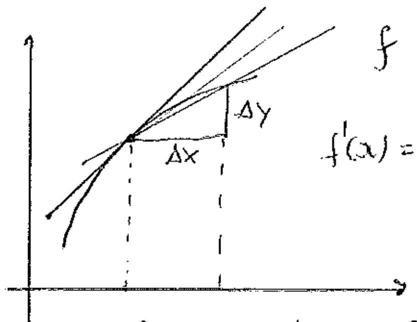
ANALISI MATEMATICA I
modulo avanzato   Prof. M. SPERA
Bioinformatica   a.a. 2007/08

Lezione I

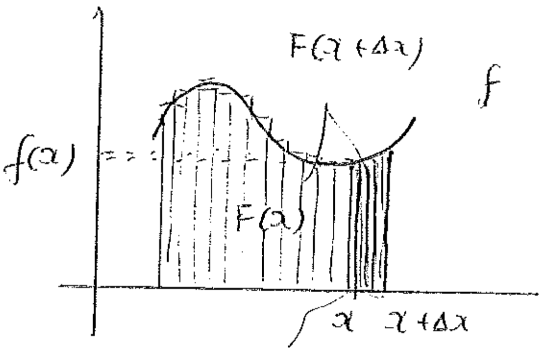
Considerazioni introduttive (schema)

Archimede

problema delle tangenti (calcolo differenziale)	$\longleftrightarrow$	problemi di quadratura (calcolo integrale)



$f'(x) =$ pendenza della retta tangente in $(x, f(x))$



Stretta relazione tra i due problemi:

$$F(x+\Delta x) - F(x) \simeq f(x)\,\Delta x$$

$$\Downarrow$$

$$F'(x) = f(x)$$

"Teorema fondamentale del calcolo"

F : (una) primitiva di f

Calcolo di aree $\xrightarrow{\text{ricondotto alla}}$ ricerca di primitive

Analisi Matematica I (II modulo) Bioinformatica

* Considerazioni introduttive (schema)

Eudosso (accademia di Platone)

Euclide (V° libro: teor. proporzioni)

* Archimede

metodo di esaustione (rig.)

"metodo" (eur.)

aree e volumi

spirale

Torricelli

Cavalieri * principio di Cavalieri

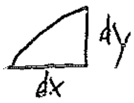
de Roberval

Descartes

Fermat

"adequazione"

Pascal



$\boxed{\text{problema delle tangenti (calcolo differenziale)}}$ — Barrow "dualità" operazioni "inverse" l'una dell'altra → $\boxed{\text{problemi di quadratura (calcolo integrale)}}$

* integrale di Riemann

Newton * (vs) Leibniz

tendenze costruttive

* Sviluppi in serie

approccio geometrico (fluenti, flussioni) metodo delle prime e ultime ragioni

approccio algebrico, statico (infinitesimi attuali) più generale funzione

funzioni associate ad una curva

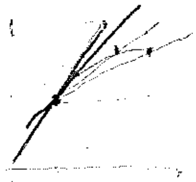
* NON RIGOROSI eppure incredibilmente efficaci!

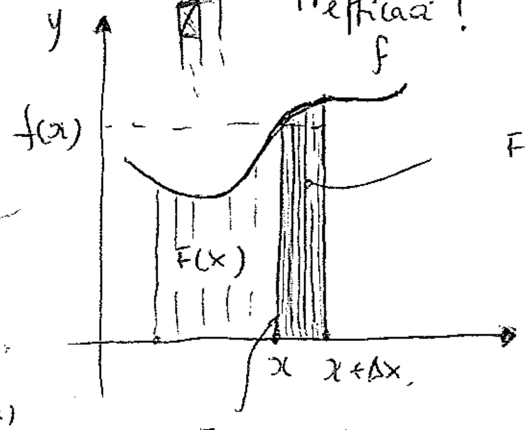
* concetto di limite (Cauchy)

* teoria moderna della retta reale

assiomi di campo + ordine + * completezza

idea di int.





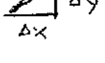
$$F(x+\Delta x) - F(x) \simeq f(x)\,\Delta x$$

$$\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} \simeq f(x)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\Delta x \to 0 \qquad \lim(\quad) = f(x)$$

$$F'(x)$$



$\boxed{\text{calcolo delle aree} \leftrightarrow \text{ricerca di primitive}}$ $\int$

★ Def. Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$

f si dice <u>derivabile</u> in $x_0\in(a,b)$

★ se esiste <u>finito</u>

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$ ← rapporto incrementale

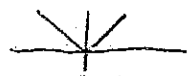
che, in tal caso, viene denotato con $f'(x_0)$:

★ <u>derivata di f</u> (rispetto a x) <u>in x_0</u>

Da $$f(x)-f(x_0)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0) \qquad x\neq x_0$$

segue subito che ★ f <u>derivabile</u> in x_0

$\Rightarrow$ f <u>continua</u> in x_0 ; il viceversa è falso!



se f è derivabile $\forall x_0\in(a,b)$, si dice che

★ <u>f è derivabile in</u> (a,b). In tal caso

★ la <u>funzione</u> $f':(a,b)\to\mathbb{R}$

che associa ad ogni $x\in(a,b)$ la sua derivata in x

è detta <u>derivata di f</u>

(.. la notazione è consistente ...)

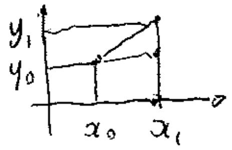
★ se f è derivabile in x_0, la <u>retta</u> di equazione

$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ è detta <u>retta tangente</u>

a (lla <u>curva</u> rappresentata da) $y=f(x)$ in $(x_0,f(x_0))$

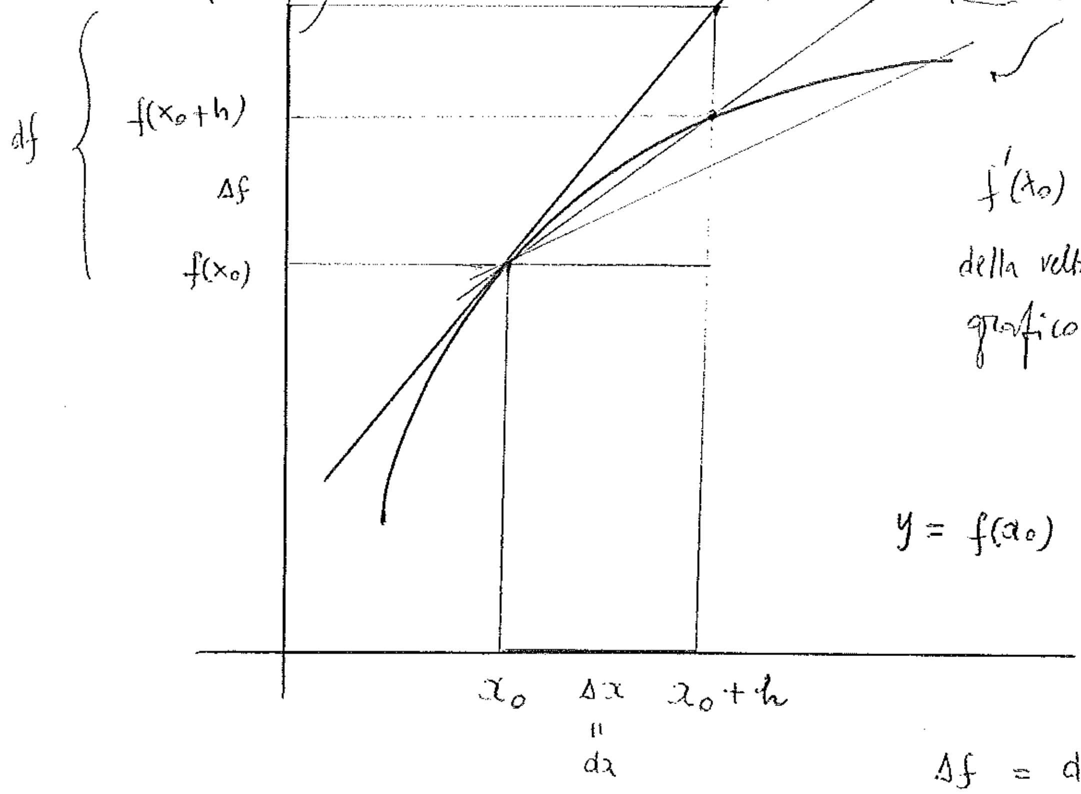
$m = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ $\qquad y - y_0 = m(x - x_0)$

$y = y_0 + m(x - x_0)$



$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

retta tangente : limite delle rette secanti



$f'(x_0)$: coeff. angolare della retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$

retta secante

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}(x - x_0)$$

$$\Delta f = df + o(h)$$

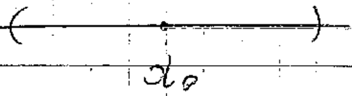
$$df \equiv df\big|_{x_0} = f'(x_0)\,dx \equiv f'(x_0)\,\Delta x$$

* talvolta, con abuso di linguaggio, identificheremo f con il suo grafico, o sostegno $(x, f(x))$ della curva piana $\mathcal{C}: \begin{cases} x = x \\ y = f(x) \end{cases}$ $x \in I$ intervallo

da essa definita; per ex, diremo sia f una curva.... invece di sia $\mathcal{C}$ la curva grafico di f..

Naturale è il concetto
di derivata destra (o sinistra)

$$f'_{\pm}(x_0) := \underset{\text{finito}}{(\text{se esiste})} \lim_{x \to x_0^{\pm}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$



$$\left(\text{eq: } \lim_{h \to 0^{\pm}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)$$

È chiaro che f è derivabile in x_0

$\iff$ 1) $\exists\ f'_{\pm}(x_0)$ (finiti) e 2) $f'_{+}(x_0) = f'_{-}(x_0)$

se vale 1) ma non 2), x_0

(o $P=(x_0, f(x_0))$ è detto pto angoloso

e così pure se una delle due derivate è finita e l'altra no

se poi $f'_{+}(x_0) = \pm\infty$ e $f'_{-}(x_0) = \mp\infty$

si ha una cuspide

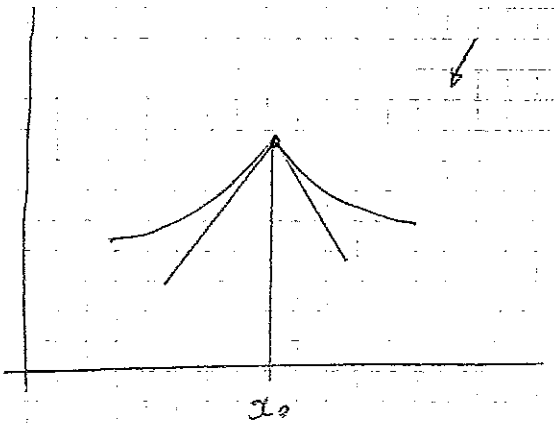
se $f'_{+}(x_0) = \pm\infty$, $f'_{-}(x_0) = \pm\infty$

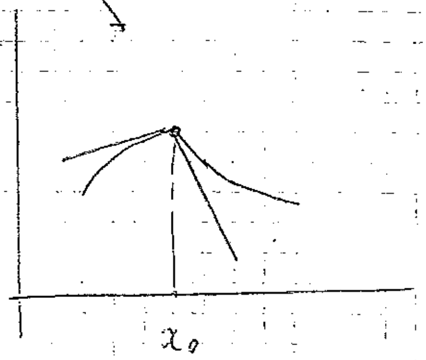
si ha un flesso a tangente verticale

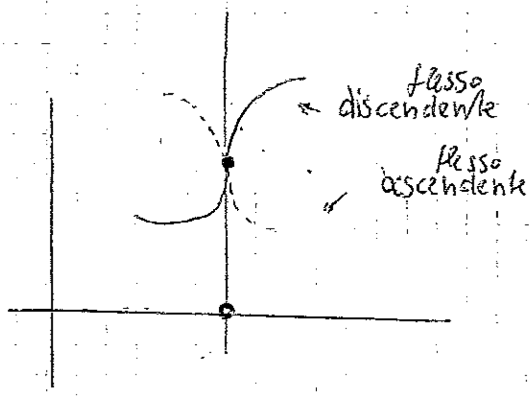
punti angolosi

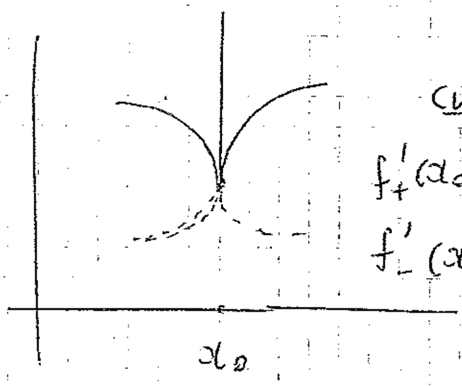
$\overset{\mathbb{R}}{\Downarrow}\ \ \overset{\mathbb{R}}{\Downarrow}$

$f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$









cuspide

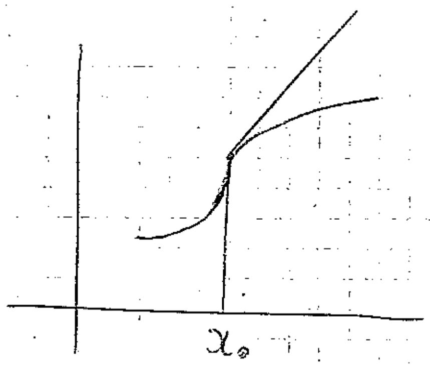
$f'_+(x_0) = \pm\infty$

$f'_-(x_0) = \mp\infty$

flesso a tangente verticale

$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = \pm\infty$

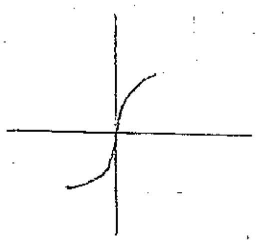
(v. anche oltre)



punto angoloso

$f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$

e una delle due finita



$y = f(x)$

$$= \begin{cases} x^{\frac{1}{3}} & x \geq 0 \\ -(-x)^{\frac{1}{3}} & x < 0 \end{cases}$$

v. anche oltre

☆ notare !

(Non scriviamo $y = x^{\frac{1}{3}} \ldots$)

★ Nota: Come tracciare il grafico

di $y = (f(x))^{\frac{1}{n}}$ n dispari ($\neq 1$)

R: possiamo convenzionalmente procedere in due modi

1°) Il dominio di f è

$$D = \{x : f(x) \geq 0\}$$

e studiamo ivi la funzione.

oppure

2° ★ interpretare la funzione data così:

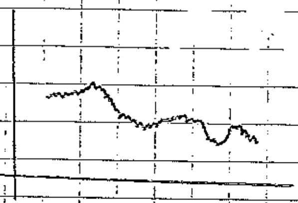
$$F(x) = \begin{cases} (f(x))^{\frac{1}{n}} & , \text{ se } f(x) \geq 0 \\ -(-f(x))^{\frac{1}{n}} & \text{ se } f(x) < 0 \end{cases}$$

In tal modo il procedimento è formalmente ineccepibile, e recuperiamo la parte di grafico di $y = (f(x))^{\frac{1}{n}}$ che si ottiene se vogliamo definirla anche per $f(x) < 0$.

$$\left(-2 = -(+8)^{\frac{1}{3}} \dots \right)$$

Osservazione

Esistono funzioni continue (in un intervallo) che non sono derivabili in nessun punto.
(Weierstrass)



[Su tali funzioni è concentrata la misura di Wiener (moto Browniano)]

Si consideri la funzione

$$f(x) = x^2 D(x) \qquad x \in \mathbb{R}$$

Dirichlet $\quad D(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

Essa risulta discontinua (e quindi non derivabile) $\forall x \neq 0$

In $x = 0$ è derivabile (e dunque continua)

Infatti posto $x = 0$ $h = x$, è $(f(0) = 0)$

$$\frac{x^2 D(x)}{x} = x D(x) \to 0$$

per $x \to 0$

Pertanto $f'(0) = 0$.

4 <u>Definizione</u> $f:(a,b)\to\mathbb{R}$

si dice <u>differenziabile</u> in x se $\exists\, A\in\mathbb{R}$ tale che

simbolo di E. Landau $\frac{o(h)}{h}\to 0$ per $h\to 0$

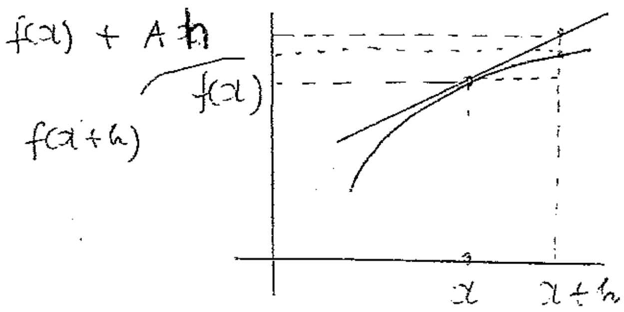
$$f(x+h)-f(x)=Ah+o(h) \quad , \text{ per } h\to 0$$

(h è tale che $x+h\in(a,b)$, e ciò è <u>definitivamente</u> vero)

<u>Se A esiste</u>, esso è necessariamente <u>unico</u> (perché? (*))

Ah (o, <u>più propriamente</u>, A visto come <u>trasformazione lineare</u> da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}\ni h\to Ah\in\mathbb{R}$)) è detto <u>differenziale</u> di f in x: esso rappresenta la <u>parte principale</u> dell'<u>incremento</u> di f (a partire da x), localmente, approssimiamo f con la retta tangente...

[geometricamente, è l'incremento dell'ordinata della retta tangente a $y=f(x)$ nel pto $(x_0, f(x_0))$, come appare chiaro dal formula seguente.



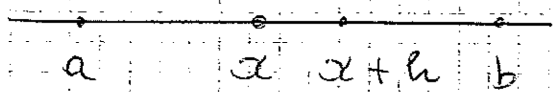
($A=f'(x)\ldots$)

(*) $(A_1-A_2)h=o(h)$ e ciò è <u>assurdo</u> con $A_2\neq A_1$

Teorema $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ è <u>derivabile</u> in $x\in(a,b)$ $\iff$ f è <u>differenziabile</u> in x, e si ha $A=f'(x)$

Dim.

$\boxed{\Rightarrow}$



Si scrive $df = f'\,dx$ (dx è finito!) (e, formalmente $f'=\dfrac{df}{dx}$)

Da $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$

si ha: $f(x+h)-f(x)-f'(x)h=o(h)$

$\Rightarrow$ f è <u>differenziabile</u> in x e $A=f'(x)$.

(Si ricordi che A, se esiste, è necessariamente unico)

$\boxed{\Leftarrow}$ $f(x+h)-f(x)-Ah=o(h)$ $\Rightarrow$

$h\neq 0$ $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}-A=\dfrac{o(h)}{h}=o(1)$

ovvero, $\exists \displaystyle\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \parallel\\ h}}\frac{\Delta f}{\Delta x}$ ed è $=A$, ossia

$\exists f'(x)$ e $f'(x)=A$

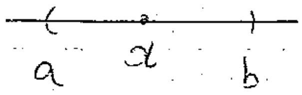
$\square$

Si definiscono le derivate successive nel modo ovvio $f^{(0)}=f$ $\quad f^{(1)}=f'$

$$f^{(n+1)}=\left(f^{(n)}\right)'$$

Regole di derivazione

Tutte le funzioni in gioco sono definite in (a, b). Sia $x \in (a, b)$



Teorema ("linearità dell'operatore di derivazione")

Se f e g sono derivabili in x, lo è anche $\alpha f + \beta g$ $\quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

e si ha $(\alpha f + \beta g)'(x) =$

$$\alpha f'(x) + \beta g'(x)$$

Dim.

$$\frac{\alpha f(x+h) + \beta g(x+h) - \alpha f(x) - \beta g(x)}{h} =$$

$$= \alpha \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \beta \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

da cui segue subito l'asserto. (Si estende alle derivate successive, se esistono...)

Teorema (derivata di un prodotto (teor. di Leibniz))

Se f e g sono der. in x, lo è anche fg

e $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Dim:

$$\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$= f(x+h)\,\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x)\,\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$\Rightarrow$ l'assunto segue in base alle ipotesi e dal fatto

☆ che f è necessariamente continua in x
(e g...)

☆ Conseguenza: se f e g sono derivabili n volte in x $(n \geq 1)$ è

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x)\, g^{(n-k)}(x)$$

(dimostrarlo per induzione!)

☆ Teorema (derivata del reciproco)

Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile in x

e sia $f(x) \neq 0$ $\quad$ ($\Rightarrow$ f è localmente non nulla)
(t. perm. del segno: f è continua in x)

Allora $\frac{1}{f}$ è derivabile in x e

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = \frac{-f'(x)}{[f(x)]^2}$$

Dim. $\frac{1}{h}\left(\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)}\right) =$

$$= \frac{1}{h} \, \frac{-\left(f(x+h) - f(x)\right)}{f(x+h)\,f(x)}$$

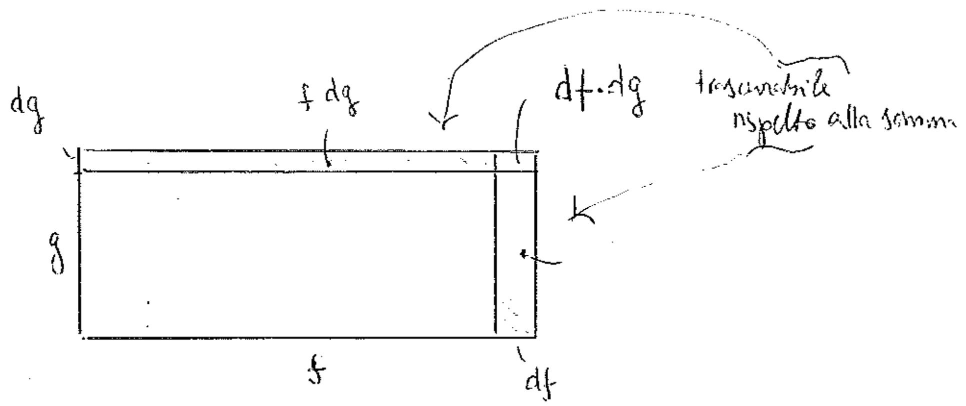
da cui si conclude...

Teorema (derivata di un quoziente) ($g(x) \neq 0$..)

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Dim: ovvia dal teorema di Leibniz e dal teorema precedente.

Commento geometrico:



$$d(fg) = df \cdot g + f\,dg$$

☆ Derivata logaritmica (Bernoulli)

$f_i(x) > 0$
$\forall x \in I$
intervallo aperto

$$\boxed{\left(\prod_{n=1}^{N} f_n(x)\right)'} =$$

$$\left(\prod_{n=1}^{N} e^{\log f_n(x)}\right)' = \left(e^{\sum_{n=1}^{N} \log f_n(x)}\right)' =$$

$$= \left(e^{\sum_{n=1}^{N} \log f_n(x)}\right) \sum_{n=1}^{N} \frac{f_n'(x)}{f_n(x)} =$$

derivata ☆
logaritmica

$$= \prod_{n=1}^{N} f_n(x) \cdot \boxed{\sum_{n=1}^{N} \left(\log f_n(x)\right)'}$$

☆ Tale formula è molto utile quando
N è "grande"...

Teorema (derivabilità dell'inversa)

Sia $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ continua e invertibile, con inversa g, e sia f derivabile in $x \in (a,b)$ con $f'(x) \neq 0$.
Allora g è derivabile in $y = f(x)$ e si ha

$$g'(y) = (f'(x))^{-1}$$

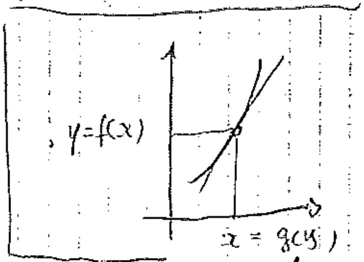
formalmente: $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

(Il risultato è intuitivamente ovvio ...)

Dim. Sia $x \in (a,b)$. Con rif. alla figura e alle notaz. impiegate nel discutere la cont. dell'inversa è

$$\frac{g(y+k) - g(y)}{k} = \frac{x+h-x}{\underbrace{f(x+h) - f(x)}_{\neq 0}}$$

$$= \frac{h}{f(x+h) - f(x)}$$



Ora se $k \to 0$ è anche $h \to 0$ (g è continua), e si conclude $\square$

[Oss: da $f'(x) > 0$ (per ex.)

si deduce .., per $|h|$ piccolo

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0 \qquad (\text{fr. perm. segno})$$

se $h \gtrless 0 \Rightarrow f(x+h) \gtrless f(x)$ monotonia locale]

(cf. con la monotonia di una f, continua e invertibile..)

⇝ <u>Osservazione</u>

Tale formula è cruciale

se , data $y = f(x)$,

risulta <u>impossibile</u> (o <u>complicato</u>)

determinare esplicitamente $x = g(y)$!

es. $y = \overset{f(x)}{\overbrace{x + \sin x}}$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Tale funzione è strettamente monotona

in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $\quad \left(y' = 1 + \cos x > 0 \right)$

vedi oltre ..

e dunque ⇝ <u>ma è anche ovvio direttamente</u> ...

invertibile; <u>g non è determinabile in modo esplicito</u>

Calcoliamo $A = g'\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

si ha: $\frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} = f\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Teorema di derivazione di una funzione composta

Siano $f:(a,b) \to \mathbb{R}$, $g:(c,d) \to \mathbb{R}$
e $f((a,b)) \subseteq (c,d)$

Se f è derivabile in x e g è der. in $f(x)$,
allora $g \circ f$ è derivabile in x e si ha

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))\, f'(x)$$

Dim. Osserviamo che se f è invertibile in un intorno di x, la dim. è immediata:

$$\frac{(g\circ f)(x+h) - (g \circ f)(x)}{h} =$$

$$= \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} =$$

$$= \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{\underset{(\neq 0)}{f(x+h) - f(x)}} \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

e, per $h \to 0$ il limite di esiste e vale $g'(f(x))\, f'(x)$

In generale, utilizziamo il concetto di differenziale: sia $y = f(x)$

$$(*) \quad g(y+k) - g(y) = g'(y)\,k + \overbrace{k\,\varepsilon(k)}^{o(k)}$$

osserviamo che $\varepsilon(k) \to 0$ se $k \to 0$

$(\ \varepsilon(k) = o(1)\ )$

Sia ora $k = f(x+h) - f(x)$

se $h \to 0$ è $k \to 0$ e ☆ $\dfrac{k}{h} \to f'(x)$

$\Rightarrow \left(h \to 0 \Rightarrow \varepsilon(k) \to 0 \right)$

Dividendo (*) per $h\ (\neq 0)$ è

$$\frac{\overbrace{g(y+k) - g(y)}^{g(f(x+h)) - g(f(x))}}{h} = g'(y)\frac{k}{h} + \frac{k}{h}\cdot\varepsilon(k)$$

$\Rightarrow$ l'asserto, per $h \to 0$. $\square$

☆☆ Commento: formalmente si ha

$$\frac{d(g \circ f)}{dx} = \frac{dg}{df}\,\frac{df}{dx}$$

(oppure, se $z = g(y)$ $\quad y = f(x)$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx}\ )$$

Commento

Per ragioni che saranno completamente chiare nel corso di Analisi II, il concetto di differenziale è più "fondamentale" del concetto di derivata

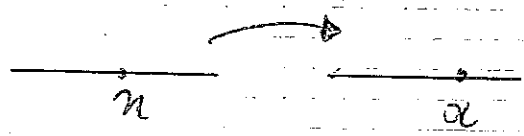
(è un oggetto intrinseco, al contrario di questa)
(Differenziale secondo Fréchet)

Osserviamo per ora, che il differenziale "è invariante per trasformazioni di coordinate" $\Rightarrow$ ha significato geometrico
(si parla anche di invarianza di forma)

Sia $df = f' dx$ $\qquad ' = \frac{d}{dx}$

se $x = x(u)$ (riparametrizzazione, o trasf. di coordinate)

posto $F(u) := f(x(u))$
$(F = f \circ x)$ si ha



$$dF = F' du = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dx}{du} du = df$$

$' = \frac{d}{du}$

(formalmente $\frac{dF}{du} = \frac{df}{dx} \frac{dx}{du}$)

$$\boxed{dF = df}$$

(dF è calcolato in u, df in x ...)

[[in generale cf. la differenza tra matrice di un endomorfismo e l'endomorfismo stesso ...]]

1 Derivate delle funzioni elementari

• $y = x^n \qquad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{x+h-x}{h} \cdot \left[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2} \cdot x + \dots x^{n-1}\right] =$$

$$= [\quad] \to n x^{n-1} \quad \text{per } h \to 0$$

(anche per induzione a partire dal teor del prodotto ...)

$$y' = n x^{n-1}$$

• $y = x^{\frac{1}{n}} \qquad x > 0, \quad n > 0$

è l'inversa di $y = x^n$

$$x = y^{\frac{1}{n}} = g(y)$$

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{n x^{n-1}} =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \left(y^{\frac{1}{n}}\right)^{-n+1} = \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$

rapidamente:

$$y = x^n$$

$$\frac{dy}{dx} = n x^{n-1}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{n x^{n-1}}$$

$$\parallel$$

$$\frac{1}{n}\left(y^{\frac{1}{n}}\right)^{-n+1}$$

$$= \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$

[Otterremo, tra poco per $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ che la der. di $y = x^\alpha$ è

$$y' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$]

- $y = \sin x \qquad x \in \mathbb{R}$

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h}$$

$$= \sin x \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{\downarrow \, 0} + \cos x \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\downarrow \, 1} \to \cos x$$

Ricordiamo:

$$\frac{\cos h - 1}{h} = \frac{\cos^2 h - 1}{h(1+\cos h)} = \underbrace{\left(-\frac{\sin^2 h}{h}\right)}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\cos h}}_{\to \frac{1}{2}}$$

$$y' = \cos x$$

Analogamente, se $y = \cos x$, risulta $y' = -\sin x$

[nell'approccio tramite la teoria delle serie di potenze si deriva termine a termine]

- $y = e^x$

$$\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \underbrace{\frac{(e^h - 1)}{h}}_{\downarrow \, 1} \qquad \square$$

[Calcoliamo

$$(*) = \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} \qquad (R: 1)$$

Intanto si ha (poniamo $h \to 0^+$)

$$\frac{e^h - 1}{h} \geq \frac{\left(1+\frac{h}{n}\right)^n - 1}{h} \geq \frac{n\frac{h}{n}}{h} = 1$$

Inoltre è

$$\frac{\left(1+\frac{h}{n}\right)^n - 1}{h} \leq \frac{\frac{h}{n}\cdot n \cdot \left(1+\frac{h}{n}\right)^{n-1}}{h}$$

$$= \left(1+\frac{h}{n}\right)^{n-1} \leq \left(1+\frac{h}{n}\right)^n$$

$\Rightarrow$ (se $n \to \infty$)

$$1 \leq \frac{e^h - 1}{h} \leq e^h$$

$\Rightarrow$ se $h \to 0^+$ è $(*) = 1$

Analogo discorso per $h \to 0^-$

$$\Rightarrow \quad y' = e^x$$

[Tale metodo è istruttivo ma lungo]

Altro metodo

Da $\lim_{\xi \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{\xi}\right)^{\xi} = e$

Si ha:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \log\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)$$

$$= 1 \qquad \left[\text{si pone } x = \frac{1}{\xi}\ ;\ \log \text{ è continua}\right]$$

si procede per $x \to 0^+$ e poi per $x \to 0^-$

e, successivamente

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{x} - 1}{\log e^{x}} = \left(\text{posto } e^{x} = t\right)$$

$$= \lim_{t \to 1} \frac{t - 1}{\log t} = \lim_{s \to 0} \frac{s}{\log(1+s)} = 1$$

Derivata di $y = x^{\alpha}$ $\quad x > 0 \quad \alpha \in \mathbb{R}$

$$f(x) = x^{\alpha} = e^{\alpha \log x} \Rightarrow f'(x) = \alpha\, e^{\alpha \log x} \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= \alpha\, x^{\alpha} \cdot \frac{1}{x} = \alpha\, x^{\alpha - 1}$$

vedi derivata di log pagina successiva

• $y = \log x \qquad x > 0$

metodo rapido

$x = e^y$

$\frac{dx}{dy} = e^y$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$

inversa di exp

$x = \log y = g(y)$

$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$

$\Rightarrow \quad y' = \frac{1}{x} \qquad x > 0$

• $y = \arcsin x \qquad x \in [-1, 1]$

$\sin' x = \cos x \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad x \in (-1, 1)$

$x = \sin y$

$\frac{dx}{dy} = \cos y$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

• $y = \arccos x \qquad x \in [-1, 1]$

$\cos' x = -\sin x \Rightarrow \quad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad x \in (-1, 1)$

(si ricordi $\sin^2 \xi + \cos^2 \xi = 1$ ...)

• $y = \operatorname{tg} x \qquad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$

• $y = \operatorname{arctg} x$

$y' = \frac{1}{1+x^2}$

$x = \operatorname{tg} y$

$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y \Rightarrow dy/dx = \frac{1}{1+x^2}$

(Ricordare $\cos^2 \xi = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 \xi}$ ...)

• $y = \operatorname{sh} x$

$y' = \operatorname{ch} x$

$y = \operatorname{ch} x$

$y' = \operatorname{sh} x$ ...

Variante

da $(f \circ f^{-1})(x) = x$

si trova $(f \circ f^{-1})'(x) = 1$ der. funzioni composte.

$\Rightarrow f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x) = 1$

$(f^{-1})'(x) = f'(f^{-1}(x))$ $' = \frac{d}{dx}$

Esempi concreti

- da $e^{\log x} = x$ si ha, derivando $x > 0$

$e^{\log x} \log' x = 1 \Rightarrow x \log' x = 1$

$\log' x = \frac{1}{x}$

- $y = \arcsin x$

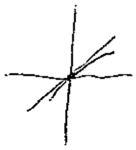
$\sin(y(x)) = x$

$\cos y \cdot y' = 1$ $y'(x) = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

★ Calcolo alternativo di alcune derivate di

Qualche esercizio

$$y = \arcsin x \quad \text{in } x = 0$$
$$\equiv y(x).$$



Da $\sin(y(x)) = x$ in un intorno di 0

troviamo, successivamente.

$\sin(y(x)) - x = 0$ $\quad\boxed{y(0) = 0}$

$\cos(y(x))\cdot y'(x) - 1 = 0$ $\quad 1\cdot y'(0) - 1 = 0$ $\quad\boxed{y'(0) = 1}$ chiaro!

$-\sin y \cdot y'^2 + \cos y \cdot y'' = 0$ $\quad\boxed{y''(0) = 0}$

$$-\cos y \cdot \underbrace{y' \cdot y'^2}_{y'^3} - \sin y \cdot 2y' \cdot y'' - \sin y\, y' y'' + \cos y\, y''' = 0$$

$-1 \cdot 1^3 + y'''(0) = 0$ $\quad\boxed{y'''(0) = 1}$

[Nota: abbiamo calcolato il polinomio di Mc Laurin di ordine 3
come vedremo in seguito $\quad \arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$]

Ovviamente $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ etc.

il metodo è comunque istruttivo poiché le derivate di sin etc sono semplici, e le derivate di y sono calcolate iterativamente. È facile generalizzare...

* Retta tangente all'ellisse

$$2x^2+y^2=1 \quad \text{in} \quad P: \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

(controllo: $2\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$)

1° metodo : diretto

$$y=+\sqrt{1-2x^2} \quad \text{ecc...}$$

2° metodo (di valenza generale, specie quando è difficile esplicitare) Posto $y=y(x)$

Da $2x^2+y^2(x)\equiv 1$ si ha, der. rispetto ad x

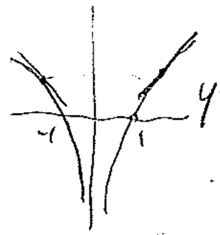
$$\cancel{4}^{2}x+\cancel{2}yy'=0$$

$$\Rightarrow \quad y'(x)=-\frac{2x}{y(x)} \quad \text{se } y(x)\neq 0$$

$$\Rightarrow \quad y'\left(\tfrac{1}{2}\right)=-\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=-\sqrt{2}$$

Controlliamo col metodo diretto: $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{1-2x^2}}(-2\cdot 2x)$

$$=\frac{-\cancel{4}^{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-2x^2}} \quad \text{se } x=\tfrac{1}{2} \text{ è } y'\left(\tfrac{1}{2}\right)=\frac{-2\,\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}}}=-\sqrt{2}.$$



$f(x) \rightsquigarrow y = \log|x| \quad x \neq 0$

$f'(x) = \frac{1}{x}$

$$y = x^x \qquad x > 0$$
$$= e^{x \log x}$$

$$y' = e^{x\log x}\,(x\log x)' = e^{x\log x}\left(\log x + x\cdot\frac{1}{x}\right)$$
$$= e^{x\log x}(1+\log x) \qquad \left(= x^x(1+\log x)\right)$$

$$y = \sin\left(\log\left(\log\left(e^{x^2}\right)\right)\right) = \sin(\log x^2)$$
$$= \sin(2\log x) \quad (x > 0)^{*}$$

$$y' = \cos(2\log x)\cdot 2\cdot\frac{1}{x}$$
$$= \frac{2}{x}\cos(2\log x)$$

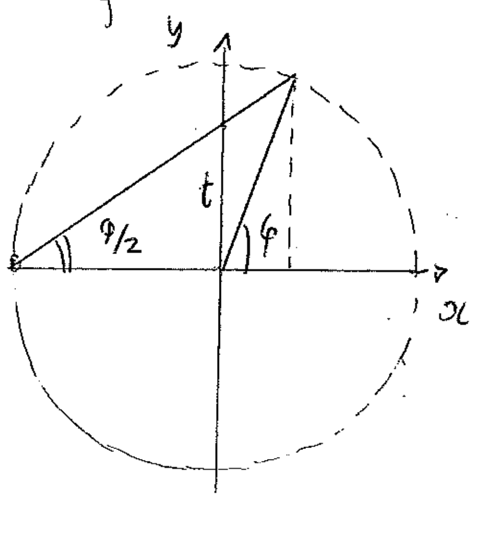
* la funzione è simmetrica rispetto all'asse y: in gen. è $y' = \frac{2}{x}\cos 2\log|x|$

$$y = \sin(2\arctan x)$$

$$\sin(\underbrace{2\arctan x}_{\varphi}) = \frac{2x}{1+x^2}$$

dimostrazione

$$\sin\varphi = \frac{2t}{1+t^2}$$
$$\cos\varphi = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$t = \tan\frac{\varphi}{2}$$
$$\frac{\varphi}{2} = \arctan t$$
$$\varphi = 2\arctan t$$



$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y = t(x+1) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \cos\varphi \\ y = \sin\varphi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad t^2(x+1)^2 + x^2 = 1$$

$$(1+t^2)x^2 + 2t^2 x - 1 = 0$$

ora, $x=-1$ è radice, e

se $ax^2+bx+c=0$ $\qquad x_1+x_2 = -\frac{b}{a}$, $\quad x_1x_2 = \frac{c}{a}$

$$\Rightarrow \quad -\frac{2t^2}{1+t^2} = -1 + \cos\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \cos\varphi = 1 - \frac{2t^2}{1+t^2} = \frac{1+t^2-2t^2}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$y = \sin\varphi = t\left(1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) = t\,\frac{1+t^2+1-t^2}{1+t^2} = \frac{2t}{1+t^2}$$

riprendiamo: $\quad y = \frac{2x}{1+x^2} \qquad y' = \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} =$

$$= \frac{2+2x^2-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

Si consideri $f = f(x)$ $x \in D$

Si ha, per $x \in D$, $f(x) \neq 0$

$$|f|'(x) = f'(x) \operatorname{sgn} f(x)$$

$$\left(\operatorname{sgn}(x) = \frac{x}{|x|} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} +1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \right)$$