Programma ufficiale del corso di *GEOMETRIA*
Università degli Studi di Verona - Facoltà di Scienze MM. FF. NN.
Corso di Laurea in Matematica Applicata - anno accademico 2010-2011
Prof. Mauro Spera - Dipartimento di Informatica

1. Elementi di topologia generale

I. Spazi topologici, insiemi chiusi. Topologia relativa, sottospazi topologici. Funzioni continue, omeomorfismi. Applicazioni aperte. Spazi metrici e loro topologia. Proprieta' di Hausdorff. Topologia prodotto. Topologia quoziente. Spazi di identificazione. Esempi di spazi topologici: R^n, sfere, spazi proiettivi, toro, bottiglia di Klein... Esempio di spazio localmente euclideo ma non di Hausdorff. Continuita' negli spazi metrici ed equivalenza con la definizione generale (con cenno di dimostrazione). In R^n: punti di accumulazione, chiusura.

II. Spazi topologici compatti. In R^n, un sottoinsieme e' compatto se e solo se e' chiuso e limitato e se e solo se vale la proprieta' di Bolzano-Weierstrass. Immagini continue di insiemi compatti sono compatte. La nozione di compattezza e' topologica. Teorema di Weierstrass. Compattezza negli spazi di Hausdorff: sottoinsiemi chiusi di spazi compatti sono compatti. Sottoinsiemi compatti sono chiusi. X compatto, Y Hausdorff, $f : X \to Y$ continua e iniettiva $\Rightarrow$ f omeomorfismo. Esempi vari (v.lezione II, dispense). Cenno alla curva di Peano.

III. Connessione. Connessione per archi, locale connessione per archi. Immagini continue di connessi sono connesse. Le nozioni di connessione sono topologiche. Caratterizzazione degli intervalli come gli unici sottoinsiemi connessi della retta reale (dim: I intervallo $\Rightarrow$ I connesso). La chiusura di un insieme connesso e' connessa (senza dim.). Esempi vari, il pettine ecc. X connesso per archi $\Rightarrow$ X connesso, il viceversa vale se X e' localmente connesso per archi (dimostrazione). Esempi vari. Cenno alla non orientabilita': il nastro di Moebius, il piano proiettivo reale.

2. Geometria differenziale delle curve nel piano e nello spazio

IV. Curve parametriche regolari. Lunghezza d'arco. Curve piane: lunghezza d'arco in coordinate polari. Lunghezza dell'arco ellittico.

V. Curve piane: curvatura (con segno), raggio di curvatura e cerchio osculatore e sua caratterizzazione come limite dei cerchi tangenti alla curva in un punto e passanti per un altro punto della curva. Formula generale per la curvatura, formalismo complesso e formalismo "misto". Ricostruzione di una curva piana a partire dalla sua curvatura a meno di un movimento rigido (teorema fondamentale per le curve piane), formula esplicita. Esempi: rette, coniche e altre curve classiche (cicloide, trattrice, clotoide ecc.). Evoluta ed evolvente. L'evoluta di una cicloide e' una cicloide. L'evoluta di una trattrice e' una catenaria.

VI. Curve spaziali: curvatura, biregolarità, triedro principale, torsione, formule di Fre'net-Se'rret. Una curva e' piana se e solo se ha torsione nulla. Teorema fondamentale (curvatura e torsione caratterizzano una curva biregolare a meno di uno spostamento rigido), con idea della dimostrazione. Formule generali per la curvatura e la torsione. Studio locale di una curva (biregolare) tramite il triedro di Fre'net. Sfera osculatrice e teorema di de Saint-Venant. Esempi: cubica gobba, eliche, curve sferiche, finestra di Viviani..

3. Geometria differenziale delle superficie

VII. Richiami di calcolo vettoriale (fine disp. VI). Superficie parametriche regolari. Prima forma fondamentale (metrica). Carta di Mercator. Proiezione stereografica (e proprieta' di quest'ultima di inviare cerchi in cerchi). Metrica sulle superficie di rivoluzione; la pseudosfera di Beltrami.

VIII. L'applicazione di Gauss e relativo operatore di forma. Seconda forma fondamentale e sue interpretazioni geometriche (teorema di Meusnier; scostamento dal piano tangente) curvature principali, linee asintotiche, linee di curvatura e teorema di Rodrigues. Teorema di Eulero. Indicatrice di Dupin. Curvatura gaussiana e curvatura media e loro formule di calcolo. La seconda forma fondamentale per le superficie di rivoluzione. Curvature principali e loro significato geometrico (curvatura del meridiano e reciproco della grannormale). Curvatura della pseudosfera. Esempi vari (elicoide, catenoide...).

IX. Formule di Weingarten. Il Theorema Egregium e di Codazzi-Mainardi (schema generale della dimostrazione). Formule varie per la curvatura. Derivata covariante e sua interpretazione geometrica (Levi-Civita). Simboli di Christoffel. Dimostrazione del Theorema Egregium. Trasporto parallelo e suo significato geometrico. Formula di Levi-Civita. Trasporto parallelo sulla sfera.

X (e XI) Prologo: principio di azione stazionaria ed equazioni di Lagrange, coordinate cicliche e relative grandezze conservate (integrali primi). Geodetiche e loro propriet intrinseche ed estrinseche: curve autoparallele, cammini critici dei funzionali energia e lunghezza (se si usa l'ascissa curvilinea, in quest'ultimo caso), curve di curvatura geodetica nulla (def. di curvatura geodetica e suo significato geometrico, con dim.). Deteminazione delle geodetiche in alcuni esempi: piano euclideo, sfera, piano iperbolico, superficie di rivoluzione (teorema di Clairaut). Formula di Gauss per i triangoli geodetici. Applicazione alle geometrie non euclidee: sfera, piano proiettivo (ellittico), piano iperbolico. Teorema di Gauss-Bonnet.

Cenni su: applicazione esponenziale, coordinate normali e polari, cerchi geodetici, lemma di Gauss e caratterizzazioni intrinseche della curvatura (formula di Bertrand e Puiseux), teorema di Minding.

XII. Esempi, esercizi e complementi vari, tecniche di calcolo: quadriche, superficie sviluppabili, rigate, superficie minime e loro caratterizzazione variazionale (elicoide, catenoide...).

Gli argomenti si intendono corredati delle relative dimostrazioni (o idee di queste), salvo avviso contrario. Il programma del corso e' interamente contenuto (come sottoinsieme proprio!) nelle dispense del docente (I-XII), scaricabili dalla pagina ufficiale del corso (V3 a.a. 2008/09). Nelle pagine relative agli a.a. 2006/07 2007/08 e 2008/09 sono disponibili tutti i temi d'esame degli anni scorsi, risolti.

Alcuni riferimenti bibliografici (disponibili presso la Biblioteca "Bruno Forte", Ca' Vignal 2)

M.ABATE, F.TOVENA Curve e superfici, Springer, Milano, 2006.
C.DE FABRITIIS, C.PETRONIO Esercizi svolti e complementi di geometria e topologia Bollati-Boringhieri, Torino, 1997.
M.DO CARMO Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
J.GALLIER Geometric Methods and Applications for Computer Science and Engineering, Springer, Berlin, 2000.
A.GRAY, E.ABBENA, S.SALAMON Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica, CRC Press, Boca Raton, 2006.
D.HILBERT, S.COHN-VOSSEN Geometria intuitiva, Boringhieri, Torino, 1972.
M.LIPSCHUTZ Geometria differenziale Schaum, Etas Libri, 1984.
S.LIPSCHUTZ General Topology, Schaum, 1965.
D.MARSH Applied Geometry for Computer Graphics and CAD, Springer, London, 2005.
A.PRESSLEY Elementary Differential Geometry, UTM Springer, New York, 2000.
E.SERNESI Geometria 2 Bollati Boringhieri, Torino, 1994.

Mauro Spera