ occorrono già in $\wedge\varphi\psi$ che è in s, sicché c'è una infinità di simboli per costante di M che non occorrono in $s\cup\{\varphi,\psi\}$. Così si è completata la dimostrazione che $s\cup\{\varphi,\psi\}$ appartiene a Γ.
3) Si supponga che una formula del tipo $\neg\wedge\varphi\psi$ appartenga ad un insieme s di Γ, cioè ad un insieme s finitamente soddisfacibile tale che un insieme infinito di simboli per costante di M non vi occorre. Si deve far vedere che o l'insieme $s\cup\{\neg\varphi\}$ o l'insieme $s\cup\{\neg\psi\}$ è contenuto in un insieme che appartiene a Γ, addirittura si mostrerà che uno dei due appartiene a Γ mostrando che è finitamente soddisfacibile e tale che una infinità di simboli per costante di M non vi occorrono. Per assurdo si supponga che nessuno dei due sia finitamente soddisfacibile, allora esisteranno un sottinsieme finito del primo, lo si indichi con $s_0\cup\{\neg\varphi\}$, e un sottinsieme finito del secondo, lo si indichi con $s'_0\cup\{\neg\psi\}$, che non sono soddisfacibili. Ne segue che gli insiemi finiti $s_0\cup s'_0\cup\{\neg\varphi\}\cup\{\neg\wedge\varphi\psi\}$ e $s_0\cup s'_0\cup\{\neg\psi\}\cup\{\neg\wedge\varphi\psi\}$ sono non soddisfacibili, ma questi lo sono se e solo se l'insieme finito $s_0\cup s'_0\cup\{\neg\wedge\varphi\psi\}$ è non soddisfacibile (se $s_0\cup s'_0\cup\{\neg\wedge\varphi\psi\}$ fosse soddisfacibile lo sarebbe anche o $s_0\cup s'_0\cup\{\neg\varphi\}\cup\{\neg\wedge\varphi\psi\}$ o $s_0\cup s'_0\cup\{\neg\psi\}\cup\{\neg\wedge\varphi\psi\}$), ma $s_0\cup s'_0\cup\{\neg\wedge\varphi\psi\}$ è soddisfacibile per ipotesi essendo un sottinsieme finito di s, e la contraddizione raggiunta prova quello che o l'insieme $s\cup\{\neg\varphi\}$ o l'insieme $s\cup\{\neg\psi\}$ è finitamente soddisfacibile. Inoltre i simboli per costante di M che non occorrono o in $s\cup\{\neg\varphi\}$ o in $s\cup\{\neg\psi\}$ sono quelli che non occorrono in s (e questi sono in numero infinito) in quanto quelli che occorrono o in $\neg\varphi$ o in $\neg\psi$ occorrono già in $\neg\wedge\varphi\psi$ che è in s, sicché c'è una infinità di simboli per costante di M che non occorrono in $s\cup\{\neg\varphi\}$ e una infinità di simboli per costante di M che non occorrono in $s\cup\{\neg\psi\}$. Così si è completata la dimostrazione che o $s\cup\{\neg\varphi\}$ appartiene a Γ o $s\cup\{\neg\psi\}$ appartiene a Γ.
4) Si supponga che una formula del tipo $\forall v_n\varphi$ appartenga ad un insieme s di Γ, cioè ad un insieme s finitamente soddisfacibile tale che un insieme infinito di simboli per costante di M non vi occorre. Si deve far vedere che, qualunque sia il termine t, anche l'insieme $s\cup\{\varphi(v_n/t)\}$ è contenuto in un insieme che appartiene a Γ, addirittura si mostrerà che lui stesso appartiene a Γ facendo vedere che è finitamente soddisfacibile ed è tale che una infinità di simboli per costante di M non vi occorrono. Infatti i sottinsiemi finiti di $s\cup\{\varphi(v_n/t)\}$a cui non appartiene $\varphi(v_n/t)$ sono anche sottinsiemi finiti di s, e dunque soddisfacibili per ipotesi; mentre uno qualsiasi di quelli a cui appartiene $\varphi(v_n/t)$, lo si indichi con $s_0\cup\{\varphi(v_n/t)\}$, è contenuto in $s_0\cup\{\varphi(v_n/t)\}\cup\{\forall v_n\varphi\}$, ancora un insieme finito, che è soddisfacibile se e solo se lo è $s_0\cup\{\forall v_n\varphi\}$ che è un sottinsieme finito di s, e dunque è soddisfacibile per ipotesi: sicché anche $s\cup\{\varphi(v_n/t)\}$ è finitamente soddisfacibile. Inoltre i simboli per costante di M che non occorrono in $s\cup\{\varphi(v_n/t)\}$ sono quelli che non occorrono in s (e questi sono in numero infinito) meno quelli che eventualmente occorrono in t (che sono in numero finito), sicché rimane comunque una infinità di simboli per costante di M che non occorrono in $s\cup\{\varphi(v_n/t)\}$. Così si è completata la dimostrazione che $s\cup\{\varphi(v_n/t)\}$ appartiene a Γ.

5) Si supponga che una formula del tipo $\neg\forall v_n\varphi$ appartenga ad un insieme s di Γ, cioè ad un insieme s finitamente soddisfacibile tale che un insieme infinito di simboli per costante di M non vi occorre. Si deve far vedere che, esiste un termine t, tale che l'insieme $s\cup\{\neg\varphi(v_n/t)\}$ è contenuto in un insieme che appartiene a Γ, addirittura si mostrerà che lui stesso appartiene a Γ facendo vedere che è finitamente soddisfacibile ed è tale che una infinità di simboli per costante di M non vi occorrono. Sia t un simbolo per costante che non occorre in s: sicuramente c'è un tale simbolo a causa dell'ipotesi fatta che un insieme infinito di simboli di M non occorre in s (si noti che tutta la complicazione di considerare le proprietà di consistenza come relative ad un insieme come M è dovuta proprio al doversi attrezzare per superare il presente passaggio). Ora i sottinsiemi finiti di $s\cup\{\neg\varphi(v_n/t)\}$a cui non appartiene $\neg\varphi(v_n/t)$ sono anche sottinsiemi finiti di s, e dunque soddisfacibili per ipotesi; mentre uno qualsiasi di quelli a cui appartiene $\neg\varphi(v_n/t)$, lo si indichi con $s_0\cup\{\neg\varphi(v_n/t)\}$, è contenuto in $s_0\cup\{\neg\varphi(v_n/t)\}\cup\{\neg\forall v_n\varphi\}$, ancora un insieme finito, che è soddisfacibile se e solo se lo è $s_0\cup\{\neg\forall v_n\varphi\}$, basta interpretare opportunamente t, cosa possibile dal momento che t non occorre nell'insieme $s_0\cup\{\neg\forall v_n\varphi\}$. Poiché $s_0\cup\{\neg\forall v_n\varphi\}$ è un sottinsieme finito di s, esso è soddisfacibile per ipotesi: sicché anche $s\cup\{\neg\varphi(v_n/t)\}$ è finitamente soddisfacibile. Inoltre i simboli per costante di M che non occorrono in $s\cup\{\neg\varphi(v_n/t)\}$ sono quelli che non occorrono in s (e questi sono in numero infinito) meno t , sicché rimane comunque una infinità di simboli per costante di M che non occorrono in $s\cup\{\neg\varphi(v_n/t)\}$. Così si è completata la dimostrazione che $s\cup\{\neg\varphi(v_n/t)\}$ appartiene a Γ.
6) Sia s un insieme di Γ, cioè s sia un insieme finitamente soddisfacibile tale che un insieme infinito di simboli per costante di M non vi occorre. Sia t un termine del linguaggio. Si deve far vedere che l'insieme $s\cup\{t=t\}$ è contenuto in un insieme che appartiene a Γ, addirittura si mostrerà che lui stesso appartiene a Γ facendo vedere che è finitamente soddisfacibile ed è tale che una infinità di simboli per costante di M non vi occorrono. Infatti i sottinsiemi finiti di $s\cup\{t=t\}$a cui non appartiene t=t sono anche sottinsiemi finiti di s, e dunque soddisfacibili per ipotesi; mentre uno qualsiasi di quelli a cui appartiene t=t, lo si indichi con $s_0\cup\{t=t\}$ è soddisfacibile se e solo se lo è s_0, poiché la formula t=t è valida, che è un sottinsieme finito di s, e dunque è soddisfacibile per ipotesi: sicché anche $s\cup\{t=t\}$ è finitamente soddisfacibile. Inoltre i simboli per costante di M che non occorrono in $s\cup\{t=t\}$ sono quelli che non occorrono in s (e questi sono in numero infinito) meno quelli che eventualmente occorrono in t (che sono in numero finito), sicché rimane comunque una infinità di simboli per costante di M che non occorrono in $s\cup\{t=t\}$. Così si è completata la dimostrazione che $s\cup\{\varphi(v_n/t)\}$ appartiene a Γ.
7) Si supponga che le formule del tipo t=t' e $\varphi(v_i/t)$ appartengano ad un insieme s di Γ, cioè ad un insieme s finitamente soddisfacibile tale che un insieme infinito di simboli per costante di M non vi occorre. Si deve far vedere che anche l'insieme $s\cup\{\varphi(v_i/t/t')\}$ è contenuto in un insieme che appartiene a Γ, addirittura si mostrerà che lui stesso appartiene a Γ mostrando che è finitamente soddisfacibile e tale che una infinità di simboli per costante di M non vi occorrono. Infatti i sottinsiemi finiti di $s\cup\{\varphi(v_i/t/t')\}$a cui non appartiene $\varphi(v_i/t/t')$ sono anche sottinsiemi finiti di s, e dunque soddisfacibili per ipotesi; mentre uno qualsiasi di quelli a cui appartiene $\varphi(v_i/t/t')$, lo si indichi con $s_0\cup\{\varphi(v_i/t/t')\}$ è contenuto in $s_0\cup\{t=t',\varphi(v_i/t)\}\cup\{\varphi(v_i/t/t')\}$, ancora un insieme finito, che è soddisfacibile se e solo se lo è $s_0\cup\{t=t',\varphi(v_i/t)\}$ che è un sottinsieme finito di s, e dunque è soddisfacibile per ipotesi: sicché anche $s\cup\{\varphi(v_i/t/t')\}$ è finitamente soddisfacibile. Inoltre i simboli per costante di M che non occorrono in $s\cup\{\varphi(v_i/t/t')\}$ sono

quelli che non occorrono in s (e questi sono in numero infinito) in quanto quelli che occorrono in $\varphi(v_i/t/t')$ occorrono già o in $\varphi(v_i/t)$ o in t=t' che sono in s, sicché c'è una infinità di simboli per costante di M che non occorrono in $s\cup\{\varphi(v_i/t/t')\}$. Così si è completata la dimostrazione che $s\cup\{\varphi(v_i/t/t')\}$ appartiene a Γ.

Avendo esaurito le clausole di una proprietà di consistenza, si può finalmente concludere che Γ è una proprietà di consistenza, sicché, per il teorema di esistenza del modello, ogni suo elemento è un insieme di formule soddisfacibile. Poiché per ogni insieme finitamente soddisfacibile si può costruire una proprietà di consistenza a cui appartenga, ogni insieme finitamente soddisfacibile è soddisfacibile, e si è ridimostrato il teorema di compattezza.

OSSERVAZIONE SULLA NUOVA DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DI COMPATTEZZA

Qui si impone un confronto tra la dimostrazione appena conclusa del teorema di compattezza e quella che si era già vista, anche per giustificare perché si è presentata una seconda dimostrazione di un risultato già ottenuto.

Al di là dell'esemplificare l'applicabilità della nozione di proprietà di consistenza, si può osservare che la nuova dimostrazione è piuttosto lunga, dovendo analizzare ciascuna delle 8 singole clausole di una proprietà di consistenza. D'altra parte l'analisi di ciascuna clausola è abbastanza semplice, diretta ed analoga a quella di altre clausole. Inoltre si è evitata la dimostrazione che le regole $R_{1,n}$ e R_2 preservano la finita soddisfacibilità, oppure, nel caso delle regole formula per formula, si sono evitati il teorema di completezza e l'osservazione che un albero chiuso finito con una radice formata da una infinità di formule può essere ricostruito (a parte la radice) partendo da un sottinsieme finito della radice che contenga le formule con sottoformule che sono analizzate nella costruzione dell'albero o considerate per chiudere l'albero. non si è fatto ricorso alla nozione di albero. Questa era servita per organizzare l'analisi, ora invece ci si assicura che si possano fare i passaggi di analisi e la dimostrazione del teorema mostra che ciò è sufficiente perché si possa organizzare l'analisi che è realizzata all'interno della stessa dimostrazione.

32. INTERPOLAZIONE.

Dalla loro introduzione è evidente una notevole differenza tra i significati a cui sono stati associati i simboli $\rightarrow$ e $\models$. Il primo è un particolare connettivo, detto implicazione, (determinabile mediante i connettivi $\neg$ e $\wedge$) che significa la modalità di mettere assieme due descrizioni, una prima detta antecedente e una seconda detta conseguente, per giungere ad una descrizione complessiva. Il secondo è il segno di conseguenza logica che indica l'essere vera della formula che segue il simbolo, detta conseguenza, in tutte le realizzazioni in cui sono vere le formule che precedono i simbolo, dette premesse. Si è già notato un legame tra i significati dei due simboli esplicitato dal seguente teorema: $\models\alpha\rightarrow\beta$ se e solo se $\alpha\models\beta$, dove α e β indicano formule. Si noti come il teorema non stabilisce un legame tra $\rightarrow$ e $\models$, quanto piuttosto tra la validità di una formula il cui connettivo principale è l'implicazione e la conseguenzialità logica tra l'antecedente dell'implicazione che diviene premessa e il conseguente che diviene conseguenza. Il fatto che ci siano formule, il cui connettivo principale è l'implicazione, che sono vere in una realizzazione intesa senza che ci sia alcun legame tra antecedente e

conseguente (ad esempio "1 diverso da 0 implica che Parigi è la capitale della Francia"), mostra quanto il significato del connettivo $\rightarrow$ sia lontano dal significato abitualmente attribuito alla parola implica, che prevede uno stretto legame, quasi di causalità, tra antecedente e conseguente. Di fatto il significato del connettivo implica è la specifica funzione sui valori di verità che è stata definita, funzione che non considera la presenza o assenza di eventuali legami tra antecedente e conseguente, ma solo i loro valori di verità in una realizzazione, cioè se descrivono o meno le cose come avvengono nella realizzazione.
Non considerando legami di causalità tra antecedente e conseguente il connettivo implica non risponde pienamente al significato corrente nel linguaggio ordinario della parola implica. Ci si può domandare se la nozione di conseguenza logica è più vicina alla nozione di implicazione come usualmente intesa nel linguaggio corrente. In base a quanto osservato precedentemente, si è interessati a vedere se ci deve essere un qualche legame tra premesse e conseguenza affinché si possa dire che una conseguenza logica è corretta. Come ricordato, ciò corrisponde alla verità in ogni realizzazione delle formula di tipo implicazione, ma ora non si vuole vedere solo il comportamento della funzione di nome implica sui valori di verità, bensì si vuole vedere se ci deve essere un legame tra antecedente e conseguente affinché l'implicazione sia vera in ogni realizzazione.

I seguenti esempi potrebbero fare pensare che anche per la validità di una implicazione possa non essere necessario alcun legame tra antecedente e conseguente: $\models (\neg c=c) \rightarrow Pv_0$, $\models Pv_0 \rightarrow c=c$ dove c è un simbolo per costante e P un predicato unario. Tuttavia si può osservare come, nel primo esempio presentato l'antecedente sia falso in ogni realizzazione, e dunque l'implicazione sia banalmente valida, mentre nel secondo esempio il conseguente è valido sicché ancora l'implicazione è banalmente valida. Esclusi allora i casi in cui l'antecedente non è mai vero oppure il conseguente è valido, ci deve essere un legame, e di che tipo, tra antecedente e conseguente affinché l'implicazione sia valida?

Il seguente teorema di interpolazione dice proprio che ci deve essere un tale legame e lo precisa. Per poter enunciare facilmente il teorema conviene introdurre la seguente definizione.

Data una formula di tipo implicazione, $\alpha\rightarrow\beta$, si chiama **interpolante** per tale formula una formula δ tale che i simboli non logici e le variabili libere occorrenti in δ occorrono sia in α che in β, ed inoltre tale che $\models \alpha\rightarrow\delta$, e $\models \delta\rightarrow\beta$. L'interpolante vorrebbe essere quanto di comune ci deve essere tra antecedente e conseguente quando l'implicazione e' valida, la causa, in qualche modo, che giustifica la validità dell'implicazione. Si noti, poi, come questa parte comune possa essere individuata proprio attraverso il linguaggio precisando che deve contenere simboli in comune tra antecedente e conseguente.

Per non essere sormontati da difficoltà tecniche e dover distinguere troppi casi particolari, e' opportuno assumere che il linguaggio non abbia simboli per funzione. Si ricordi che questa limitazione non e' severa dal momento che e' facilmente aggirabile introducendo nel linguaggio corrispondenti predicati con arietà di uno maggiore rispetto all'arietà del simbolo di funzione che deve sostituire.

Teorema di interpolazione. Data una qualsiasi formula di tipo implicazione, se è valida allora ha interpolante. Cioè se $\models \alpha\rightarrow\beta$ allora esiste un interpolante per $\alpha\rightarrow\beta$.

Per dimostrare questo teorema utilizzando il metodo delle proprietà di consistenza, bisogna vedere la particolare situazione presentata dal teorema come un particolare insieme di formule appartenente ad un insieme di insiemi di formule, che dovrà essere una proprietà di consistenza.

Prima di addentrarci nel modo opportuno di definire una tale proprietà di consistenza, si osservi che si può mostrare l'esistenza di un interpolante anche nei casi in cui l'antecedente dell'implicazione non è vero in nessuna realizzazione o il conseguente è valido, casi in cui si era osservata la possibilità di mancanza di legame tra significativo tra antecedente e conseguente. Nel primo caso, se la formula α è falsa in ogni realizzazione allora si può considerare la formula $\neg\forall v_0(v_0=v_0)$ come interpolante per la formula $\alpha\to\beta$. Infatti, in tale formula non occorrono né simboli non logici, né variabili libere, sicché la prima condizione per essere un interpolante è vacuamente soddisfatta. Inoltre, dal fatto che la formula α è falsa in ogni realizzazione, segue che $\models \alpha\to\neg\forall v_0(v_0=v_0)$, ed anche, essendo $\neg\forall v_0(v_0=v_0)$ un enunciato falso in ogni realizzazione, si ha pure che $\models(\neg\forall v_0(v_0=v_0))\to\beta$. Nel caso, invece, in cui β è una formula valida, si può considerare la formula $\forall v_0(v_0=v_0)$ come interpolante per la formula $\alpha\to\beta$. Infatti, anche in questo caso nella formula proposta come interpolante non occorrono né simboli non logici, né variabili libere, sicché la prima condizione per essere un interpolante è vacuamente soddisfatta. Inoltre dal fatto che l'enunciato $\forall v_0(v_0=v_0)$ è valido segue che $\models\alpha\to\forall v_0(v_0=v_0)$, ed anche, essendo β una formula valida, si ha che $\models(\forall v_0(v_0=v_0))\to\beta$.

Si cercherà ora di analizzare come costruire una proprietà di consistenza per dimostrare il teorema d'interpolazione.

Dapprima si può osservare che il teorema d'interpolazione parla di validità di certe formule, mentre le proprietà di consistenza dimostrano la soddisfacibilità di insiemi di formule. Così può essere conveniente considerare la contronominale del teorema d'interpolazione che si esprime come segue: se ogni formula non è un interpolante per $\alpha\to\beta$ allora $\alpha\to\beta$ non è valida. L'affermazione che ogni formula non è un interpolante per $\alpha\to\beta$ può essere espressa dicendo che ogni formula δ che ha la specifica proprietà sintattica degli interpolanti relativamente alla formula $\alpha\to\beta$ (cioè i cui simboli non logici e le cui variabili libere occorrono sia in α che in β), è una formula che chiameremo <u>anti-interpolante,</u> cioè una formula tale che o $\neg(\alpha\to\delta)$ (che equivale a $\alpha\wedge\neg\delta$) è soddisfacibile o $\neg(\delta\to\beta))$ (che equivale a $\delta\wedge\neg\beta$) è soddisfacibile. D'altra parte l'affermazione della non validità di $\alpha\to\beta$ equivale alla soddisfacibilità di $\neg(\alpha\to \beta)$ cioè alla soddisfacibilità di $\alpha\wedge\neg\beta$. Con la terminologia introdotta, la contronominale del teorema d'interpolazione può essere enunciata dicendo che, se ogni formula con la specifica proprietà sintattica relativamente alla formula $\alpha\to\beta$, e' un anti-interpolante, allora la formula $\alpha\wedge\neg\beta$ e' soddisfacibile.

Un secondo aspetto introdotto dalle proprietà di consistenza è il passare da un insieme di formule ad un altro nella proprietà di consistenza per sviluppare un'analisi delle formule del primo insieme. Nel caso attuale la formula che si vuole dimostrare soddisfacibile è la formula $\alpha\wedge\neg\beta$, che si può analizzare scomponendo le formule α e $\neg\beta$, sicché l'analisi porterà a considerare due insiemi di formule, indichiamoli con $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_i\}$ e $\{\neg\beta_1, \ldots, \neg\beta_j\}$ al posto delle formule α e $\neg\beta$. rispettivamente. Di conseguenza la nozione di anti-interpolante dovrà essere ampliata per considerare insiemi di formule, e diverrà: una formula δ che ha la specifica proprietà sintattica rispetto alla coppia di insiemi di formule dati (cioè se i simboli non logici e le variabili libere che occorrono in δ occorrono anche sia in una delle formule del primo insieme che in una delle formule del secondo insieme) è un anti-interpolante generalizzato relativamente alla coppia di insiemi di formule $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_i\}$ e $\{\neg\beta_1, \ldots, \neg\beta_j\}$, se o l'insieme di formule $\{\alpha_1, ...$

., α_i, $\neg\delta$} è soddisfacibile o l'insieme di formule {δ, $\neg\beta_1$, …, $\neg\beta_j$} è soddisfacibile. E' naturale chiamare interpolante generalizzato una formula δ che ha la specifica proprietà sintattica rispetto alla coppia di insiemi di formule e che non e' un anti-interpolante generalizzato, cioè tale che gli insiemi {α_1, …, α_i, $\neg\delta$} e {δ, $\neg\beta_1$, …, $\neg\beta_j$} non sono soddisfacibili. Si noti come, se i due insiemi di formule constano solamente della formula α e della formula $\neg\beta$ rispettivamente, le nuove nozioni generalizzate di anti-interpolante e di interpolante coincidano rispettivamente con le precedenti. Così il teorema d'interpolazione sarà un caso particolare del seguente

Teorema d'interpolazione generalizzato: Dato un insieme di formule {γ_1, … , γ_{i+j}}, esiste un modo di dividerlo in due insiemi di formule {α_1, …, α_i} e {$\neg\beta_1$, …, $\neg\beta_j$}, tali che se ogni formula con la specifica proprietà sintattica rispetto alla coppia di insiemi di formule considerati è un anti-interpolante, allora l'insieme di formule dato, che è {α_1, .. ., α_i, $\neg\beta_1$, …, $\neg\beta_j$}, è soddisfacibile.

Commento sulla notazione: dicendo che l'insieme {γ_1, … , γ_{i+j}} è {α_1, .. ., α_i, $\neg\beta_1$, …, $\neg\beta_j$} qui si vuole dire che i delle formule dell'insieme dato vengono scelte per costituire un primo insieme, mentre le altre formule dell'insieme dato vengono considerate come negazioni (se non lo sono possono essere viste, in modo equivalente, come doppie negazioni delle stesse formule, e quindi negazioni di negazioni) e esse costituiscono un secondo insieme.

E' immediato che da questo teorema segue il teorema d'interpolazione quando l'insieme di formule considerato è {α, $\neg\beta$}; infatti allora, per contronominale, la negazione della tesi del teorema di interpolazione generalizzato afferma che la formula $\alpha\rightarrow\beta$ è valida (ipotesi del teorema d'interpolazione), e la negazione dell'ipotesi che esiste una suddivisione dell'insieme dato tale che ogni formula con la specifica proprietà sintattica sia un anti-interpolante per quella suddivisione dice che per ogni suddivisione (in particolare anche per la suddivisione nei due insiemi {α} e {$\neg\beta$}) deve esistere un interpolante per $\alpha\rightarrow\beta$, come vuole la tesi del teorema d'interpolazione.

La dimostrazione di questo teorema sarà molto lunga, dovendo considerare tutte le varie clausole e i casi entro queste, ma gli sviluppi all'interno dei vari casi saranno molto simili (può essere utile confrontarli e vedere come siano stati ripetuti con la tecnica della ricopiatura di lunghi brani). Certo ci saranno anche piccole differenze da caso a caso per tener conto degli specifici sviluppi degli interpolanti generalizzati nelle diverse situazioni, ma si può dire che quasi sempre i passaggi svolti saranno esattamente quelli da aspettarsi nelle varie situazioni. Così ci si sarebbe potuti limitare a considerare, a titolo di esempio, pochi casi, magari i più critici. Qui, tuttavia, si è preso il tempo e lo spazio per esporre ogni passaggio, perché possa servire da eventuale riferimento, anche se il suggerimento è quello di vedere alcuni casi e di rendersi conto di essere in grado di ricostruirsi gli altri prevedendo dove saranno le difficoltà tipiche.

DIMOSTRAZIONE del teorema d'interpolazione generalizzato.

Si consideri il seguente insieme Σ di insiemi finiti di formule S={γ_1, … , γ_{i+j}} tali che c'e' un modo di dividere S in due insiemi di formule {α_1, …, α_i} e {$\neg\beta_1$, …, $\neg\beta_j$}, tale che ogni formula con la specifica proprietà sintattica rispetto alla coppia di insiemi di formule considerati è un anti-interpolante generalizzato. Si vuole dimostrare che Σ è una proprietà di consistenza rispetto ad un insieme numerabile di simboli per costante M, controllando ciascuna delle clausole previste dalla definizione di proprietà di consistenza.

Anzitutto si osservi che i simboli di costante, ed in particolare i simboli di costante in

M, che occorrono in ciascun insieme S appartenente a Σ sono in numero finito poiché S è finito. Ora si considereranno le varie clausole una per una.

0) Si vuol far vedere che non ci può essere alcuna formula φ tale che sia lei che la sua negazione appartengono a qualche insieme appartenente a Σ. Allo scopo si supponga per assurdo che sia φ che $\neg\varphi$ appartengano a un certo S che appartiene a Σ. Nel dividere S in due sottinsiemi può succedere che sia φ che $\neg\varphi$ appartengano al primo sottinsieme oppure che entrambi appartengano al secondo sottinsieme, oppure che uno appartenga ad un sottinsieme e l'altro all'altro; di conseguenza si dovranno esaminare i quattro casi possibili, per far vedere che nessuno ha anti-interpolante generalizzato cioè che ciascuno ha interpolante generalizzato.

a) Sia φ che $\neg\varphi$ appartengono al primo sottinsieme in cui è suddiviso S. In tal caso non è vero che ogni formula che rispetta la specifica proprietà sintattica sia un anti-interpolante generalizzato. Infatti la formula $\forall v_0(v_0=v_0)$ non avendo simboli non logici né occorrenze libere di variabili soddisfa la speciale proprietà sintattica, ed inoltre è tale che aggiunta al primo sottinsieme questo rimane non soddisfacibile per la presenza sia φ che $\neg\varphi$, mentre se la sua negazione viene aggiunta al secondo sottinsieme anche questo non può essere soddisfacibile contenendo la formula aggiunta che è falsa in ogni realizzazione: così la formula $\forall v_0(v_0=v_0)$ è un interpolante generalizzato e non ogni formula che soddisfa la speciale proprietà sintattica è un anti-interpolante generalizzato. Così S non può appartenere a Σ in virtù di questa suddivisione.

b) Sia φ che $\neg\varphi$ appartengono al secondo sottinsieme in cui è suddiviso S. In tal caso non è vero che ogni formula che rispetta la specifica proprietà sintattica sia un anti-interpolante generalizzato. Infatti la formula $\neg\forall v_0(v_0=v_0)$ non avendo simboli non logici né occorrenze libere di variabili soddisfa la speciale proprietà sintattica, ed inoltre è tale che aggiunta al primo sottinsieme questo non può essere soddisfacibile contenendo la formula aggiunta che è falsa in ogni realizzazione, mentre se la sua negazione viene aggiunta al secondo sottinsieme anche questo rimane non soddisfacibile per la presenza in esso sia φ che $\neg\varphi$: così la formula $\neg\forall v_0(v_0=v_0)$ è un interpolante generalizzato e non ogni formula che soddisfa la speciale proprietà sintattica è un anti-interpolante generalizzato. Così S non può appartenere a Σ in virtù di questa suddivisione.

c) Sia φ appartenente al primo sottinsieme della suddivisione e $\neg\varphi$ appartenente al secondo sottinsieme della suddivisione. Ancora non è vero che ogni formula che rispetta la specifica proprietà sintattica sia un anti-interpolante generalizzato. Infatti la formula $\neg\varphi$ avendo simboli non logici e occorrenze libere di variabili uguali a quelle che occorrono in φ (che e' nel primo sottinsieme) e a quelle che occorrono in $\neg\varphi$ (che e' nel secondo sottinsieme) soddisfa la speciale proprietà sintattica, Inoltre aggiungendo $\neg\varphi$ al primo sottinsieme, a cui già appartiene φ, si ottiene un insieme non soddisfacibile, mentre aggiungendo $\neg\neg\varphi$ al secondo sottinsieme, a cui già appartiene $\neg\varphi$, si ottiene ancora un insieme non soddisfacibile: così $\neg\varphi$ è un interpolante generalizzato e non ogni formula che soddisfa la speciale proprietà sintattica è un anti-interpolante generalizzato. Così S non può appartenere a Σ in virtù di questa suddivisione.

d) Sia $\neg\varphi$ appartenente al primo sottinsieme della suddivisione e φ (cioè $\neg\neg\varphi$) appartenente al secondo sottinsieme della suddivisione. Ancora non è vero che ogni formula che rispetta la specifica proprietà sintattica sia un anti-interpolante generalizzato. Infatti la formula φ avendo simboli non logici e occorrenze libere di variabili uguali a quelle che occorrono in $\neg\varphi$ (che è nel primo sottinsieme) e a quelle che occorrono in $\neg\neg\varphi$ (che è nel secondo sottinsieme) soddisfa la speciale proprietà sintattica, Inoltre aggiungendo φ al primo sottinsieme, a cui già appartiene $\neg\varphi$, si ottiene un insieme non soddisfacibile, mentre aggiungendo $\neg\varphi$ al secondo sottinsieme, a cui già appartiene $\neg\neg\varphi$, si ottiene ancora un insieme non soddisfacibile: così φ è un interpolante generalizzato e non ogni formula che soddisfa la speciale proprietà sintattica è un anti-interpolante generalizzato. Così S non può appartenere a Σ neppure in virtù di questa ultima suddivisione.

Avendo controllato tutti i casi possibili, si è dimostrato che ad un insieme appartenete a Σ non possono appartenere sia una formula che la sua negazione, completando il controllo della clausola 0).

1) Si supponga ora che ci sia una formula $\neg\neg\varphi$ tale che $\neg\neg\varphi$ appartiene a S che appartiene a Σ. Si deve fare vedere che c'è anche un insieme S' appartenente a Σ tale che $S\cup\{\varphi\}\subset S'$. Sarà sufficiente dimostrare ciò con S' uguale a $S\cup\{\varphi\}$.

Si supponga per assurdo che $S\cup\{\varphi\}$ non appartenga a Σ. Ciò comporta che ogni suddivisione di $S\cup\{\varphi\}$ in un primo e in un secondo sottinsieme ha un interpolante generalizzato. Si consideri ora una qualunque suddivisione di S in due sottinsiemi, Si vuol far vedere che, per ciascuna di queste suddivisioni, non è vero che ogni formula che soddisfa la specifica proprietà sintattica è un anti-interpolante generalizzato, cioè che ognuna di queste suddivisioni possiede un interpolante generalizzato. Tali suddivisioni (A,B) di S possono essere di due tipi, uno, a), quando la formula $\neg\neg\varphi$ appartiene al primo sottinsieme A, l'altro, b), quando la formula $\neg\neg\varphi$ appartiene al secondo sottinsieme B.

a) Nel primo caso, la suddivisione (A',B') di $S\cup\{\varphi\}$ che si ottiene dalla suddivisione (A,B) di S aggiungendo φ al primo sottinsieme A (dove c' è già $\neg\neg\varphi$) ($A'=A\cup\{\varphi\}$ e B'=B), come tutte le altre suddivisioni di $S\cup\{\varphi\}$, ha interpolante generalizzato δ per l'ipotesi assurda che si sta accettando. La formula δ è interpolante generalizzato anche per la suddivisione (A,B) di S che si sta considerando. Infatti, i simboli non logici e le variabili libere che occorrono in A sono gli stessi che occorrono in A', e analogamente per i secondi sottinsiemi B e B'. Poi $A\cup\{\neg\delta\}$ è non soddisfacibile non essendolo $A'\cup\{\neg\delta\}$ (che è uguale a $A\cup\{\varphi,\neg\delta\}$) (l'aggiunta di φ è irrilevante poiché $\neg\neg\varphi$ appartiene già all'insieme $A\cup\{\neg\delta\}$). Anche $B\cup\{\delta\}$ è non soddisfacibile essendo uguale a $B'\cup\{\delta\}$ che non è soddisfacibile. Si è così raggiunta una contraddizione dal momento che S appartiene a Σ, e in questo caso l'ipotesi assurda non può valere.

b) Nel secondo caso, la suddivisione (A',B') di $S\cup\{\varphi\}$ che si ottiene dalla suddivisione (A,B) di S aggiungendo φ al secondo sottinsieme B (dove c' è già $\neg\neg\varphi$) (A'=A e $B'=B\cup\{\varphi\}$), come tutte le altre suddivisioni di $S\cup\{\varphi\}$, ha interpolante generalizzato δ per l'ipotesi assurda che si sta accettando. La formula δ è interpolante generalizzato anche per la suddivisione (A,B) di S che si sta considerando. Infatti, i simboli non logici e le variabili libere che occorrono in A sono gli stessi che occorrono in A', e analogamente per i secondi sottinsiemi B e B'. Poi $A\cup\{\neg\delta\}$ è non soddisfacibile essendo uguale a $A'\cup\{\neg\delta\}$ che non è soddisfacibile. Anche $B\cup\{\delta\}$ è non soddisfacibile non essendolo $B'\cup\{\delta\}$ (che è uguale a $B\cup\{\varphi, \delta\}$) (l'aggiunta di φ è irrilevante poiché $\neg\neg\varphi$ appartiene già all'insieme $B\cup\{\delta\}$). Si è così raggiunta una contraddizione dal momento che S appartiene a Σ, e anche in questo caso l'ipotesi assurda non può valere.

Avendo controllato tutti i casi possibili, si è dimostrato che, se $\neg\neg\varphi$ appartiene a S che appartiene a Σ, allora anche $S\cup\{\varphi\}$.appartiene a Σ, completando il controllo della clausola 1).

2) Si supponga ora che ci sia una formula $\wedge\varphi\psi$ tale che $\wedge\varphi\psi$ appartiene a S che appartiene a Σ. Si deve fare vedere che c'è anche un insieme S' appartenente a Σ tale che $S\cup\{\varphi, \psi\}\subset S'$. Sarà sufficiente dimostrare ciò con S' uguale a $S\cup\{\varphi,\psi\}$.

Si supponga per assurdo che $S\cup\{\varphi, \psi\}$ non appartenga a Σ. Ciò comporta che ogni suddivisione di $S\cup\{\varphi, \psi\}$ in un primo e in un secondo sottinsieme ha un interpolante generalizzato. Si consideri ora una qualunque suddivisione di S in due sottinsiemi, Si vuol far vedere che, per ciascuna di queste suddivisioni, non è vero che ogni formula che soddisfa la specifica proprietà sintattica è un anti-interpolante generalizzato, cioè che ognuna di queste suddivisioni possiede un interpolante generalizzato. Tali suddivisioni (A,B) di S possono essere di due tipi, uno, a), quando la formula $\wedge\varphi\psi$ appartiene al primo sottinsieme A, l'altro, b), quando la formula $\wedge\varphi\psi$ appartiene al secondo sottinsieme B.

a) Nel primo caso, la suddivisione (A',B') di $S\cup\{\varphi, \psi\}$ che si ottiene dalla suddivisione (A,B) di S aggiungendo φ e ψ al primo sottinsieme A (dove c'è già $\wedge\varphi\psi$) (A'= $A\cup\{\varphi, \psi\}$ e B'=B), come tutte le altre suddivisioni di $S\cup\{\varphi, \psi\}$, ha interpolante generalizzato δ per l'ipotesi assurda che si sta accettando. La formula δ è interpolante generalizzato anche per la suddivisione (A,B) di S che si sta considerando. Infatti, i simboli non logici e le variabili libere che occorrono in A sono gli stessi che occorrono in A', e analogamente per i secondi sottinsiemi B e B'. Poi $A\cup\{\neg\delta\}$ è non soddisfacibile non essendolo $A'\cup\{\neg\delta\}$ (che è uguale a $A\cup\{\varphi, \psi, \neg\delta\}$) (l'aggiunta di φ e ψ è irrilevante poiché $\wedge\varphi\psi$ appartiene già all'insieme $A\cup\{\neg\delta\}$). Anche $B\cup\{\delta\}$ è non soddisfacibile essendo uguale a $B'\cup\{\delta\}$ che non è soddisfacibile. Si è così raggiunta una contraddizione dal momento che S appartiene a Σ, e in questo caso l'ipotesi assurda non può valere.

b) Nel secondo caso, la suddivisione (A',B') di $S\cup\{\varphi, \psi\}$ che si ottiene dalla suddivisione (A,B) di S aggiungendo φ e ψ al secondo sottinsieme B (dove c' è già $\wedge\varphi\psi$, meglio $\neg\neg\wedge\varphi\psi$) (A'=A e $B'=B\cup\{\neg\neg\varphi, \neg\neg\psi\}$), come tutte le altre suddivisioni di $S\cup\{\varphi, \psi\}$, ha interpolante generalizzato δ per l'ipotesi assurda che si sta accettando. La formula δ è interpolante generalizzato anche per la suddivisione (A,B) di S che si sta considerando. Infatti, i simboli non logici e le variabili libere che occorrono in A sono gli stessi che occorrono in A', e analogamente per i secondi sottinsiemi B e B'. Poi $A\cup\{\neg\delta\}$ è non soddisfacibile essendo uguale a $A'\cup\{\neg\delta\}$ che non è soddisfacibile. Anche $B\cup\{\delta\}$ è non soddisfacibile non essendolo $B'\cup\{\delta\}$ (che è uguale a $B\cup\{\neg\neg\varphi, \neg\neg\psi, \delta\}$) (l'aggiunta di $\neg\neg\varphi$ e $\neg\neg\psi$ è irrilevante poiché $\neg\neg\wedge\varphi\psi$ appartiene già all'insieme $B\cup\{\delta\}$). Si è così raggiunta una contraddizione dal momento che S appartiene a Σ, e anche in questo caso l'ipotesi assurda non può valere.

Avendo controllato tutti i casi possibili, si è dimostrato che, se $\wedge\varphi\psi$ appartiene a S che appartiene a Σ, allora anche $S\cup\{\varphi, \psi\}$.appartiene a Σ, completando il controllo della clausola 2).

3) Si supponga ora che ci sia una formula $\neg\wedge\varphi\psi$ tale che $\neg\wedge\varphi\psi$ appartiene a S che appartiene a Σ. Si deve fare vedere che ci sono anche due insiemi S' e S", uno dei quali appartenente a Σ, tali che $S\cup\{\neg\varphi\}\subset S'$ e $S\cup\{\neg\psi\}\subset S''$. Sarà sufficiente dimostrare ciò con S' uguale a $S\cup\{\neg\varphi\}$ e S" uguale a $S\cup\{\neg\psi\}$

Si supponga per assurdo che sia $S\cup\{\neg\varphi\}$ che $S\cup\{\neg\psi\}$non appartengano a Σ. Ciò comporta che ogni suddivisione sia di $S\cup\{\neg\varphi\}$ che di $S\cup\{\neg\psi\}$in un primo e in un secondo sottinsieme ha un interpolante generalizzato. Si consideri ora una qualunque suddivisione di S in due sottinsiemi, Si vuol far vedere che, per ciascuna di queste suddivisioni, non è vero che ogni formula che soddisfa la specifica proprietà sintattica è un anti-interpolante generalizzato, cioè che ognuna di queste suddivisioni possiede un interpolante generalizzato. Tali suddivisioni (A,B) di S possono essere di due tipi, uno, a), quando la formula $\neg\wedge\varphi\psi$ appartiene al primo sottinsieme A, l’altro, b), quando la formula $\neg\wedge\varphi\psi$ appartiene al secondo sottinsieme B.

a) Nel primo caso, sia la suddivisione (A’,B’) di $S\cup\{\neg\varphi\}$ che si ottiene dalla suddivisione (A,B) di S aggiungendo $\neg\varphi$ al primo sottinsieme A (dove c’è già $\neg\wedge\varphi\psi$) (A’= $A\cup\{\neg\varphi\}$ e B’=B), che la suddivisione (A”,B”) di $S\cup\{\neg\psi\}$ che si ottiene dalla suddivisione (A,B) di S aggiungendo $\neg\psi$ al primo sottinsieme A (dove c’ è già $\neg\wedge\varphi\psi$) (A”= $A\cup\{\neg\psi\}$, e B”=B), come tutte le altre suddivisioni di S’ e di S”, hanno interpolanti generalizzati δ' e δ'' rispettivamente a causa dell’ipotesi assurda che si sta accettando. La formula $\neg\wedge\neg\delta'\neg\delta''$ è interpolante generalizzato anche per la suddivisione (A,B) di S che si sta considerando. Infatti, i simboli non logici e le variabili libere che occorrono in A sono gli stessi che occorrono in A’ e in A”, e analogamente per i secondi sottinsiemi B e B’ e B”. Poi $A\cup\{\neg\neg\wedge\neg\delta'\neg\delta''\}$ (a cui appartiene anche $\neg\wedge\varphi\psi$) è non soddisfacibile non essendolo sia $A'\cup\{\wedge\neg\delta'\neg\delta''\}$ (che è uguale a $A\cup\{\neg\varphi, \wedge\neg\delta'\neg\delta''\}$) che di $A''\cup\{\wedge\neg\delta'\neg\delta''\}$ (che è uguale a $A\cup\{\neg\psi, \wedge\neg\delta'\neg\delta''\}$). Di fatto dal momento che sia $A\cup\{\neg\varphi,\neg\delta'\}$) che $A\cup\{\neg\psi, \neg\delta''\}$ sono non soddisfacibili, aggiungendo a ciascun insieme una formula che poi viene congiunta con una formula già presente gli insiemi che si ottengono saranno ancora non soddisfacibili, mentre se $A\cup\{\neg\neg\wedge\neg\delta'\neg\delta''\}$ (a cui appartiene anche $\neg\wedge\varphi\psi$) fosse soddisfacibile lo sarebbero anche o $A\cup\{\neg\varphi, \wedge\neg\delta'\neg\delta''\}$) o $A\cup\{\neg\psi, \wedge\neg\delta'\neg\delta''\}$. Anche $B\cup\{\neg\wedge\neg\delta'\neg\delta''\}$ non e’ soddisfacibile, perché altrimenti dovrebbero essere soddisfacibili o $B\cup\{\delta'\}$ o $B\cup\{\delta''\}$, impossibile perché coincidono con $B'\cup\{\delta'\}$ e con $B''\cup\{\delta''\}$ rispettivamente, che non sono soddisfacibili in base all’ipotesi d’assurdità. Si è così raggiunta una contraddizione dal momento che S appartiene a Σ, e in questo caso l’ipotesi assurda non può valere.

b) Nel secondo caso, sia la suddivisione (A’,B’) di $S\cup\{\neg\varphi\}$ che si ottiene dalla suddivisione (A,B) di S aggiungendo $\neg\varphi$ al secondo sottinsieme B (dove c’ è già $\neg\wedge\varphi\psi$) (A’=A e B’=$B\cup\{\neg\varphi\}$), che la suddivisione (A”,B”) di $S\cup\{\neg\psi\}$ che si ottiene dalla suddivisione (A,B) di S aggiungendo $\neg\psi$ al secondo sottinsieme B (dove c’è già $\neg\wedge\varphi\psi$) (A”= A e B”=$B\cup\{\neg\psi\}$), come tutte le altre suddivisioni di S’ e di S”, hanno interpolanti generalizzati δ' e δ'' rispettivamente a causa dell’ipotesi assurda che si sta accettando. La formula $\wedge\delta'\delta''$ è interpolante generalizzato anche per la suddivisione (A,B) di S che si sta considerando. Infatti, i simboli non logici e le variabili libere che occorrono in A sono gli stessi che occorrono in A’ e in A”, e analogamente per i secondi sottinsiemi B e B’ e B”. Poi $A\cup\{\neg\wedge\delta'\delta''\}$ non e’ soddisfacibile, perché altrimenti dovrebbero essere soddisfacibile o $A\cup\{\neg\delta'\}$ o $A\cup\{\neg\delta''\}$, impossibile perché coincidono con $A'\cup\{\neg\delta'\}$ e con $A''\cup\{\neg\delta''\}$ rispettivamente, che non sono soddisfacibili in base all’ipotesi d’assurdità. Ancora $B\cup\{\neg\neg\wedge\delta'\delta''\}$ (a cui appartiene anche $\neg\wedge\varphi\psi$) è non soddisfacibile non essendolo sia $B'\cup\{\wedge\delta'\delta''\}$ (che è uguale a $B\cup\{\neg\varphi, \wedge\delta'\delta''\}$) che di $B''\cup\{\wedge\delta'\delta''\}$ (che è uguale a $B\cup\{\neg\psi,\wedge\delta'\delta''\}$).Di fatto dal momento che sia $B\cup\{\neg\varphi, \delta'\}$) che $B\cup\{\neg\psi, \delta''\}$ sono non soddisfacibili, aggiungendo a ciascun insieme una formula che poi viene congiunta con una formula già presente gli insiemi che si ottengono saranno ancora non soddisfacibili, mentre se $A\cup\{\wedge\delta'\delta''\}$ (a cui appartiene anche $\neg\wedge\varphi\psi$) fosse soddisfacibile lo sarebbero anche o $A\cup\{\neg\varphi, \wedge\delta'\delta''\}$) o $A\cup\{\neg\psi, \wedge\delta'\delta''\}$. Si è così raggiunta una contraddizione dal momento che S appartiene a Σ, e anche in questo caso l’ipotesi assurda non può valere.

Avendo controllato tutti i casi possibili, si è dimostrato che, se $\neg\wedge\varphi\psi$ appartiene a S che appartiene a Σ, allora anche o $S\cup\{\neg\varphi\}$ appartiene a Σ o $S\cup\{\neg\psi\}$ appartiene a Σ, completando il controllo della clausola 3).

4) Si supponga ora che ci sia una formula $\forall v_i\varphi$ tale che $\forall v_i\varphi$ appartiene a S che appartiene a Σ. Si deve fare vedere che, per un qualsiasi termine t, c'è anche un insieme S' appartenente a Σ tale che $S\cup\{\varphi(v_i/t)\}\subset S'$. Sarà sufficiente dimostrare ciò con S' uguale a $S\cup\{\varphi(v_i/t)\}$.

Si supponga per assurdo che, per un certo termine t, $S\cup\{\varphi(v_i/t)\}$ non appartenga a Σ. Ciò comporta che ogni suddivisione di $S\cup\{\varphi(v_i/t)\}$ in un primo e in un secondo sottinsieme ha un interpolante generalizzato. Si consideri ora una qualunque suddivisione di S in due sottinsiemi, Si vuol far vedere che, per ciascuna di queste suddivisioni, non è vero che ogni formula che soddisfa la specifica proprietà sintattica è un anti-interpolante generalizzato, cioè che ognuna di queste suddivisioni possiede un interpolante generalizzato. Tali suddivisioni (A,B) di S possono essere di due tipi, uno, a), quando la formula $\forall v_i\varphi$ appartiene al primo sottinsieme A, l'altro, b), quando la formula $\forall v_i\varphi$ appartiene al secondo sottinsieme B.

a) Nel primo caso, la suddivisione (A',B') di $S\cup\{\varphi(v_i/t)\}$ che si ottiene dalla suddivisione (A,B) di S aggiungendo $\varphi(v_i/t)$ al primo sottinsieme A (dove c'è già $\forall v_i\varphi$) ($A'= A\cup\{\varphi(v_i/t)\}$ e B'=B), come tutte le altre suddivisioni di $S\cup\{\varphi(v_i/t)\}$, ha interpolante generalizzato δ per l'ipotesi assurda che si sta accettando. Qui diventa rilevante l'assunzione, fatta già prima dell'enunciazione del teorema d'interpolazione, che nel linguaggio che si sta utilizzando non ci siano simboli di funzione: in tal caso i termini sono solo o simboli per costante o variabili. Si noti anche che se t e' una variabile essa deve occorrere libera nella formula $\varphi(v_i/t)$ per la stessa definizione di sostituzione. Può succedere che, a1), il termine t occorra sia in A che in B, oppure, a2), che il termine t non occorra in B, oppure, a3), che il termine t occorra in B ma non in A. Nei primi due casi a1) e a2) la formula δ è interpolante generalizzato anche per la suddivisione (A,B) di S che si sta considerando. Infatti, nel primo caso a1) i simboli non logici e le variabili libere che occorrono in A sono gli stessi che occorrono in A', e analogamente per i secondi sottinsiemi B e B', mentre nel secondo caso a2) può succedere che il termine t sia il solo simbolo che occorre in A' ma non in A, tuttavia t non può occorrere in δ (dal momento che non occorre in B') sicché nulla osta da questo punto di vista che δ sia interpolante generalizzato anche per (A,B). Poi $A\cup\{\neg\delta\}$ è non soddisfacibile non essendolo $A'\cup\{\neg\delta\}$ (che è uguale a $A\cup\{\varphi(v_i/t), \neg\delta\}$) (l'aggiunta di $\varphi(v_i/t)$ è irrilevante poiché $\forall v_i\varphi$ appartiene già all'insieme $A\cup\{\neg\delta\}$). Anche $B\cup\{\delta\}$ è non soddisfacibile essendo uguale a $B'\cup\{\delta\}$ che non è soddisfacibile. Il terzo caso è diverso perché t può occorrere in δ, ma non può occorrere in un interpolante generalizzato per (A,B): così per mostrare che anche (A,B) ha interpolante bisognerà costruirne uno diverso da δ, se t occorre effettivamente in δ. In questo caso si consideri la formula δ', con occorrenze libere di una variabile v_k che non occorra in S (tale v_k esiste perché l'insieme di formule S è finito) da cui si può ottenere la formula δ sostituendo t alle occorrenze di v_k in δ'. Succede che $\forall v_k\delta'$ è un interpolante generalizzato per (A,B). Infatti il termine t non occorre più in $\forall v_k\delta'$ e la particolare proprietà sintattica affinché $\forall v_k\delta'$ possa essere un interpolante per (A,B) è soddisfatta. Inoltre $A\cup\{\neg\forall v_k\delta'\}$ è non soddisfacibile. Se, invece, lo fosse, ci sarebbe una realizzazione σ che rende vero $A\cup\{\neg\forall v_k\delta'\}$ e ci sarebbe un elemento c dell'universo della realizzazione tale che la realizzazione $\sigma(v_k/c)$ renderebbe vero anche l'insieme di formule $A\cup\{\neg\delta'\}$ (si noti che v_k occorre solo in $\neg\delta'$), e dunque sia che t è una variabile v_h o un simbolo per costante m (t non occorre in A), la realizzazione σ', ottenuta da σ cambiando la sola interpretazione di t che ora va interpretato in c, rende vero l'insieme di formule $A\cup\{\neg\delta'(v_k/t)\}$, e, dal momento che $\forall v_i\varphi$ appartiene ad A, anche l'insieme di formule $A\cup\{\varphi(v_i/t), \neg\delta'(v_k/t)\}$ (che e' $A'\cup\{\neg\delta\}$), impossibile perché si sta supponendo che questo insieme non sia soddisfacibile. Anche $B\cup\{\forall v_k\delta'\}$ non e' soddisfacibile perché non lo e' $B'\cup\{\delta\}$. Così (A,B) ha interpolante e si è raggiunta una contraddizione dal momento che S appartiene a Σ, sicché in questo caso l'ipotesi assurda non può valere.

b) Nel secondo caso, la suddivisione (A',B') di $S\cup\{\varphi(v_i/t)\}$, che si ottiene dalla suddivisione (A,B) di S aggiungendo $\varphi(v_i/t)$ al secondo sottinsieme B (dove c'è già $\forall v_i\varphi$) (A'=A e $B'=B\cup\{\varphi(v_i/t)\}$), come tutte le altre suddivisioni di $S\cup\{\varphi(v_i/t)\}$, ha interpolante generalizzato δ per l'ipotesi assurda che si sta accettando. Qui continua ad essere rilevante l'assunzione, fatta già prima dell'enunciazione del teorema d'interpolazione, che nel linguaggio che si sta utilizzando non ci siano simboli di funzione: in tal caso i termini sono solo o simboli per costante o variabili. Si noti anche che se t e' una variabile essa deve occorrere libera nella formula $\varphi(v_i/t)$ per la stessa definizione di sostituzione. Può succedere che b1) il termine t occorra sia in A che in B, oppure b2) che il termine t non occorra in A, oppure b3) che il termine t occorra in A ma non in B. Nei primi due casi b1) e b2) la formula δ è interpolante generalizzato anche per la suddivisione (A,B) di S che si sta considerando. Infatti, nel primo caso b1) i simboli non logici e le variabili libere che occorrono in A sono gli stessi che occorrono in A', e analogamente per i secondi sottinsiemi B e B', mentre nel secondo caso b2) può succedere che il termine t sia il solo simbolo che occorre in B' ma non in B, tuttavia t non può occorrere in δ (dal momento che non occorre in A') sicché nulla osta da questo punto di vista che δ sia interpolante generalizzato anche per (A,B). Poi $B\cup\{\delta\}$ è non soddisfacibile non essendolo $B'\cup\{\delta\}$ (che è uguale a $B\cup\{\varphi(v_i/t), \delta\}$) (l'aggiunta di $\varphi(v_i/t)$ è irrilevante poiché $\forall v_i\varphi$ appartiene già all'insieme $B\cup\{\delta\}$). Anche $A\cup\{\neg\delta\}$ è non soddisfacibile essendo uguale a $A'\cup\{\neg\delta\}$ che non è soddisfacibile. Il terzo caso è diverso perché t può occorrere in δ, ma non può occorrere in un interpolante generalizzato per (A,B): così per mostrare che anche (A,B) ha interpolante bisognerà costruirne uno diverso da δ, se t occorre effettivamente in δ. In questo caso si consideri la formula δ', con occorrenze libere di una variabile v_k che non occorra in S (tale v_k esiste perché l'insieme di formule S è finito) da cui si può ottenere la formula δ sostituendo t alle occorrenze di v_k in δ'. Succede che $\neg\forall v_k\neg\delta'$ è un interpolante generalizzato per (A,B). Infatti il termine t non occorre più in $\neg\forall v_k\neg\delta'$ e la particolare proprietà sintattica affinché $\neg\forall v_k\neg\delta'$ possa essere un interpolante per (A,B) è soddisfatta. Inoltre $A \cup\{\neg\neg\forall v_k\neg\delta'\}$ non è soddisfacibile perché non lo e' $A'\cup\{\neg\delta\}$. Anche $B\cup\{\neg\forall v_k\neg\delta'\}$ è non soddisfacibile. Se, invece, lo fosse, ci sarebbe una realizzazione σ che rende vero $B\cup\{\neg\forall v_k\neg\delta'\}$ e ci sarebbe un elemento c dell'universo della realizzazione tale che la realizzazione $\sigma(v_k/c)$ renderebbe vero anche l'insieme di formule $B\cup\{\delta'\}$ (si noti che v_k occorre solo in δ'), e dunque, sia che t sia una variabile v_h o un simbolo per costante m (t non occorre in B), la realizzazione σ', ottenuta da σ cambiando la sola interpretazione di t che ora va interpretato in c, rende vero l'insieme di formule $B\cup\{\delta'(v_k/t)\}$, e, dal momento che $\forall v_i\varphi$ appartiene ad B, anche l'insieme di formule $B\cup\{\varphi(v_i/t), \delta'(v_k/t)\}$ (che è $B'\cup\{\delta\}$), impossibile perché si sta supponendo che questo insieme non sia soddisfacibile. Così (A,B) ha interpolante e si è raggiunta una contraddizione dal momento che S appartiene a Σ, sicché anche in questo caso l'ipotesi assurda non può valere.

Avendo controllato tutti i casi possibili, si è dimostrato che, se $\forall v_i\varphi$ appartiene a S che appartiene a Σ, allora anche $S\cup\{\varphi(v_i/t)\}$.appartiene a Σ, completando il controllo della clausola 4).

5) Si supponga ora che ci sia una formula $\neg\forall v_i\varphi$ tale che $\neg\forall v_i\varphi$ appartiene a S che appartiene a Σ. Si deve fare vedere che, per un qualsiasi termine t, c'è anche un insieme S' appartenente a Σ tale che $S\cup\{\neg\varphi(v_i/t)\}\subset$ S'. Sarà sufficiente dimostrare ciò con t simbolo per costante di M che non occorre in S (tale simbolo c' è dal momento che M è infinito e S è finito) e con S' uguale a $S\cup\{\neg\varphi(v_i/t)\}$.

Si supponga per assurdo che, per un certo termine t, $S\cup\{\neg\varphi(v_i/t)\}$ non appartenga a Σ. Ciò comporta che ogni suddivisione di $S\cup\{\neg\varphi(v_i/t)\}$ in un primo e in un secondo sottinsieme ha un interpolante generalizzato. Si consideri ora una qualunque suddivisione di S in due sottinsiemi; si vuol far vedere che, per ciascuna di queste suddivisioni, non è vero che ogni formula che soddisfa la specifica proprietà sintattica è un anti-interpolante generalizzato, cioè che ognuna di queste suddivisioni possiede un interpolante generalizzato. Tali suddivisioni (A,B) di S possono essere di due tipi, uno, a), quando la formula $\neg\forall v_i\varphi$ appartiene al primo sottinsieme A, l'altro, b), quando la formula $\neg\forall v_i\varphi$ appartiene al secondo sottinsieme B.

a) Nel primo caso, la suddivisione (A',B') di $S\cup\{\neg\varphi(v_i/t)\}$ che si ottiene dalla suddivisione (A,B) di S aggiungendo $\neg\varphi(v_i/t)$ al primo sottinsieme A (dove c'è già $\neg\forall v_i\varphi$) ($A'=A\cup\{\neg\varphi(v_i/t)\}$ e B'=B), come tutte le altre suddivisioni di $S\cup\{\neg\varphi(v_i/t)\}$, ha interpolante generalizzato δ per l'ipotesi assurda che si sta accettando. La formula δ è interpolante generalizzato anche per la suddivisione (A,B) di S che si sta considerando. Infatti, i simboli non logici e le variabili libere che occorrono in A differiscono da quelli che occorrono in A' solo per la presenza del simbolo per costante t che però non occorre in δ, e i simboli non logici e le variabili libere che occorrono in B sono gli stessi che occorrono in B'. Poi $A\cup\{\neg\delta\}$ è non soddisfacibile: se lo fosse ci sarebbe una realizzazione σ che rende vere le formule di $A\cup\{\neg\delta\}$ (che includono $\neg\forall v_i\varphi$) sicché c'è un elemento c dell'universo della realizzazione tale che nella realizzazione $\sigma(v_i/c)$ è vera la formula φ, e l'espansione di σ che interpreta t in c renderebbe vere le formule dell'insieme $A\cup\{\neg\varphi(v_i/t), \neg\delta\}$, (che è $A'\cup\{\neg\delta\}$) che è non soddisfacibile, per l'ipotesi accettata. Anche $B\cup\{\delta\}$ è non soddisfacibile essendo uguale a $B'\cup\{\delta\}$ che non è soddisfacibile. Si è così raggiunta una contraddizione dal momento che S appartiene a Σ, e in questo caso l'ipotesi assurda non può valere.

b) Nel secondo caso, la suddivisione (A',B') di $S\cup\{\neg\varphi(v_i/t)\}$ che si ottiene dalla suddivisione (A,B) di S aggiungendo $\neg\varphi(v_i/t)$ al secondo sottinsieme B (dove c'è già $\neg\forall v_i\varphi$) (A'=A e $B'=B\cup\{\neg\varphi(v_i/t)\}$), come tutte le altre suddivisioni di $S\cup\{\neg\varphi(v_i/t)\}$, ha interpolante generalizzato δ per l'ipotesi assurda che si sta accettando. La formula δ è interpolante generalizzato anche per la suddivisione (A,B) di S che si sta considerando. Infatti, i simboli non logici e le variabili libere che occorrono in A sono gli stessi che occorrono in A', e i simboli non logici e le variabili libere che occorrono in B differiscono da quelli che occorrono in B' solo per la presenza del simbolo per costante t che però non occorre in δ. Poi $A\cup\{\neg\delta\}$ è non soddisfacibile essendo uguale a $A'\cup\{\neg\delta\}$ che non è soddisfacibile. Anche $B\cup\{\delta\}$ è non soddisfacibile: se lo fosse ci sarebbe una realizzazione σ che rende vere le formule di $B\cup\{\delta\}$ (che includono $\neg\forall v_i\varphi$) sicché c'è un elemento c dell'universo della realizzazione tale che nella realizzazione $\sigma(v_i/c)$ è vera la formula φ, e l'espansione di σ che interpreta t in c renderebbe vere le formule dell'insieme $B\cup\{\neg\varphi(v_i/t), \delta\}$, (che è $B'\cup\{\delta\}$) che è non soddisfacibile, per l'ipotesi accettata. Si è così raggiunta una contraddizione dal momento che S appartiene a Σ, e anche in questo caso l'ipotesi assurda non può valere.

Avendo controllato tutti i casi possibili, si è dimostrato che, se $\neg\forall v_i\varphi$ appartiene a S che appartiene a Σ, allora esiste un termine t tale che anche $S\cup\{\neg\varphi(v_i/t)\}$.appartiene a Σ, completando il controllo della clausola 5).

6) Sia S un insieme di formule che appartiene a Σ e t un termine. Si deve fare vedere che c'è anche un insieme S' appartenente a Σ tale che $S\cup\{t=t\}\subset S'$. Sarà sufficiente dimostrare ciò con S' uguale a $S\cup\{t=t\}$.

Si supponga per assurdo che $S\cup\{t=t\}$ non appartenga a Σ. Ciò comporta che ogni suddivisione di $S\cup\{\varphi\}$ in un primo e in un secondo sottinsieme ha un interpolante generalizzato. Si consideri ora una qualunque suddivisione di S in due sottinsiemi, Si vuol far vedere che, per ciascuna di queste suddivisioni, non è vero che ogni formula che soddisfa la specifica proprietà sintattica è un anti-interpolante generalizzato, cioè che ognuna di queste suddivisioni possiede un interpolante generalizzato. In tali suddivisioni (A,B) di S può succedere che, a), t occorra sia in A che in B, oppure, b), t non occorre in A, oppure, c), t occorre in A ma non in B.

a) Nel primo caso, la suddivisione (A',B') di $S\cup\{t=t\}$, che si ottiene dalla suddivisione (A,B) di S aggiungendo t=t al primo sottinsieme A ($A'=A\cup\{t=t\}$ e B'=B), come tutte le altre suddivisioni di $S\cup\{t=t\}$, ha interpolante generalizzato δ per l'ipotesi assurda che si sta accettando. La formula δ è interpolante generalizzato anche per la suddivisione (A,B) di S che si sta considerando. Infatti, i simboli non logici e le variabili libere che occorrono in A sono gli stessi che occorrono in A', e analogamente per i secondi sottinsiemi B e B'. Poi $A\cup\{\neg\delta\}$ è non soddisfacibile non essendolo $A'\cup\{\neg\delta\}$ (che è uguale a $A\cup\{t=t,\neg\delta\}$) (l'aggiunta di t=t è irrilevante poiché t=t è una formula valida). Anche $B\cup\{\delta\}$ è non soddisfacibile essendo uguale a $B'\cup\{\delta\}$ che non è soddisfacibile. Si è così raggiunta una contraddizione dal momento che S appartiene a Σ, e in questo caso l'ipotesi assurda non può valere.

b) Nel secondo caso, la suddivisione (A',B') di $S\cup\{t=t\}$ che si ottiene dalla suddivisione (A,B) di S aggiungendo t=t al secondo sottinsieme B (A'=A e $B'=B\cup\{t=t\}$), come tutte le altre suddivisioni di $S\cup\{t=t\}$, ha interpolante generalizzato δ per l'ipotesi assurda che si sta accettando. La formula δ è interpolante generalizzato anche per la suddivisione (A,B) di S che si sta considerando. Infatti, i simboli non logici e le variabili libere che occorrono in A sono gli stessi che occorrono in A', mentre i simboli non logici e le variabili libere che occorrono in B differiscono da quelle che occorrono in B' al più per la presenza in queste di t, che però non occorre in δ poiché non occorre in A'. Poi $A\cup\{\neg\delta\}$ è non soddisfacibile essendo uguale a $A'\cup\{\neg\delta\}$ che non è soddisfacibile. Anche $B\cup\{\delta\}$ è non soddisfacibile non essendolo $B'\cup\{\delta\}$ (che è uguale a $B\cup\{t=t, \delta\}$) (l'aggiunta di t=t è irrilevante poiché t=t è una formula valida). Si è così raggiunta una contraddizione dal momento che S appartiene a Σ, e anche in questo caso l'ipotesi assurda non può valere.

c) Nel terzo caso, la suddivisione (A',B') di $S\cup\{t=t\}$ che si ottiene dalla suddivisione (A,B) di S aggiungendo t=t al primo sottinsieme A ($A'=A\cup\{t=t\}$ e B'=B), come tutte le altre suddivisioni di $S\cup\{t=t\}$, ha interpolante generalizzato δ per l'ipotesi assurda che si sta accettando. La formula δ è interpolante generalizzato anche per la suddivisione (A,B) di S che si sta considerando. Infatti, i simboli non logici e le variabili libere che occorrono in A differiscono da quelle che occorrono in A' al più per la presenza in queste di t, che però non occorre in δ poiché non occorre in B', mentre i simboli non logici e le variabili libere che occorrono in B sono gli stessi che occorrono in B'.

Poi $A \cup \{\delta\}$ è non soddisfacibile non essendolo $A' \cup \{\delta\}$ (che è uguale a $A \cup \{t=t, \delta\}$) (l'aggiunta di t=t è irrilevante poiché t=t è una formula valida). Anche $B \cup \{\neg\delta\}$ è non soddisfacibile essendo uguale a $B' \cup \{\neg\delta\}$ che non è soddisfacibile. Si è così raggiunta una contraddizione dal momento che S appartiene a Σ, e anche in questo caso l'ipotesi assurda non può valere.

Avendo controllato tutti i casi possibili, si è dimostrato che, se t è un termine e S appartiene a Σ, allora anche $S \cup \{t=t\}$.appartiene a Σ, completando il controllo della clausola 6).

7) Si supponga ora che ci siano due formule t=t' e $\varphi(v_i/t)\}$ che appartengono a S che appartiene a Σ. Si deve fare vedere che c'è anche un insieme S' appartenente a Σ tale che $S \cup \{\varphi(v_i/t/t')\} \subset S'$. Sarà sufficiente dimostrare ciò con S' uguale a S $\cup \{\varphi(v_i/t/t')\}$. Si supponga per assurdo che, per un certo termine t, $S \cup \{\varphi(v_i/t/t')\}$ non appartenga a Σ. Ciò comporta che ogni suddivisione di $S \cup \{\varphi(v_i/t/t')\}$ in un primo e in un secondo sottinsieme ha un interpolante generalizzato. Si consideri ora una qualunque suddivisione di S in due sottinsiemi; si vuol far vedere che, per ciascuna di queste suddivisioni, non è vero che ogni formula che soddisfa la specifica proprietà sintattica è un anti-interpolante generalizzato, cioè che ognuna di queste suddivisioni possiede un interpolante generalizzato. Tali suddivisioni (A,B) di S possono essere di quattro tipi, uno, a), quando le formule t=t' e $\varphi(v_i/t)\}$ appartengono al primo sottinsieme A, un secondo, b), quando le formule t=t' e $\varphi(v_i/t)\}$ appartengono al secondo sottinsieme B, un terzo, c), quando la formula t=t' appartiene ad A e la formula $\varphi(v_i/t)\}$ appartiene a B, e un quarto, d), quando la formula $\varphi(v_i/t)\}$ appartiene ad A e la formula t=t' appartiene a B.

a) Nel primo caso, la suddivisione (A',B') di $S \cup \{\varphi(v_i/t/t')\}$ che si ottiene dalla suddivisione (A,B) di S aggiungendo $\varphi(v_i/t/t')$ al primo sottinsieme A (dove ci sono già t=t' e $\varphi(v_i/t)$) ($A' = A \cup \{\varphi(v_i/t/t')\}$ e B'=B), come tutte le altre suddivisioni di $S \cup \{\varphi(v_i/t/t')\}$, ha interpolante generalizzato δ per l'ipotesi assurda che si sta accettando. La formula δ è interpolante generalizzato anche per la suddivisione (A,B) di S che si sta considerando. Infatti, i simboli non logici e le variabili libere che occorrono in A sono gli stessi che occorrono in A', e analogamente per i secondi sottinsiemi B e B'. Poi $A \cup \{\neg\delta\}$ è non soddisfacibile non essendolo $A' \cup \{\neg\delta\}$ (che è uguale a $A \cup \{\varphi(v_i/t/t'), \neg\delta\}$) (l'aggiunta di $\varphi(v_i/t/t')$ è irrilevante poiché t=t' e $\varphi(v_i/t)\}$ appartengono già all'insieme $A \cup \{\neg\delta\}$). Anche $B \cup \{\delta\}$ è non soddisfacibile essendo uguale a $B' \cup \{\delta\}$ che non è soddisfacibile. Si è così raggiunta una contraddizione dal momento che S appartiene a Σ, e in questo caso l'ipotesi assurda non può valere.

b) Nel secondo caso, la suddivisione (A',B') di $S \cup \{\varphi(v_i/t/t')\}$ che si ottiene dalla suddivisione (A,B) di S aggiungendo $\varphi(v_i/t/t')$ al secondo sottinsieme B (dove ci sono già t=t' e $\varphi(v_i/t)$) (A'=A e $B' = B \cup \{\varphi(v_i/t/t')\}$), come tutte le altre suddivisioni di S $\cup \{\varphi(v_i/t/t')\}$, ha interpolante generalizzato δ per l'ipotesi assurda che si sta accettando. La formula δ è interpolante generalizzato anche per la suddivisione (A,B) di S che si sta considerando. Infatti, i simboli non logici e le variabili libere che occorrono in A sono gli stessi che occorrono in A', e analogamente per i secondi sottinsiemi B e B'. Poi $A \cup \{\neg\delta\}$ è non soddisfacibile essendo uguale a $A' \cup \{\neg\delta\}$ che non è soddisfacibile. Anche $B \cup \{\delta\}$ è non soddisfacibile non essendolo $B' \cup \{\delta\}$ (che è uguale a $B \cup \{\varphi(v_i/t/t'), \delta\}$) (l'aggiunta di $\varphi(v_i/t/t')$ è irrilevante poiché t=t' e $\varphi(v_i/t)\}$ appartengono già all'insieme $B \cup \{\delta\}$). Si è così raggiunta una contraddizione dal momento che S appartiene a Σ, e in questo caso l'ipotesi assurda non può valere.

c) Nel terzo caso, la suddivisione (A',B') di $S\cup\{\varphi(v_i/t/t')\}$ che si ottiene dalla suddivisione (A,B) di S aggiungendo $\varphi(v_i/t/t')$ al secondo sottinsieme B (dove c'è già $\varphi(v_i/t)$) ($A'=A$ e $B'=B\cup\{\varphi(v_i/t/t')\}$), come tutte le altre suddivisioni di $S\cup\{\varphi(v_i/ t/t')\}$, ha interpolante generalizzato δ per l'ipotesi assurda che si sta accettando. Può succedere che, c1), t' occorra in B, oppure che, c2), che t' non occorra in B.

c1) In questo caso la formula $(t=t'\wedge\delta)$ è un interpolante generalizzato per (A,B). Infatti i simboli non logici e le variabili libere che occorrono in A sono le stesse che occorrono in A' e includono t e t', ed altrettanto succede per i secondi sottinsiemi B e B'. Poi $A\cup\{\neg(t=t'\wedge\delta)\}$ è non soddisfacibile poiché lo sono sia $A\cup\{\neg t=t'\}$, dal momento che $t=t'$ appartiene ad A, che $A\cup\{\neg\delta\}$, essendo uguale ad $A'\cup\{\neg\delta\}$ che non è soddisfacibile in base all'ipotesi che δ sia un interpolante generalizzato per (A',B'). Anche $B\cup\{(t=t'\wedge\delta)\}$ non è soddisfacibile: se lo fosse sarebbero soddisfacibili pure $B\cup\{\varphi(v_i/t), t=t', \delta\}$ ($\varphi(v_i/t)$ appartiene a B) e $B\cup\{\varphi(v_i/t), \varphi(v_i/ t/t'), t=t', \delta\}$ (l'aggiunta di $\varphi(v_i/t/t')$ è irrilevante poiché $t=t'$ e $\varphi(v_i/t)\}$ appartengono già all'insieme $B\cup\{\varphi(v_i/t), t=t', \delta\}$), che è $B'\cup\{\delta\}$, che è non soddisfacibile grazie all'ipotesi che δ sia un interpolante generalizzato per (A', B'). Si è così raggiunta una contraddizione dal momento che S appartiene a Σ, e in questo sottocaso l'ipotesi assurda non può valere.

c2) In questo sottocaso c'è l'ulteriore problema che t' non deve occorrere in un interpolante generalizzato per (A,B) dal momento che t' non occorre in B. Sia v_k una variabile che non occorre in S e δ' la formula in cui occorre libera v_k tale che $\delta'(v_k/t')$ è δ. In questo caso la formula $\neg\forall v_k\neg(t=v_k\wedge\delta')$ è un interpolante generalizzato per (A,B). Infatti i simboli non logici e le variabili libere che occorrono in A sono le stesse che occorrono in A', mentre i simboli non logici e le variabili libere che occorrono in B differiscono da quelli che occorrono in B' solo per la presenza tra questi del termine t', che però ora non occorre in $\neg\forall v_k\neg(t=v_k\wedge\delta')$. Poi $A\cup\{\neg\neg\forall v_k\neg(t=v_k\wedge\delta')\}$ è non soddisfacibile dal momento che lo è anche $A\cup\{\neg(t=v_k\wedge\delta')(v_k/t')\}$ poiché lo sono sia $A\cup\{\neg t=t'\}$, in quanto $t=t'$ appartiene ad A, che $A\cup\{\neg\delta\}$, essendo uguale ad $A'\cup\{\neg\delta\}$ che non è soddisfacibile in base all'ipotesi che δ sia un interpolante generalizzato per (A',B'). Anche $B\cup\{\neg\forall v_k\neg(t=v_k\wedge\delta')\}$ non è soddisfacibile: se lo fosse sarebbero soddisfacibili pure $B\cup\{(t=v_k\wedge\delta')(v_k/t')\}$ (dal momento che t' non occorre in B), e $B\cup\{\varphi(v_i/t), t=t', \delta\}$ ($\varphi(v_i/t)$ appartiene a B) e $B\cup\{\varphi(v_i/t), \varphi(v_i/ t/t'), t=t', \delta\}$ (l'aggiunta di $\varphi(v_i/t/t')$ è irrilevante poiché $t=t'$ e $\varphi(v_i/t)\}$ appartengono già all'insieme $B\cup\{\varphi(v_i/t), t=t', \delta\}$), che è $B'\cup\{\delta\}$, che è non soddisfacibile grazie all'ipotesi che δ sia un interpolante generalizzato per (A', B'). Si è così raggiunta una contraddizione dal momento che S appartiene a Σ, e anche in questo sottocaso l'ipotesi assurda non può valere.

d) Il quarto caso ha forti analogie con il terzo. Ora, la suddivisione (A',B') di $S\cup\{\varphi(v_i/t/t')\}$ che si ottiene dalla suddivisione (A,B) di S aggiungendo $\varphi(v_i/t/t')$ al primo sottinsieme A (dove c'è già $\varphi(v_i/t)$) ($A'=A\cup\{\varphi(v_i/t/t')\}$ e $B'=B$), come tutte le altre suddivisioni di $S\cup\{\varphi(v_i/ t/t')\}$, ha interpolante generalizzato δ per l'ipotesi assurda che si sta accettando. Può succedere che, d1), t' occorra in A, oppure che, d2), che t' non occorra in A.

d1) In questo caso la formula $\neg(t=t'\wedge\neg\delta)$ è un interpolante generalizzato per (A,B). Infatti i simboli non logici e le variabili libere che occorrono in A sono le stesse che occorrono in A' e includono t e t', ed altrettanto succede per i secondi sottinsiemi B e B'. Poi $A\cup\{\neg\neg(t=t'\wedge\neg\delta)\}$ è non soddisfacibile: se lo fosse sarebbero soddisfacibili pure $A\cup\{\varphi(v_i/t), t=t', \neg\delta\}$ ($\varphi(v_i/t)$ appartiene a A) e $A\cup\{\varphi(v_i/t), \varphi(v_i/ t/t'), t=t', \neg\delta\}$ (l'aggiunta di $\varphi(v_i/t/t')$ è irrilevante poiché $t=t'$ e $\varphi(v_i/t)\}$ appartengono già all'insieme $A\cup\{\varphi(v_i/t), t=t', \neg\delta\}$), che è $A'\cup\{\neg\delta\}$, che è non soddisfacibile grazie all'ipotesi che δ

sia un interpolante generalizzato per (A',B'). Anche B∪{¬(t=t'∧¬δ)} non è soddisfacibile poiché lo sono sia B∪{¬t=t'}, dal momento che t=t' appartiene ad B, che B∪{δ}, essendo uguale ad B'∪{δ} che non è soddisfacibile in base all'ipotesi che δ sia un interpolante generalizzato per (A',B'). Si è così raggiunta una contraddizione dal momento che S appartiene a Σ, e in questo sottocaso l'ipotesi assurda non può valere.

d2) In questo sottocaso c'è l'ulteriore problema che t' non deve occorrere in un interpolante generalizzato per (A,B) dal momento che t' non occorre in A. Sia v_k una variabile che non occorre in S e δ' la formula in cui occorre libera v_k tale che $\delta'(v_k/t')$ è δ. In questo caso la formula $\forall v_k\neg(t=v_k\wedge\neg\delta')$ è un interpolante generalizzato per (A,B). Infatti i simboli non logici e le variabili libere che occorrono in A differiscono da quelli che occorrono in A' solo per la presenza tra questi del termine t', che però ora non occorre in $\forall v_k\neg(t=v_k\wedge\neg\delta')$, mentre i simboli non logici e le variabili libere che occorrono in B sono le stesse che occorrono in B'. Poi $A\cup\{\neg\forall v_k\neg(t=v_k\wedge\neg\delta')\}$ è non soddisfacibile: se lo fosse sarebbero soddisfacibili pure $A\cup\{(t=v_k\wedge\neg\delta')(v_k/t')\}$ (dal momento che t' non occorre in A), e $A\cup\{\varphi(v_i/t), t=t', \neg\delta\}$ ($\varphi(v_i/t)$ appartiene ad A) e $A\cup\{\varphi(v_i/t), \varphi(v_i/ t/t'), t=t', \neg\delta\}$ (l'aggiunta di $\varphi(v_i/t/t')$ è irrilevante poiché t=t' e $\varphi(v_i/t)$} appartengono già all'insieme $A\cup\{\varphi(v_i/t), t=t', \neg\delta\}$), che è $A'\cup\{\neg\delta\}$, che è non soddisfacibile grazie all'ipotesi che δ sia un interpolante generalizzato per (A', B'). Anche $B\cup\{\forall v_k\neg(t=v_k\wedge\neg\delta')\}$ non è soddisfacibile dal momento che lo è anche B $\cup\{\neg(t=v_k\wedge\neg\delta')(v_k/t')\}$ poiché lo sono sia B ∪{¬t=t'}, in quanto t=t' appartiene a B, che B∪{δ}, essendo uguale ad B'∪{δ} che non è soddisfacibile in base all'ipotesi che δ sia un interpolante generalizzato per (A',B'). Si è così raggiunta una contraddizione dal momento che S appartiene a Σ, e anche in questo sottocaso l'ipotesi assurda non può valere.

Avendo controllato tutti i casi possibili, si è dimostrato che, se le formule t=t' e $\varphi(v_i/t)$} appartengono ad un insieme di formule S che S appartiene a Σ, allora anche $S\cup\{\varphi(v_i/t/t'\}$.appartiene a Σ, completando il controllo della clausola 7).

Con l'esaurimento del controllo di tutte le clausole, si è dimostrato che l'insieme Σ, costituito da insiemi di formule per i quali ci sono suddivisioni in due parti senza interpolanti generalizzati, è una proprietà di consistenza, sicché ogni suo elemento e' soddisfacibile, come vuole il teorema di esistenza del modello. Si è dimostrato così il teorema di interpolazione generalizzato che richiedeva appunto di mostrare la soddisfacibilita' degli insiemi di formule con le caratteristiche che li fanno appartenere a Σ.

Come si era osservato già prima della dimostrazione del teorema di interpolazione generalizzato, da questo segue il teorema di interpolazione, che ora risulta dimostrato.