geodetiche : 1ª definizione

Def. geodetiche = curve autoparallele, ovvero tali che il loro vettore velocità sia parallelo su di sé

Ponendo $(v^j)=(\dot x^j)$ nell'equazione precedente, si ha..

equazione delle geodetiche

$$\boxed{\ddot x^r + \dot x^i \dot x^j \Gamma^r_{ij} = 0} \qquad r=1,2$$

Le geodetiche sono curve parametrizzate (l'equazione delle geodetiche non è invariante per cambiamento di parametro).

geodetiche : 2ª definizione

L'equazione delle geodetiche può dedursi a partire da due principi variazionali

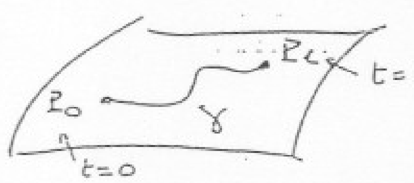
$$L_1 = \frac{1}{2} g_{ij}\, \dot x^i \dot x^j \quad (\dot q^i)$$

lagrangiana

$g_{ij} = g_{ij}(x,v)$

: energia cinetica di una particella di massa $m=1$ che si muove liberamente su Σ

(in generale $L = T - V$, T: en. cinetica, V: en. potenziale)



$$L_1 = L_1(\overset{x^i}{q^i}, \dot q^i)$$

$$\boxed{S(\gamma) := \int_0^1 \frac{1}{2} g_{ij}\, \dot x^i \dot x^j \, dt}$$

azione

Fatto ✶ Le equazioni delle geodetiche sono le equazioni di Eulero-Lagrange ottenute da S tramite il principio di azione stazionaria

[Ricordiamo $\delta S = 0$, $S = \int_0^1 \mathcal{L}(q, \dot q)\, dt$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q^j}} \quad \text{Eulero-Lagrange}$$

$$\overset{\Vert}{f_i} = \dot{\overset{\Vert}{p_i}} \qquad p_i = g_{ij}\dot x^j \qquad \text{Eq. di Newton}$$

$$\Big(\text{se } \mathcal{L} = \underset{T(\dot q)}{\underset{\Vert}{T}} - V \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = -\frac{\partial V}{\partial q} \Big) \Big]$$

Sia ora $L_2 = L_1^{\frac{1}{2}}$ S = lunghezza (è indip dal parametro)

si trova ...

$$\frac{d}{dt} \frac{g_{kj}\dot x^j}{\sqrt{g_{ij}\dot x^i \dot x^j}} = \frac{\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot x^i \dot x^j}{2\sqrt{g_{ij}\dot x^i \dot x^j}}$$

Se $t = s$ (ascissa curvilinea), ovvero $\sqrt{g_{ij}\dot x^i \dot x^j} = \text{cost}$

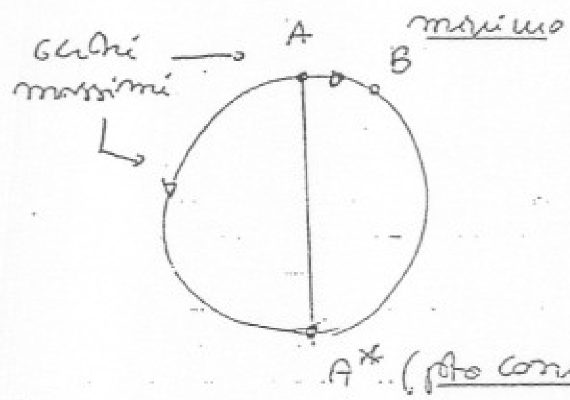
si ha
$$\boxed{\frac{d}{dt} \underbrace{g_{kj}\dot x^j}_{p_k} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \dot x^i \dot x^j}$$

... cioè la stessa eq. di prima, come si verifica con qualche calcolo, nonché l'eq. di autoparallelismo (eq. geodetica)

 V. anche Cap XI

⇒ "Le geodetiche, misurate con un parametro naturale sono cammini critici del funzionale lunghezza"

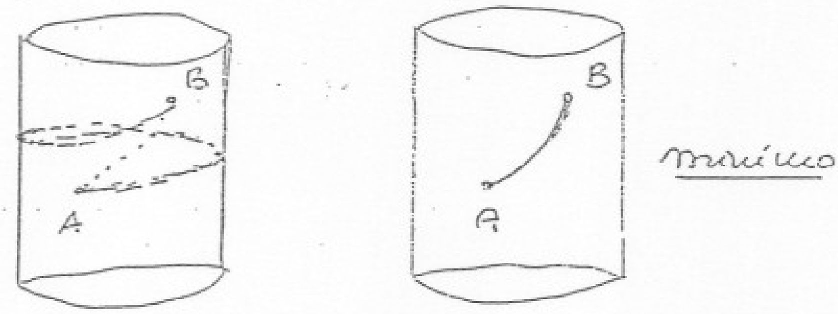
[☆ Attenzione! una geodetica non realizza necessariamente un cammino di lunghezza minima



$\widehat{AB}$ minimo

$\widehat{AA^*B}$ non è minimo.

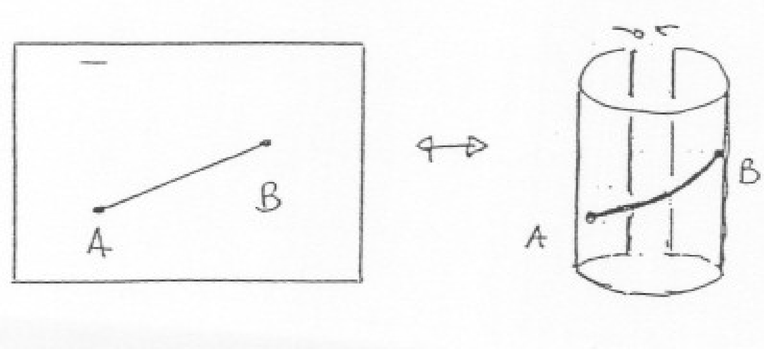
Altro esempio



cilindro: geodetiche = eliche ...]
(vedi figura...)

[... Si confronti ciò col principio di Maupertuis..

$S = \int \sqrt{E - V(x)}\, ds \ldots$



☆ geodetiche . 3ª definizione

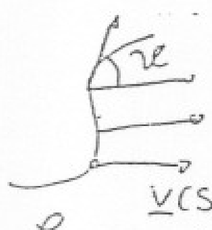
(approccio "estrinseco")

Problema: definire una quantità per curve su Σ in P. Che misuri la deviazione dalla geodeticità

Soluzione: Proiettare $\mathcal{C}$ sul piano tangente a Σ in P e considera la corrispondente curva piana $\mathcal{C}'$: si definisce curvatura geodetica $k_g(P)$ di $\mathcal{C}$ la curvatura di $\mathcal{C}'$ in P.

☆ geodetiche $\equiv (k_g \equiv 0)$ ...

Procediamo in questo modo:



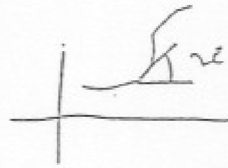
Sia $\mathcal{C}$ descritta da s. $\underline{r} = \underline{r}(s)$

Sia $\underline{v}(s)$ parallelo, e $\|\underline{v}\| = 1$

☆ $\cos\vartheta = \langle \underline{v} | \underline{r}' \rangle$ $\quad (\|\underline{r}'\| = 1 ..)$

definiamo:

$$\boxed{k_g := \frac{d\vartheta}{ds}}$$

(

nel piano $k = \frac{d\vartheta}{ds}$ direzione fissa

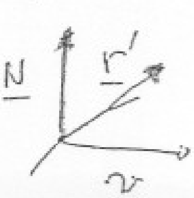
Deriviamo ☆: $\quad -\vartheta' \sin\vartheta = \underbrace{\langle \underline{v}' | \underline{r}' \rangle}_{=0} + \langle \underline{v} | \underline{r}'' \rangle$

per definizione campo parallelo

Si ponga $\sin\vartheta = +1$ in un dato punto

(k_g non dipende dal vettore...)

$$\frac{d\vartheta}{ds} = -\vartheta' = \langle \underline{r}'' | \underline{v} \rangle \Rightarrow \underline{v} = \underline{r}' \times \underline{N} \quad ⚠$$

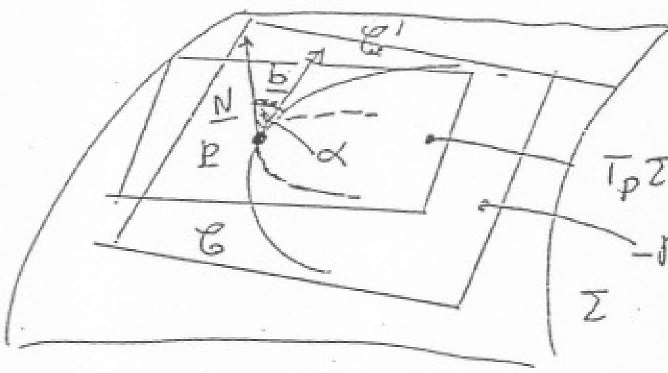


$$\Rightarrow k_g = -\langle \underline{v}, \underline{r}'' \rangle =$$

$$= -\langle \underline{r}' \times \underline{N} ; \underline{r}'' \rangle = \langle \underbrace{\underline{r}'}_{= \underline{t}}, \underbrace{\underline{r}''}_{= k \underline{n}} \times \underline{N} \rangle$$

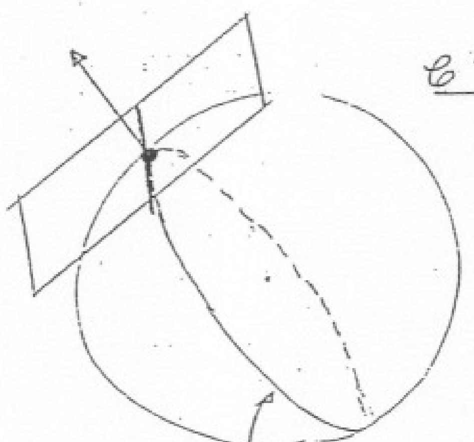
$$\Rightarrow \quad k_g = \langle \underline{N} \mid \underbrace{\underline{t} \times \underline{n}}_{= \underline{b}} \rangle\, k \;\equiv\; \cos\alpha \; k$$

$\Rightarrow$ curve autoparallele $\equiv k_g = 0$, e... recupero l'intuizione originaria...



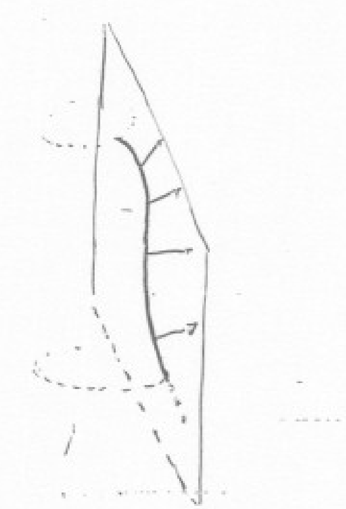
$\mathcal{C}'$ è una retta...

ex:



cerchio massimo

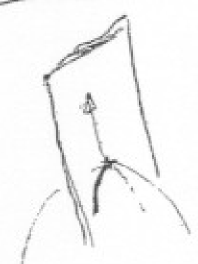
su una superficie di rotazione: i meridiani sono geodetiche



i paralleli, in generale no ma v. oltre

Osservazione

$$\boxed{k^2 \doteq k_n^2 + k_g^2}$$

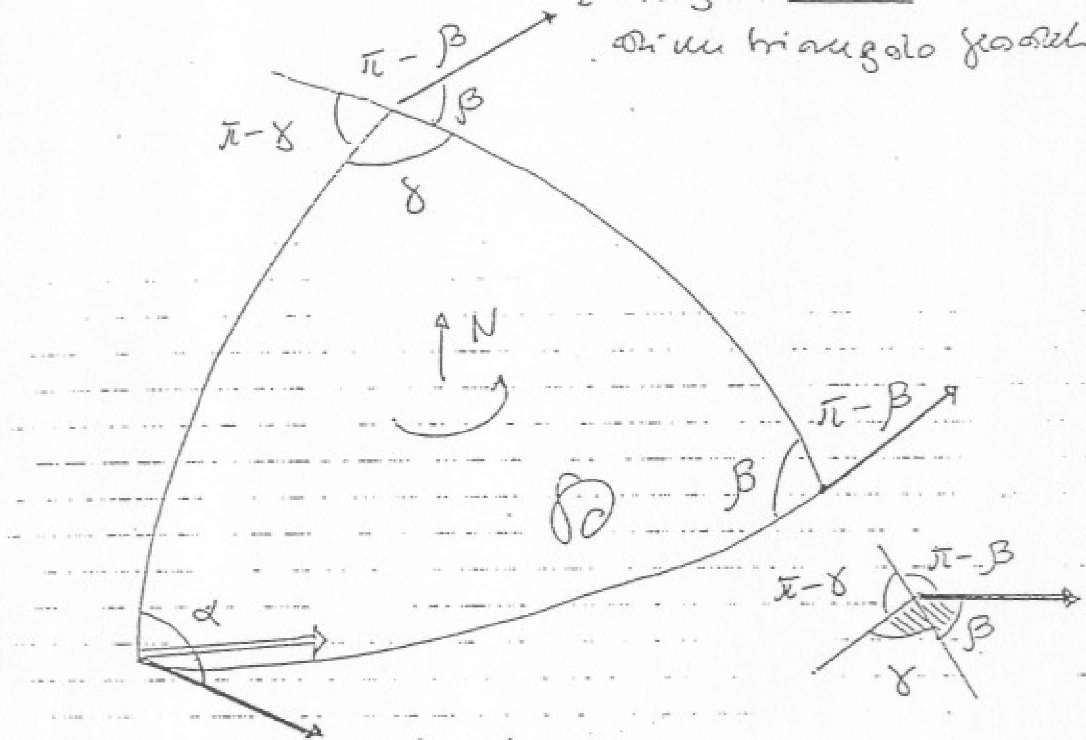


$\Rightarrow$ se $k = k_n$ è $\boxed{k_g = 0}$

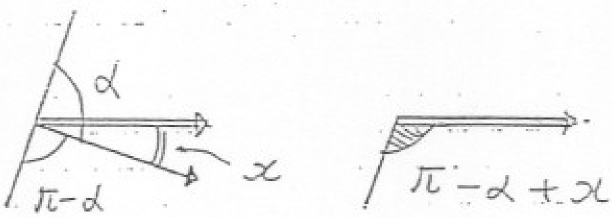
questi paralleli costituiscono geodetiche

Formula di Gauss (– Bonnet)
(per i triangoli geodetici)

$$\boxed{\underbrace{\alpha + \beta + \gamma - \pi}_{\Sigma \text{ angoli interni di un triangolo geodetico}} = \iint_{\delta} K\, d\sigma}$$



$$\pi - \alpha + x = \gamma + \beta$$



Dimostrazione: Si ottiene dalla formula di Levi Civita ... si ricordi che i triangoli sono geodetici e che il trasporto parallelo conserva gli angoli.

$$x = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

$$\| $$

$$\iint_{\delta} K\, d\sigma \qquad \square$$

Applicandola ad una sfera, si ritrova la formula di Harriot, Girard, Cavalieri ($K = \frac{1}{R^2}$)

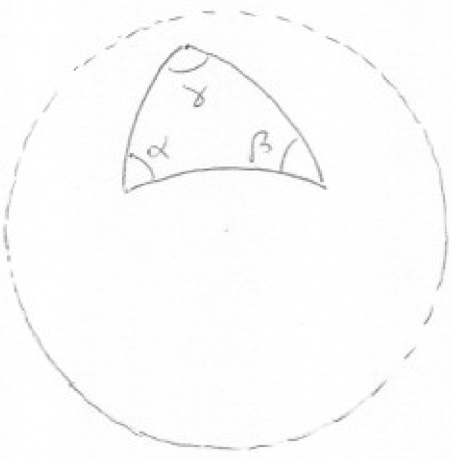
Area di un triangolo sferico (geodetico: i lati sono tratti di cerchi massimi)

$$A = \alpha + \beta + \gamma - \pi \quad (> 0 \; !!$$

★ eccesso sferico (Gauss)

... geometria non euclidea

Applicazione: geometrie non euclidee ***



$$\alpha + \beta + \gamma > \pi$$

* la somma degli angoli di un triangolo (geodetico) supera π

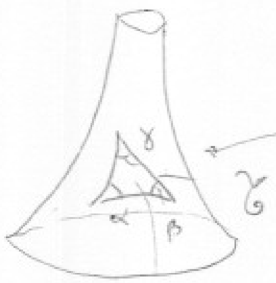
triangolo geodetico

cerchi massimi (modello identif. dei punti antipodali) $\equiv$ rette

** $\mathbb{RP}^2$ piano proiettivo reale: modello del piano ellittico. non vi sono "rette" parallele!!
due cerchi massimi si incontrano sempre.

** piano di Lobachevski (iperbolico): modello locale: pseudosfera di Beltrami

$K = -1$



triangolo geodetico T

$$\alpha + \beta + \gamma < \pi$$

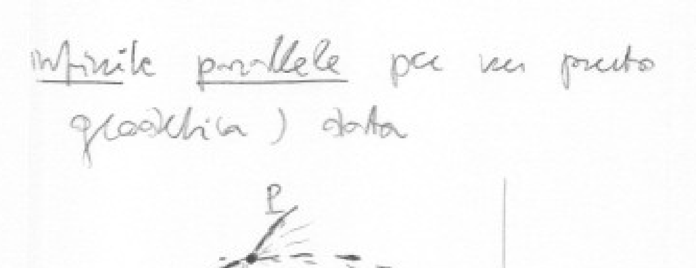
$$\alpha + \beta + \gamma - \pi = -A(T)$$

area

non vi sono triangoli simili che non siano congruenti

infinite parallele per un punto esterno ad una "retta" (i.e. geodetica) data

v. oltre per il calcolo delle geodetiche



☆☆ Teorema di Gauss – Bonnet

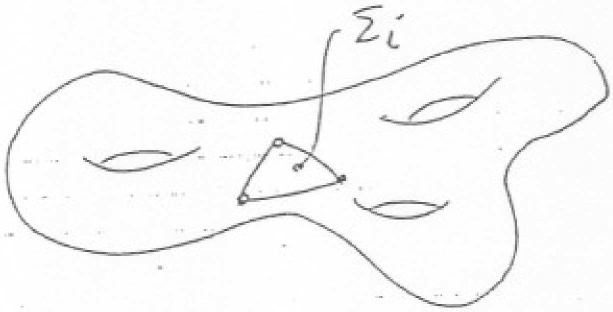
Σ sup. (liscia), compatta, senza bordo

(Σ, g)
metrica riemanniana..

$$\iint_\Sigma K \, d\sigma = 2\pi \chi(\Sigma) \quad (= 2 - 2g)$$

caratteristica di Eulero-Poincaré

qui $g = \#$ "buchi"



$\boxed{g: \text{genere di } \Sigma}$

$(g = 3 ..)$

!

sarebbe da dimostrare

$$\chi(\Sigma) = n_0 - n_1 + n_2$$

invariante topologico

$\#$ vertici, $\#$ lati, $\#$ triangoli (geodetici)

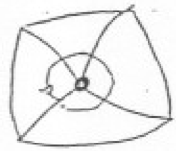
di una triangolazione di Σ

Dimostrazione: Si deduce dalla formula precedente

$$\iint_\Sigma K \, d\sigma = \sum_{i=1}^{n_2} \iint_{\Sigma_i} K \, d\sigma = \sum_{i=1}^{n_2} (\alpha_i + \beta_i + \gamma_i - \pi) =$$

triangoli..

$$= 2\pi n_0 - \pi n_2 = 2\pi \left(n_0 - \frac{n_2}{2} \right)$$

[]

Ora è $n_1 = \dfrac{3 n_2}{2} \Rightarrow \chi(\Sigma) =$

$= n_0 - \dfrac{3n_2}{2} + n_2$

$= n_0 - \dfrac{n_2}{2}$

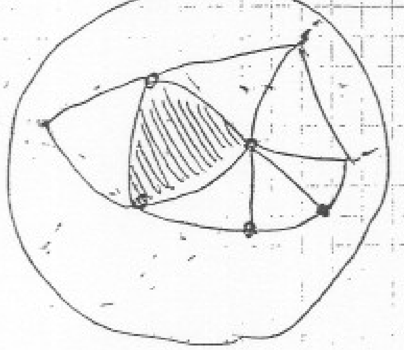
$\Rightarrow$ segue l'asserto $\square$

Curiosità

La "Dimostrazione" di Cauchy

di $V - E + F = 2$

$\underbrace{V}_{\text{vertici}} - \underbrace{E}_{\text{spigoli}} + \underbrace{F}_{\text{facce}} = 2$



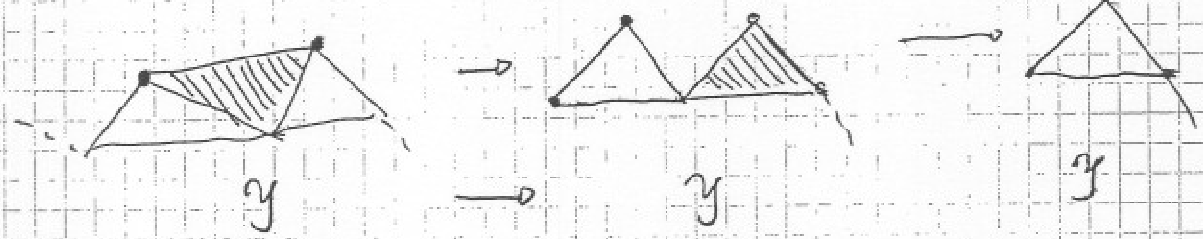
(per la sfera, o superficie omeomorfa a questa)

per una qualsiasi triangolazione.

Sia $V - E + F = x$

Rimuovendo un triangolo, tale somma diviene $y = x - 1$. Proviamo che $y = 1$

"Stendiamo" la superficie così ottenuta su di un piano, e togliamo ad uno ad uno i triangoli "partendo dall'esterno"



Ci si convince facilmente del fatto che y non cambia. Si arriva all'ultimo triangolo, per il quale $y = 1$ □

(Ma la faccenda è un po' più complicata ...)

si veda I. Lakatos "Dimostrazioni e confutazioni" Feltrinelli

Determinazione delle geodetiche

* **Sfera** : cerchi massimi (chiaro dalla def. tramite $k_g = 0$).

(ϑ, φ) $\quad ds^2 = d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \, d\varphi^2$

colatitudine longitudine

$\begin{matrix} \vartheta & \varphi \\ \| & \| \\ x^1 & x^2 \end{matrix}$

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\vartheta \end{pmatrix}$$

$$(g^{ij}) = \frac{1}{\sin^2\vartheta} \begin{pmatrix} \sin^2\vartheta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin^2\vartheta} \end{pmatrix}$$

$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ metrica

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{ih} \left(g_{kh,j} + g_{ih,k} - g_{jk,i} \right)$$

simboli di Christoffel

$g_{kh,j} \equiv \frac{\partial g_{kh}}{\partial x^j}$ etc..

matrice inversa di (g_{ij})

* geodetiche

$$\boxed{\ddot{x}^i + \Gamma^i_{kh} \dot{x}^k \dot{x}^h = 0} \quad i = 1, \dots n$$

tali formule hanno validità generale; si usa la convenzione di Einstein: somma su indici ripetuti

$$\Gamma^1_{22} = -\frac{1}{2} \sin 2\vartheta$$

$$\Gamma^2_{12} = \cot \vartheta$$

(gli altri sono nulli...). Si ha, per le geodetiche

$$\begin{cases} \vartheta'' - \frac{1}{2}(\varphi')^2 \sin 2\vartheta = 0 \\ \varphi'' + \varphi'\vartheta' \cot\vartheta = 0 \end{cases}$$

Si calcoli $K = \dots + 1$

$\varphi = \text{cost}$ $\quad \vartheta = s$ (meridiano) è certamente soluzione, (prendendo come parametro la lungh. d'arco). Per simmetria, tutti i cerchi massimi sono geodetiche, e una geodetica qualsiasi, essendo la sua direzione iniziale tangente ad un cerchio massimo, è necessariamente un cerchio massimo.

✱ <u>Variante</u>, tramite le equazioni di Lagrange

[si evita il calcolo dei simboli di Christoffel]

$$g = d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2$$

$$T = \tfrac{1}{2}(\dot\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\dot\varphi^2) \equiv L$$

"energia cinetica"

Nota: se $t = s$ è $\dot\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\dot\varphi^2 = a = \text{cost}$

$\dot\vartheta^2 + \dfrac{c^2}{\sin^2\vartheta} = a$ (per (✱✱))

e arrivo, assieme a (✱✱), a integrare l'equazione

$$\frac{\partial L}{\partial \vartheta} = \sin\vartheta\cos\vartheta\,\dot\varphi^2 \implies \ddot\vartheta = \sin\vartheta\cos\vartheta\,\dot\varphi^2 \quad (✱)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\vartheta}\right) = \frac{d}{dt}(\dot\vartheta) = \ddot\vartheta$$

fatto cruciale

ma $\dfrac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \implies \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\right) = 0 \implies \dfrac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = \text{cost.}$

(✱✱) $\dfrac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = \sin^2\vartheta\,\dot\varphi = c$ (Clairaut) $\vartheta \notin \{0, \pi\}$ ..

ora, se $c = 0$ è $\dot\varphi = 0$, $\varphi = \text{cost}$ (meridiani)

e concludo come prima, per ragioni di simmetria

[sostituendo in (✱), che di fatto non serve, è

$$\ddot\vartheta = \sin\vartheta\cos\vartheta\,\frac{c^2}{\sin^4\vartheta} = \frac{\cos\vartheta\, c^2}{\sin^3\vartheta} \;\; .. \,]$$

* Piano iperbolico (Lobachevski)

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} \qquad y > 0$$

$$(g_{ij}) = \frac{1}{y^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (g^{ij}) = y^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma^1_{12} = \frac{1}{y} \qquad \Gamma^2_{11} = -\frac{1}{y} \qquad \Gamma^2_{22} = \frac{1}{y}$$

si ha:

$$(*) \quad \begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{2\dot{x}\dot{y}}{y} \\ \ddot{y} = \dfrac{\dot{y}^2 - \dot{x}^2}{y} \end{cases} \qquad \dot{} = \frac{d}{dt}$$

ora $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{\dot{y}}\frac{dt}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right) =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right) \cdot \underbrace{\frac{dt}{dx}}_{\frac{1}{\dot{x}}} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3} = \quad (\text{da } (*))$$

$$= \frac{\dfrac{\dot{y}^2 - \dot{x}^2}{y}\dot{x} - \dot{y}\dfrac{2\dot{x}\dot{y}}{y}}{\dot{x}^3} = \frac{1}{y}\,\frac{\dot{y}^2\dot{x} - \dot{x}^3 - 2\dot{y}^2\dot{x}}{\dot{x}^3}$$

$$= \frac{1}{y}\left(\frac{-\dot{y}^2\dot{x} - \dot{x}^3}{\dot{x}^3}\right) = -\frac{1}{y}\left(\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2 + 1\right) = -\frac{1}{y}(y'^2 + 1)$$

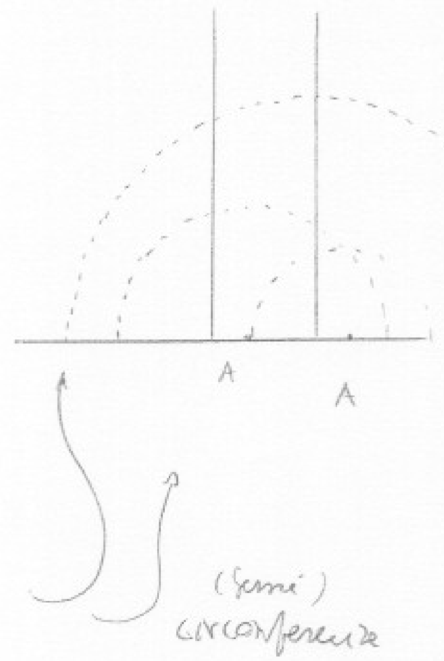
$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx} \equiv y'$$

Dunque

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = -\frac{1}{y}\left(y'^2+1\right) \Rightarrow$$

$$y\,y'' + y'^2 = -1 \Rightarrow$$

$$(y\,y')' = -1 \Rightarrow y\,y' = -x + A \quad (\star)$$



$$y\,dy = (-x + A)\,dx$$

$$\parallel$$

$$\frac{1}{2}\,d(y^2) = (-x + A)\,dx$$

$$y^2 = -x^2 + 2Ax + B$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2Ax - B = 0$$

$$(x-A)^2 + y^2 = A^2 + B$$

Se $\dot{x} = 0$ è $x = C_1$ $\Rightarrow$ (semi) rette verticali

<u>curvatura</u> <u>del</u> <u>piano</u> <u>iperbolico</u> $\qquad y > 0$

$$K = -\frac{1}{2\lambda}\,\Delta \log\lambda \qquad \lambda = \frac{1}{y^2} \qquad \log\lambda = -2\log y$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\log\lambda) = 0$$

$$\Delta\log\lambda = -2\,\frac{\partial^2}{\partial y^2}\log y =$$

$$= -2\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y}\right) = +2\,y^{-2} \qquad K = -\frac{2\,y^{-2}}{2\,y^{-2}} = -1$$

★ Variante (Eq. di Lagrange)

$' = \frac{d}{ds}$ lunghezza d'arco [iperbolica !]

$$L = \frac{1}{2}\frac{1}{y^2}(x'^2 + y'^2)$$ [cf. il teorema di Noether una "simmetria" dà luogo ad un principio di conservazione]

da $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$ si ha $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'} = \frac{x'}{y^2} = C$ (cost.)

invarianza per traslazioni $x \mapsto x + a$

poniamo, per fissare le idee $x' = y^2$

se $C = 0$ troviamo $x' = 0$ $x = \text{cost}$ => (semi) rette verticali

Si ha pure (da $g_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j = 1$) "cons. dell'energia"

$$\frac{1}{y^2}(x'^2 + y'^2) = 1$$

$$x'^2 + y'^2 = y^2 \implies y'^2 = y^2 - x'^2 = y^2 - y^4 = y^2(1-y^2)$$

$y > 0$

$$y' = \pm\, y\sqrt{1-y^2}$$

prendiamo il segno −

$$y' = -y\sqrt{1-y^2}$$

$$\begin{cases} x' = y^2 = \frac{dx}{ds} \\ y' = -y\sqrt{1-y^2} = \frac{dy}{ds} \end{cases}$$

$$\implies \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}$$

posto $y = \sin\xi$ $dy = \cos\xi \, d\xi$

$$\frac{-y\,dy}{\sqrt{1-y^2}} = dx \qquad \frac{-\sin\xi\cos\xi\,d\xi}{\underbrace{\cos\xi}_{>0}} = dx$$

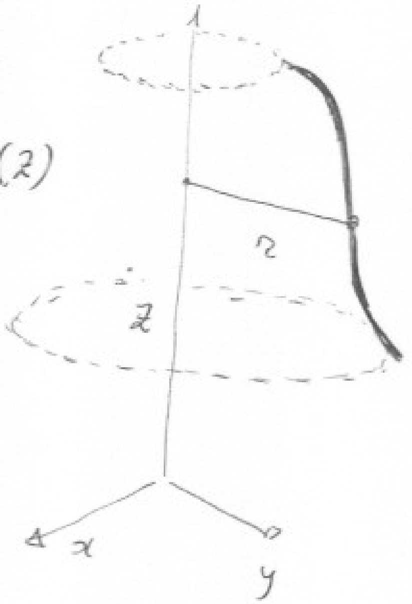
$$dx = -\sin\xi\,d\xi$$

$$\implies \begin{cases} x = \cos\xi + a \\ y = \sin\xi \end{cases} \qquad (x-a)^2 + y^2 = 1$$

4 Geodetiche sulle superficie di rivoluzione

discussione generale tramite le eq. di Lagrange

$r = f(z)$



$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$T = \frac{1}{2}\left(\dot z^2 + \dot r^2 + r^2 \dot\phi^2 \right)$$

Energia cinetica

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \qquad \varphi \in [0, 2\pi$$

coordinate cilindriche

Controllo:

$$\dot x = \dot r\cos\varphi - r\sin\varphi\,\dot\varphi$$
$$\dot y = \dot r\sin\varphi + r\cos\varphi\,\dot\varphi$$

$$\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2 = \dot z^2 + \dot r^2 + r^2\dot\phi^2 \cancel{- 2r\dot r\sin\varphi\cos\varphi\,\dot\varphi} \cancel{+ 2r\dot r\sin\varphi\cos\varphi\,\dot\varphi}$$

$$\dot r = \frac{df}{dt} = \frac{df}{dz}\frac{dz}{dt} = f'(z)\,\dot z$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}\left[f'(z)^2 + 1 \right]\dot z^2 + f(z)^2\dot\phi^2$$ "energia cinetica"

$\mathcal{L}$ Lagrangiana

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_\alpha} = 0 \qquad \alpha = 1 .. n$$

se $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\alpha} = 0$ (q_α coordinata ciclica, o ignorabile) è $\quad \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} = 0$

ovvero $\quad \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} = \text{costante} \quad$ (integrale primo)

Nel nostro caso T non dipende da φ, sicché

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = 2 f(z)^2 \dot{\phi} = \text{cost.}$$

[conservazione della componente z del momento angolare]

$$f(z)^2 \dot{\phi} = \text{cost}$$

$$r^2 \dot{\phi}$$

archetto di geodetica

α: azimut

$dt = ds$

$$\boxed{\dot{\phi} = \frac{d\phi}{ds} = \frac{1}{r}\sin\alpha}$$

$$r^2\, d\phi = C_1\, ds$$

$$r\,(r\, d\varphi) = C_1\, ds$$

$$r \sin\alpha\, ds = C_1\, ds$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{r \sin\alpha = C_1}$$

raggio del parallelo

azimut

teorema di Clairaut

X-16

** L' Equazione geodetica (che non è necessario scrivere) si integra, in linea di principio, utilizzando

$$T = h \qquad (\text{cost}) \leftarrow \text{conservazione dell'energia}$$

Clairaut

$$f^2 \dot\phi = k$$

$$(f'^2 + 1)\dot z^2 + k^2 f^{-2} = 2h \qquad f^4 \dot\phi^2 = k^2$$

cons. della componente z del momento angolare

$$\Downarrow \qquad f^2 \dot\phi^2 = f^2 \frac{k^2}{f^4} = k^2 f^{-2}$$

$$\dot z^2 = \frac{2h - k^2 f^{-2}}{f'^2 + 1} =$$

$$= \frac{2hf^2 - k^2}{f^2(f'^2+1)} \qquad (2hf^2 - k^2 \geq 0) \quad f > 0$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{k}{f^2}$$

$$d\varphi = \frac{k}{\mathcal{Y}^2(t)}\, dt$$

$$\varphi = \int \frac{k}{\mathcal{Y}^2(t)}\, dt + \ldots$$

$$\dot z = \pm \sqrt{\frac{2hf^2 - k^2}{f^2(f'^2+1)}}$$

$$\dot z = \frac{dz}{dt}$$

$$\boxed{2h = 1}$$

$$dt = \pm \sqrt{\frac{f^2(f'^2+1)}{2hf^2 - k^2}}\, dz \qquad \text{x} \quad dt = ds$$

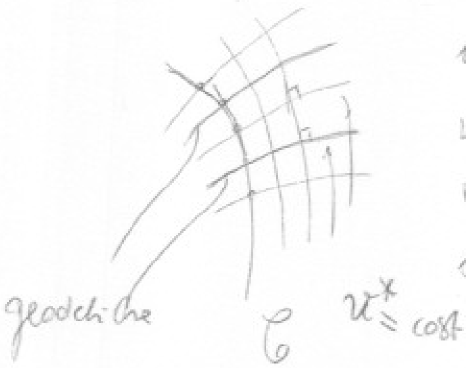
$$t = \tau(z) \qquad z = \tau^{-1}(t) \qquad r = r(z) = f(z) = \mathcal{Y}(t)$$

$$\varphi = \ldots \Phi(t)$$

Le geodetiche danno luogo, localmente, alle curve di lunghezza <u>minima</u> congiungenti due pti dati (suffic. vicini) ["minimizzano, localmente, il funzionale lunghezza"]

vediamo come:

in una porzione di superficie consideriamo una curva qualsiasi $\mathcal{C}$; a partire dai pt. di $\mathcal{C}$ spicchiamo le geodetiche ortogonali a $\mathcal{C}$; rispetto ad un opportuno parametro v^*, che può vedersi come un parametro su $\mathcal{C}$, esse saranno date da $v^* = \text{cost}$.



consideriamo le loro traiettorie ortogonali come curve $u^* = \text{cost}$ ($\mathcal{C}$ corrisponde a $u^* = 0$) [queste ultime non sono necessariamente geodetiche] ; in termini delle coordinate u^* e v^*,

$g^*_{12} \equiv F^* = 0$ (ortogonalità)

$$\text{Da} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{curvatura geodetica}}}{(\kappa_g)_{v^* = \text{cost}}} = -\frac{1}{\underset{\substack{\| \\ g^*_{22}}}{\sqrt{G^*}}} \frac{\partial}{\partial v^*} \left(\log \sqrt{E^*}\right) = 0$$

($v^* = \text{cost}$ sono geodetiche)

si ha $E^* = g^*_{11}(u^*)$ (non dipende cioè da v^*)

$$\text{Poniamo} \quad u = \overbrace{\int_0^{u^*} \sqrt{E^*}\, du^*}^{\text{ovvero, la lunghezza d'arco su una geodetica}} \quad , \quad v = v^*$$

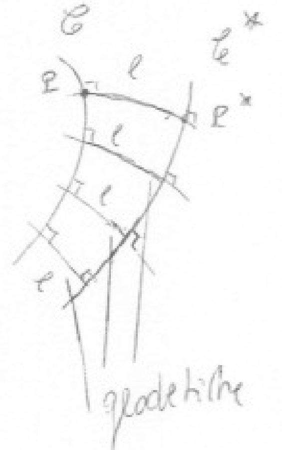
si ottengono nuovamente coordinate ortogonali, e, inoltre

$$ds^2 = du^2 + \underset{\substack{g_{22} \\ = g = \det(I) = EG - \underset{=0}{F^2}}}{G(u,v)}\, dv^2$$

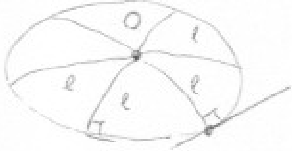
(in particolare $K = -\dfrac{1}{\sqrt{g}}\,\dfrac{\partial^2 \sqrt{g}}{\partial u^2}$ $\quad g = G$)

Dalla formula precedente si ha (lemma di Gauss)

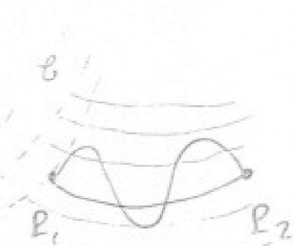
infatti, considerata la curva $\mathcal{C}^*$, del tipo $u = \text{cost.}$ la lunghezza di un arco di geodetica $\widehat{PP^*}$ è costante



la curva $\mathcal{C}^*$ luogo dei punti sulle geodetiche emananti ortogonalmente da $\mathcal{C}$ ad una distanza fissata l (misurata tramite la metrica) è ancora ortogonale alle geodetiche date.
$\mathcal{C}^*$ è detta parallelo geodetico
In particolare un cerchio geodetico è perpendicolare, in ogni suo punto, alla geodetica che va al pto di contatto



Se ora P_1 e P_2 sono punti di Σ congiunti da un'unica geodetica γ, e costruisco un sistema di coordinate geodetiche come sopra, per la lunghezza di un'arco γ congiungente P_1 e P_2 trovo



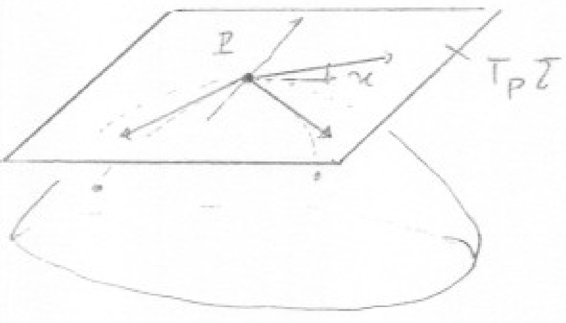
$$l(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot u^2 + \underbrace{g_{22}}_{=G} \dot v^2}\, dt$$

$$\geq \int_{t_1}^{t_2} \dot u\, dt = u_2 - u_1$$

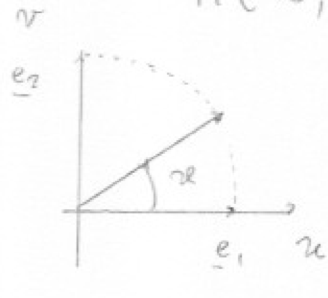
e vale $=$ $\Leftrightarrow$ $\dot v = 0$, cioè γ ha lo stesso sostegno della geodetica $\widehat{P_1 P_2}$.

Applicazione, o mappa esponenziale

(... al-Biruni ..)
X - XI sec.



$$H(r, \vartheta) = \exp_P \left(r \left(\cos\vartheta \, \underline{e}_1 + \sin\vartheta \, \underline{e}_2 \right) \right) \in \Sigma$$

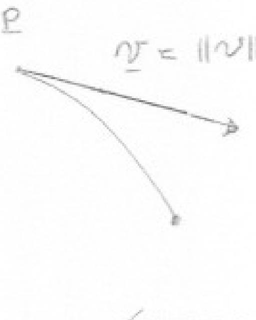


[per r suff piccolo è un diffeomorfismo]

$$\exp_P \underline{v} := \gamma^{\underline{v}}(1) = 2^\circ \text{ estremo dell'arco di geodetica uscente da } P \text{ con velocità } \underline{v}, \text{ per } s = 1$$

$\underline{v} \in T_P\Sigma$

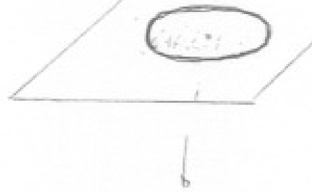
(s : ascissa curvilinea)



$\underline{v} = \|\underline{v}\| \, \underline{u}$ ↑ versore

$$= \gamma^{\underline{u}}(\|\underline{v}\|)$$

(2° estremo dell'arco di geodetica uscente da P con velocità $\underline{u}$ ($\|\underline{u}\| = 1$), per $s = \|\underline{v}\|$



$C_r^P : \vartheta \longmapsto H(r, \vartheta)$

↑ fisso

circonferenza geodetica di raggio r di centro P e raggio r

☆ <u>Teorema</u> (Bertrand, Puiseux)

1. $$L(C_r^P) = \underbrace{2\pi r}_{\substack{\text{l. circ.} \\ \text{euclidea}}} \left(1 - \frac{K(P)}{6} r^2 + o(r^2)\right)$$

2. $$\underbrace{A(\tilde{C}_r^P)}_{\substack{\text{cerchio} \\ \text{geodetico}}} = \underbrace{\pi r^2}_{\substack{\text{area} \\ \text{cerchio} \\ \text{"euclideo"}}} \left(1 - \frac{K(P)}{12} r^2 + o(r^2)\right)$$

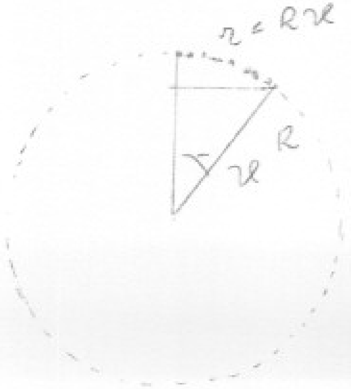
Dim. Diamo una dimostrazione (omettendo qualche dettaglio analitico) <u>diretta</u>, di <u>tipo geometrico</u>.

Approssimiamo Σ, in un intorno di P, con una sfera (sfera osculatrice) tangente a Σ in P e di raggio R con $\frac{1}{R^2} = K(P)$

[Se K è negativo, si usi una pseudo-sfera.]

Si ha: $L(C_r^P) =$

$$2\pi R \sin\vartheta = 2\pi R \sin\frac{r}{R} =$$



$$= 2\pi R \left[\frac{r}{R} - \frac{1}{6}\left(\frac{r}{R}\right)^3 + \dots\right]$$

$$= 2\pi r - 2\pi R \cdot \frac{1}{6} \frac{r^3}{R} \cdot \underbrace{\frac{1}{R^2}}_{= K(P)} + \dots$$

$$= 2\pi r - 2\pi r \cdot \frac{r^2}{6} \cdot K(P) + \dots$$

$$= 2\pi r \left(1 - \frac{K(P)}{6} r^2 + \dots \right)$$ che è la 1.

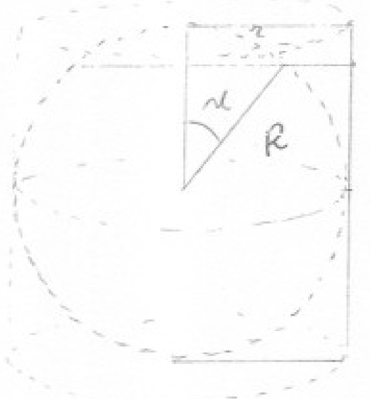
Allo stesso modo, $A(\tilde{C}^P_r)$ = area calotta sferica

$$= \int_0^{\vartheta} \left(\int_0^{2\pi} \sin\vartheta \, d\varphi \right) d\vartheta = 2\pi R^2 (1 - \cos\vartheta)$$

(cf. anche il teor. di Archimede)

$\vartheta = \frac{r}{R}$

$$\| \qquad 2\pi R^2 \left(\frac{\vartheta^2}{2} - \frac{\vartheta^4}{4!} + \dots \right)$$



$$= 2\pi R^2 \left(\frac{r^2}{2R^2} - \frac{r^4}{\underbrace{4!}_{24} R^4} + \dots \right)$$

$$= \pi r^2 \left[1 - \frac{1}{12} r^2 \cdot \underbrace{\frac{1}{R^2}}_{K(P)} + \dots \right]$$

$$= \pi r^2 \left[1 - \frac{K(P)}{12} r^2 + \dots \right],$$ il che prova 2.

Lemma tecnico in coordinate geodetiche polari (ρ, ϑ)

$$\lim_{\rho\to 0} \sqrt{G} = 0 \qquad \lim_{\rho\to 0} \frac{\partial}{\partial\rho}(\sqrt{G}) = 1 \qquad \begin{array}{l} E = 1 \\ G = G(\rho, \vartheta) \end{array}$$

Dim. in coordinate normali
$$\begin{cases} u^* = \rho\cos\vartheta \\ v^* = \rho\sin\vartheta \end{cases}$$

$$\sqrt{EG-F^2} = \sqrt{E^*G^*-F^{*2}} \cdot \frac{\partial(u^*, v^*)}{\partial(\rho, \vartheta)}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{G} = \rho\sqrt{E^*G^*-F^{*2}} .$$

Ora, in P ($\rho = 0$, φ indet.) è $E^* = G^* = 1$, $F^* = 0$

$$\Rightarrow \quad \lim_{\rho\to 0}\sqrt{G} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{\rho\to 0}\frac{\sqrt{G}}{\rho} = 1$$

utilizziamo ciò nel discutere la diffusione delle geodetiche (approccio locale)

La lunghezza di un arco $\rho = \text{cost}$, in coord. polari è

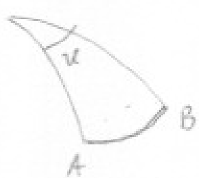
$$L(\rho) = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sqrt{G}\, d\vartheta$$; successivamente è

$= \vartheta_2 - \vartheta_1$

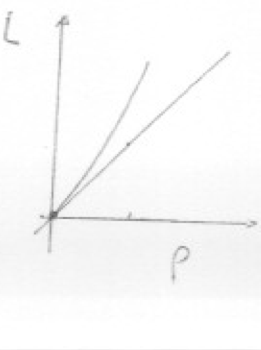
$' = \frac{d}{d\rho}$

$$L'(\rho) = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{\partial}{\partial\rho}(\sqrt{G})\, d\vartheta ,$$

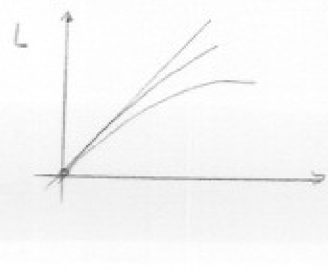
$$L''(\rho) = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}(\sqrt{G})}_{= -K\sqrt{G}}\, d\vartheta$$



? non è la dist tra A e B in gen.



$K<0$ le geod. si allontanano



$K>0$ inizialmente si allontanano; possono riavvicinarsi

Conseguenza: il flusso geodetico su una superficie a curvatura negativa è caotico (ovvero, si ha dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali.

★ Conseguenza remota: l'impossibilità di predizioni metereologiche precise di lungo termine.

Gli stati dell'atmosfera costituiscono i pti di una varietà riemanniana di dimensione infinita, e la dinamica può interpretarsi come flusso geodetico di una certa metrica. Tale varietà ha curvatura (sezionale) generalmente negativa (V. I. Arnol'd)

1. Teorema di Mindino

Dim. Partiamo da

$$(\sqrt{G})_{\rho\rho} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{costante}}}{K} \sqrt{G} = 0 \qquad (\text{coord. polari})$$

e ricordiamo che (*) $\lim_{\rho \to 0} \sqrt{G} = 0$, $\lim_{\rho \to 0} (\sqrt{G})_\rho = 1$

Abbiamo tre casi:

1. $K = 0$ $\qquad \sqrt{G} = \rho + f(\vartheta)$, ma da (*) si ha $f(\vartheta) \equiv 0$

$\Rightarrow E = 1, \; F = 0, \; G(\rho, \vartheta) = \rho^2 \qquad ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\vartheta^2$

<u>piano</u>

2. $K > 0$

$$\sqrt{G} = A(\vartheta) \cos(\sqrt{K}\rho) + B(\vartheta) \sin(\sqrt{K}\rho)$$

ma (*) implica $A(\vartheta) \equiv 0$ e (**) dà $B(\vartheta) = \frac{1}{\sqrt{K}}$

$\Rightarrow E = 1, \; F = 0, \; G = \frac{1}{K} \sin^2(\sqrt{K}\rho) \quad \Rightarrow$ loc sfera di raggio $\frac{1}{K}$

3. $K < 0$ $\qquad \sqrt{G} = A(\vartheta) \cosh(\sqrt{-K}\rho) + B(\vartheta) \sinh(\sqrt{-K}\rho)$

$\Rightarrow E = 1, \; F = 0, \; G = -\frac{1}{K} \sinh^2(\sqrt{-K}\rho)$

$\rightsquigarrow$ loc. pseudosfera