

Università degli studi di Verona
Corsi di laurea in Matematica Applicata, Informatica e Informatica Multimediale
Prova scritta di Matematica di Base — 18 giugno 2007

matricola nome cognome

Corso di Laurea in

Informatica

Informatica Mult.

Matematica Appl.

Scrivere subito nome, cognome e numero di matricola, indicando la sezione di corso seguita. Le soluzioni vanno trascritte solo su questi fogli, negli spazi appositamente riservati. Si può comunque usare il retro, purché sia chiaro il riferimento.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Tot

1) Si consideri la seguente relazione sull'insieme \mathbf{Z} dei numeri interi

$$R = \{ (a, b) \mid a, b \in \mathbf{Z}, a - 5b \text{ è multiplo di } 4 \}.$$

Dimostrare che R è una relazione d'equivalenza. È vero che $[1]_R = [15]_R$? È vero che $[10]_R = [2]_R$? Quante sono le classi d'equivalenza individuate da R ?

2) Mostrare che $R = \{(a,b), (a,c), (a,d), (a,e), (a,f), (a,g), (b,c), (b,e), (b,d), (b,f), (b,g), (c,g), (d,e), (d,f), (d,g), (e,f), (e,g)\}$ è una relazione d'ordine stretto sull'insieme $\{a,b,c,d,e,f,g\}$. Determinare gli elementi massimali, minimali, eventuali massimo, minimo, maggioranti, minoranti, estremo superiore e estremo inferiore del sottoinsieme $\{b,c,d,e\}$.

3) Dimostrare per induzione che, per $n \geq 2$, $5^n \geq 4^n + 2^n$.

4) Si risponda alle seguenti domande, motivando le risposte:

- (1) Quando due insiemi hanno la stessa cardinalità?
- (2) L'insieme \mathbf{Q} dei numeri razionali e l'insieme \mathbf{N} dei numeri naturali hanno la stessa cardinalità? Perché?
- (3) L'insieme Π dei numeri reali irrazionali è numerabile? Perché?
- (4) Gli insiemi $\{x \mid x \in \mathbf{R}, 0 < x < \sqrt{3}\}$ e $\{x \mid x \in \mathbf{R}, 0 < x < 4\}$ hanno la stessa cardinalità? Perché?

7) Sia \mathfrak{N} la struttura dei numeri naturali e \mathfrak{R} quella dei numeri reali, con le usuali relazioni e funzioni e l'usuale linguaggio.

(1) Il seguente enunciato

$$\forall v_0 \rightarrow < v_0 0 \exists v_1 \wedge < 0 v_1 = v_0 \times \times v_1 v_1 v_1$$

è vero o falso in \mathfrak{N} ? E in \mathfrak{R} ? Motivare le risposte.

- (2) Si consideri la formula $\varphi : \neg \exists v_2 \wedge < v_0 v_2 < v_2 v_1$ e la realizzazione $\sigma = (\mathfrak{N}, \underline{a})$, dove $\underline{a} : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$, $n \rightarrow n + 2$. Si calcoli esplicitamente (passaggio per passaggio) φ^σ .

6) Dire che cosa significa che una formula α è soddisfacibile. Dire cosa significa che la formula α è conseguenza logica dell'insieme di formule $\{\beta, \gamma\}$. Dimostrare che, per ogni scelta delle formule α e β ,

$$\{\alpha \vee \beta\} \models \neg \alpha \beta$$

7) Si consideri la struttura $\mathfrak{N} = (\mathbf{N}, \{\equiv, <\}, \{\oplus, \otimes\}, \{0, 1\})$, dove \mathbf{N} denota l'insieme dei numeri naturali, \equiv la relazione binaria di essere lo stesso numero, $<$, \oplus e \otimes rispettivamente l'ordine, l'addizione e la moltiplicazione tra numeri naturali, 0 e 1 i numeri zero e uno.

Sia \mathcal{L} un linguaggio adatto alla struttura i cui simboli propri siano i predicati $=, <$; i simboli per funzione $+, \times$ e s ; i simboli per costante $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$.

Nel linguaggio \mathcal{L} si scriva una formula $\varphi(v_0, v_1)$ con le sole variabili libere indicate tale che $\mathfrak{N} \models \varphi(v_0, v_1)[a, b]$ se e solo se $a - b$ è un numero pari non divisibile per 5.

8) Per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$, sia $f_\lambda: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definita da:

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} -e^{-x} & x \leq 0 \\ \lambda x^2 - 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

Per quali valori di λ f_λ è una funzione da \mathbf{R} in \mathbf{R} ? Per quali valori di λ f_λ è una funzione da \mathbf{R} in \mathbf{R} f_λ totale, iniettiva, suriettiva? Esiste l'inversa di f_λ ? In caso affermativo, trovare f_λ^{-1} .

9) Siano $f, g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definite da

$$f(x) = \sqrt{\ln x + 1} \quad g(x) = e^{\frac{x}{x-1}}$$

- (1) Trovare l'insieme di definizione di f e l'insieme di definizione di g .
- (2) Determinare le funzioni composte $f \circ g$ e $g \circ f$, specificandone gli insiemi di definizione.