

Università degli studi di Verona
Corsi di laurea in Matematica Applicata, Informatica e Informatica Multimediale
Prova scritta di Matematica di Base — 11 dicembre 2007

matricola nome cognome

Corso di Laurea in

Scrivere subito nome, cognome e numero di matricola, indicando la sezione di corso seguita.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Tot

Compito A

- 1) Si consideri la seguente relazione sull'insieme \mathbf{Z} dei numeri interi

$$R = \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbf{Z}, x^2 - y^2 \text{ è multiplo di } 5 \}.$$

Dimostrare che R è una relazione d'equivalenza. Descrivere le seguenti classi d'equivalenza: $[0]_R$ e $[1]_R$ e $[3]_R$. Quante sono le classi d'equivalenza individuate da R ?

2) Mostrare che $R = \{(7, 5), (7, 4), (7, 3), (7, 2), (7, 1), (6, 5), (6, 4), (6, 3), (6, 2), (6, 1), (5, 2), (5, 1), (4, 3), (4, 2), (4, 1), (3, 2), (3, 1), (2, 1)\}$ è una relazione d'ordine stretto sull'insieme $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Determinare gli eventuali elementi massimali e minimali, massimo e minimo, maggioranti e minoranti, estremo superiore ed estremo inferiore del sottoinsieme $S = \{3, 4, 5\}$.

3) Dimostrare per induzione che, per $n \geq 1$,
$$\sum_{i=1}^n \frac{4i^2 + 2i - 1}{(2i + 1)!} = 1 - \frac{1}{(2n + 1)!}$$

4) Si risponda alle seguenti domande:

- (1) Quando un insieme è numerabile?
- (2) L'insieme $3\mathbf{N} \cup \{\pi, \sqrt{2}, -3, 0\}$ è numerabile? Perché?
- (3) L'insieme $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ dei numeri reali non razionali è numerabile? Perché?
- (4) Gli insiemi $\{x \mid x \in \mathbf{R}, 0 < x < \sqrt{2}\}$ e $\{x \mid x \in \mathbf{R}, 0 < x < 5\}$ hanno la stessa cardinalità? Perché?

5) Si consideri la struttura \mathfrak{N} dei numeri naturali, con le usuali relazioni e funzioni e l'usuale linguaggio \mathcal{L} . Nel linguaggio \mathcal{L} si scriva una formula $\varphi(v_0, v_1)$ con le sole variabili libere indicate tale che $\mathfrak{N} \models \varphi(v_0, v_1)[a, b]$ se e solo se $a - b > 4$, a è divisibile per 3 e b non è divisibile per 5.

6) Dire che cosa significa che una formula γ è valida.
 Dire cosa significa che la formula γ è conseguenza logica di un insieme di formule Φ .
 Dimostrare che, per ogni scelta delle formule α e β ,

$$\{\neg\alpha\} \models \rightarrow \forall\alpha\beta\beta$$

7) Sia \mathfrak{N} la struttura dei numeri naturali e \mathfrak{R} quella dei numeri reali, con le usuali relazioni e funzioni e l'usuale linguaggio.

(1) Il seguente enunciato

$$\forall v_0 \rightarrow < 0 v_0 \exists v_1 \wedge < 0 v_1 = v_0 \times \times v_1 v_1 v_1$$

è vero o falso in \mathfrak{N} ? E in \mathfrak{R} ? Motivare le risposte.

(2) Si consideri la formula $\varphi : \neg \exists v_2 \wedge < v_0 v_2 < v_2 v_1$ e la realizzazione $\sigma = (\mathfrak{N}, \underline{a})$, dove $\underline{a} : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$, $n \rightarrow n + 2$. Si calcoli esplicitamente (passaggio per passaggio) φ^σ .

8) Siano $\gamma, \lambda \in \mathbf{R}$ e $f_{\gamma, \lambda}: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definita da:

$$f_{\gamma, \lambda}(x) = \begin{cases} e^x + \gamma & x \geq 0 \\ \lambda x^2 + 1 & x \leq 0 \end{cases}$$

Dire per quali valori di γ e λ $f_{\gamma, \lambda}$ è una funzione da \mathbf{R} in \mathbf{R} . Per tali valori dire se $f_{\gamma, \lambda}$ è totale, iniettiva, suriettiva.

Esiste la funzione inversa di $f_{\gamma, \lambda}$? In caso affermativo, trovare $f_{\gamma, \lambda}^{-1}$.

9) Siano $f, g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definite da

$$f(x) = \log_2((x^2 - 4x + 3)^3) \quad g(x) = \frac{1}{2^x}$$

- (1) Trovare l'insieme di definizione di f e l'insieme di definizione di g .
- (2) Determinare le funzioni composte $f \circ g$ e $g \circ f$, specificandone gli insiemi di definizione.