

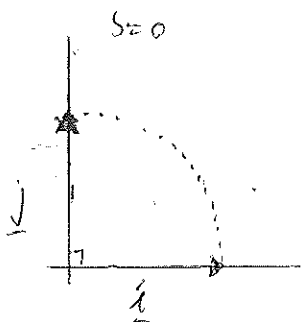
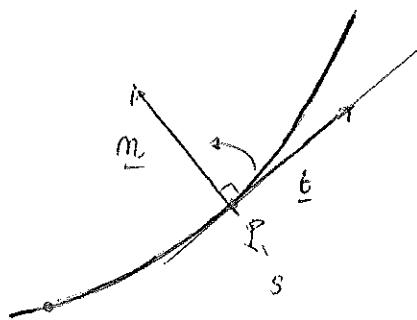
◇ Geometria differenziale delle curve piane

Sia $\mathcal{C} : \underline{r} = \underline{r}(s)$

curva piana, semplice, liscia
regolare, parametrizzata dall'
arcuata curvilinea

(si ricordi $\|\underline{r}'\| = 1$:
velocità unitaria)

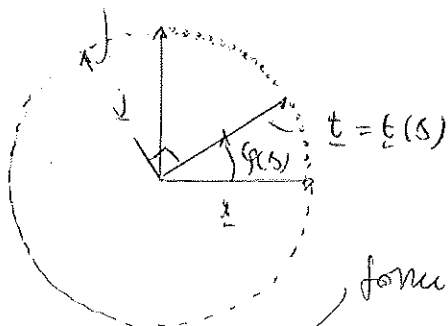
$\mathcal{C}$



Sia $\underline{n}$ (vettore normale in un
dato pto della curva) scelto in modo
che $(\underline{i}, \underline{j})$ e $(\underline{t}, \underline{n})$ siano
equiorientate (i.e. la matrice
del cambiamento di base sia
ortogonale speciale ($\det = +1$))

$$\begin{pmatrix} \underline{t} & \underline{n} \\ \cos \varphi(s) & -\sin \varphi(s) \\ \sin \varphi(s) & \cos \varphi(s) \end{pmatrix}$$

$\underline{n} = \underline{n}(s)$



$$\underline{t}(s) = \begin{pmatrix} \cos \varphi(s) \\ \sin \varphi(s) \end{pmatrix} = \cos \varphi(s) \underline{i} + \sin \varphi(s) \underline{j}$$

$$\underline{n}(s) = \begin{pmatrix} -\sin \varphi(s) \\ \cos \varphi(s) \end{pmatrix}$$

formalismo "misto"

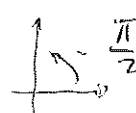
$$\underline{t}(s) = e^{i\varphi(s)} \underline{i}$$

$$\underline{t}(s) = e^{i\varphi(s)} \begin{pmatrix} \cos \varphi(s) + i \sin \varphi(s) \end{pmatrix}$$

$$\underline{n}(s) = i e^{i\varphi(s)} \underline{i}$$

$$\underline{n}(s) = i e^{i\varphi(s)} \underline{i}$$

i :

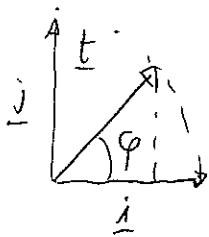


rotazione di $\frac{\pi}{2}$ in
senso antiorario

Oppure :

$$\underline{t}(s) = (\cos \varphi(s), \sin \varphi(s)) \\ (= \cos \varphi(s) \underline{i} + \sin \varphi(s) \underline{j})$$

$$\begin{aligned} \underline{t}' &= -\varphi' \cos \varphi \underline{i} + \varphi' \sin \varphi \\ &= \varphi' \underbrace{(-\cos \varphi \underline{i} + \sin \varphi \underline{j})}_{\underline{n}} \end{aligned}$$



$$V - 1'$$

Definiamo la curvatura (con segno) di $\mathcal{C}$
(o di P , di asse curva s)

$$\text{consideriamo } \underline{r}'' = \underline{t}' = \frac{d\underline{t}}{ds} \quad \left(\begin{array}{l} \text{"accelerazione"} \\ (s \equiv \text{"tempo"}) \\ \text{velocità scalare} \\ \text{unitaria } \|\underline{t}\| = 1 \end{array} \right)$$

si ha $\langle \underline{t}', \underline{t} \rangle = 0$

(infatti da $\langle \underline{t}, \underline{t} \rangle = 1$ i $\langle \underline{t}, \underline{t} \rangle' = 0$

ossia $\langle \underline{t}', \underline{t} \rangle + \langle \underline{t}, \underline{t}' \rangle = 2\langle \underline{t}', \underline{t} \rangle = 0$)

però $\underline{t}' = R \underline{n}$, $R \in \mathbb{R}$

R è detta curvatura (con segno) di $\mathcal{C}$ o di P .

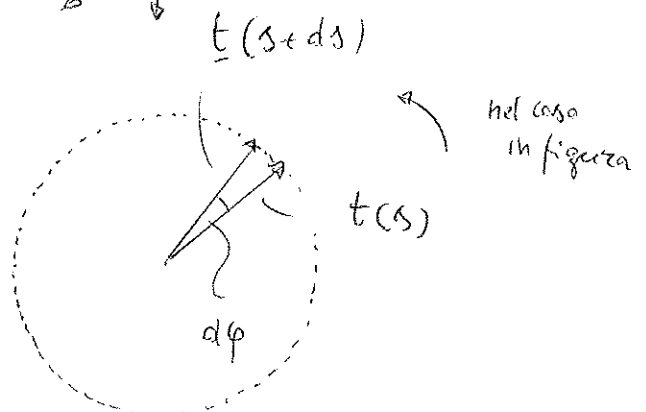
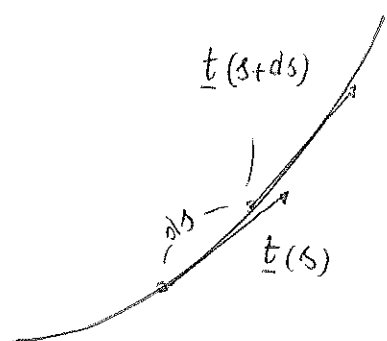
In particolare $|R| = \|\underline{r}''\|$

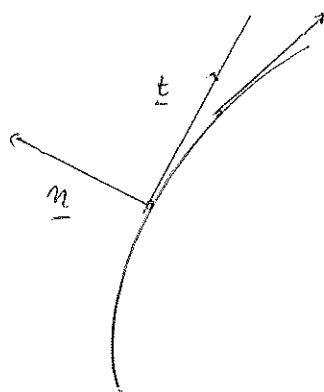
Osserviamo ora che da $\underline{t} = e^{i\varphi} \underline{i}$, si ha pure

$$\underline{t}' = i\varphi' e^{i\varphi} \underline{i} + \underbrace{e^{i\varphi}}_{=0} \underline{i}' = \varphi' \underbrace{i e^{i\varphi(s)}}_{\underline{n}} \underline{i}$$

Si che $R = \frac{d\varphi}{ds} \quad (R = \varphi')$
 R : "velocità angolare"
rispetto a s

di chiara interpretazione geometrica





In questo caso $R < 0$

Casi particolari importanti:

$$R \equiv 0$$

★ rette

Si ha $\underline{t}' = 0 \Rightarrow \underline{t} = \underline{t}_0$, costante (su un intervallo)

$$\begin{aligned} \underline{r}(s) - \underline{r}(0) &= \int_0^s \underline{t}(\xi) d\xi = \int_0^s \underline{t}_0 d\xi = \\ &= s \underline{t}_0 \end{aligned}$$

ovvero $\underline{r} = \underline{r}(s) = \underbrace{\underline{r}(0)}_{\underline{P}_0} + s \underline{t}_0 \Rightarrow$ retta

passante per $\underline{P}_0 = \underline{r}(0)$ e direzione $\underline{t}_0$ (o meglio $\langle \underline{t}_0 \rangle$)

↑
s.s.p. vettoriale
generato da $\underline{t}_0$

Inversamente, per una retta è
sufficiente visto che $R \equiv 0$

$$\underline{r}(s) = \underline{a} + s \underline{b} \Rightarrow \underline{t}(s) \equiv \underline{b} \Rightarrow \underline{t}'(s) \equiv 0$$

$\|\underline{b}\|=1$ (s è automaticamente la lunghezza d'arco)

★ circonferenze

$$R \equiv R_0 > 0 \text{ costante}$$

Da $\varphi' = R_0$ si subito

$$\varphi(s) = \varphi(0) + R_0 \cdot s \quad \text{poniamo per semplicità } \varphi(0) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{t}(s) = e^{i R_0 s} \underline{i} \quad (= \cos(R_0 s) \underline{i} + \sin(R_0 s) \underline{j})$$

$$\underline{r}(s) = \underline{r}(0) + \int_0^s \underline{t}(\xi) d\xi = \underline{r}(0) + \left(\int_0^s e^{i R_0 \xi} d\xi \right) \underline{i}$$

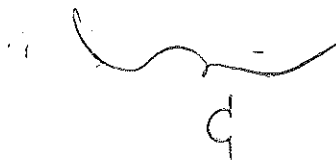
$$= \underline{r}(0) + \frac{e^{i R_0 s}}{i R_0} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \underline{i}$$

$$= \underline{r}(0) + \frac{e^{i R_0 s} - 1}{i R_0} \underline{i}$$

$\underline{r}_0 = x_0 \underline{i} + y_0 \underline{j}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} \underline{i} &= -i \underline{i} \\ &= -\underline{j} \\ i(-\underline{j}) &= -i \underline{j} \\ &= \underline{i} \end{aligned}$$

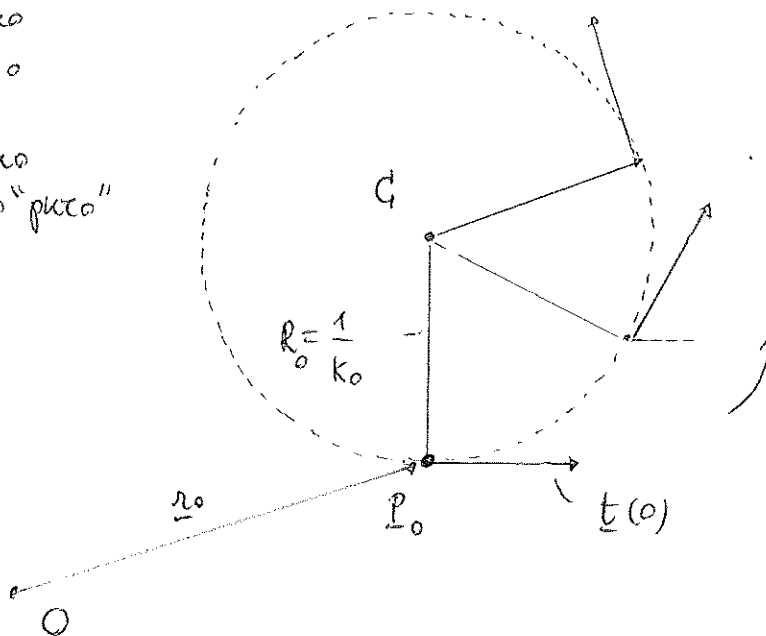
$$= \underline{r}_0 + \frac{1}{R_0} \underline{j} + \frac{1}{R_0} e^{i R_0 s} (-\underline{j})$$



$$s=0$$

$$\underline{t}(0) = \underline{i}$$

4) Questo tipo di
calcoli col
formale suo
vettoriale o
col
formale suo
complesso "può"



circonferenza
di centro C
e raggio $R_0 = \frac{1}{k_0}$

(passante per P_0)

via via

$$\text{Sia } \underline{r} = \underline{r}_0 + R e^{i\phi} \underline{i}$$

$$1 = \frac{d}{d\phi} \quad \underline{r}' = i R e^{i\phi} \underline{i}$$

$$\|\underline{r}'\| = R$$

$$ds = R d\phi$$

possiamo $\phi = R\psi$

porre $\underline{r} = \underline{r}(\psi) = \underline{r}_0 + R e^{i \frac{\psi}{R}} \underline{i}$

$$\frac{d\underline{r}}{d\psi} = R \cdot \frac{i}{R} e^{i \frac{\psi}{R}} \underline{i}$$

fare una figura...

$$\frac{d\underline{r}}{ds} = i e^{i \frac{s}{R}} \underline{i}$$

$$\frac{d^2 \underline{r}}{ds^2} = (-1) \frac{1}{R} e^{i \frac{s}{R}} \underline{i} = \frac{1}{R} \underbrace{(e^{i \frac{s}{R}} (-i))}_{\underline{n}}$$

Analogo discorso per $R_0 < 0$ (Cambia l'orientamento...)

variante riprendiamo da $\underline{t}' = R_0 \underline{n}$ $R_0 > 0$

$$\underline{n} = i \underline{t} \Rightarrow \underline{t}' = i R_0 \underline{t}$$

$$\Rightarrow \underline{t}(s) = e^{i R_0 s} \underline{t}(0) \quad \underline{t}(0) = \underline{t}_0$$

$$\begin{aligned} \underline{n}(s) &= \underline{n}(0) + \int_0^s [e^{i R_0 \xi} \underline{t}(0)] d\xi \\ &= \underline{n}(0) + \frac{e^{i R_0 s} - 1}{i R_0} \underline{t}(0) = \text{etc...} \end{aligned}$$

ancora una variante

poniamo $\underline{t} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{n} = \begin{pmatrix} -\eta \\ \xi \end{pmatrix} \quad \xi^2 + \eta^2 = 1$

Si ha:
$$\begin{cases} \xi' = -R_0 \eta \\ \eta' = +R_0 \xi \end{cases}$$

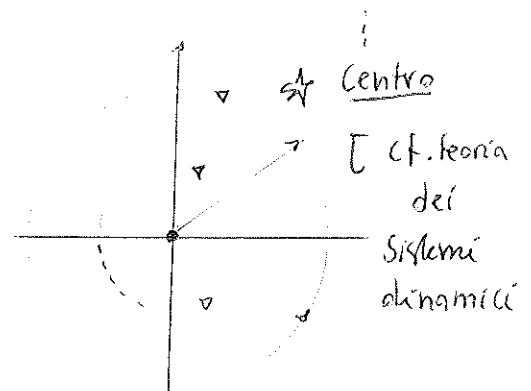
$$\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -R_0 \\ R_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

$$\xi'' = -R_0 \eta' = -R_0^2 \xi$$

$$\xi'' + R_0^2 \xi = 0 \quad \star \text{ oscillatore armonico}$$

R_0 vel. angolare

si prosegue...



* cerchio osculatore

Sia dato $P \in \mathcal{C}$, di ammissa curvatura δ (calcolata a partire da un dato pto iniziale)

La circonferenza di raggio $|c_g(s)| = |k(s)|^{-1}$ ($k \neq 0$)

e di centro $C = P + \underline{c}_g \underline{n}$, $c_g = k^{-1}$

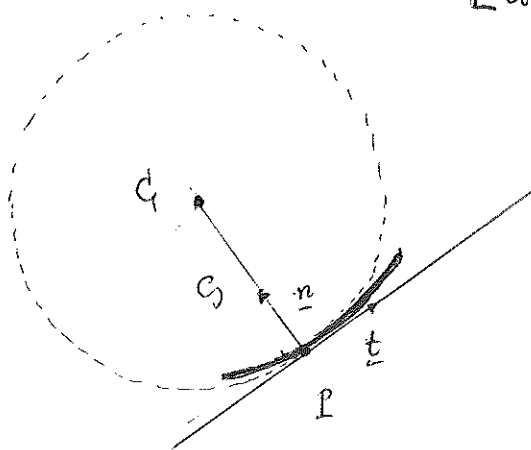
è detta circonferenza osculatrice, o cerchio osculatore

[da osculum = bacio, in latino] alla curva $\mathcal{C}$ in P

C è detto centro di curvatura, c_g raggio di curvatura

[che è abuso di linguaggio] (in P)

qui $k > 0$



Si noti che in generale
il cerchio osculatore
attraversa la curva

(contatto tripunto)

cf $y = x^3$

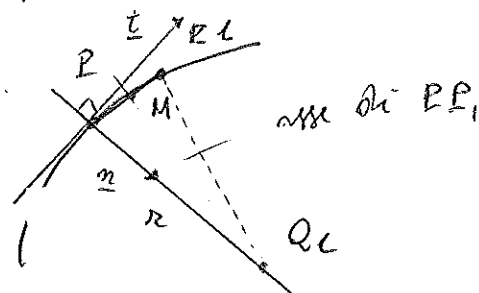
ed

Per una retta $k \equiv 0 \Rightarrow c_g = \infty$

(il cerchio osculatore può pensarsi come la retta stessa)

Per una circonferenza coincide con la circonferenza stessa

* Il cerchio osculatore può vedersi come limite dei cerchi tangenti a C in P e passanti per un altro pto della curva, al tendere di quest'ultimo a P .



$$P - M = \frac{1}{2}(P - P_1)$$

(con riferimento alla figura ti ha:

$$Q_1 = P + r \underline{n} \quad \langle Q_1 - M, P_1 - P \rangle = 0$$

$$\begin{aligned} \text{ma} \quad Q_1 - M &= \underbrace{Q_1 - P}_{\parallel \underline{n}} + \underbrace{P - M}_{\frac{1}{2}(P - P_1)} \\ &= r \underline{n} + \frac{1}{2}(P - P_1) = r \underline{n} - \frac{1}{2}(P_1 - P) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \langle r \underline{n}, P_1 - P \rangle = \frac{1}{2} \|P_1 - P\|^2 \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \text{ma} \quad P_1 - P &= \Delta s \underline{t} + \frac{\Delta s^2}{2} \underbrace{\frac{\underline{n}}{\rho}}_{\underline{t}'} + o(\Delta s^2) \quad \text{Taylor} \\ &\quad \text{(rispetto all'ascissa curvilinea)} \end{aligned}$$

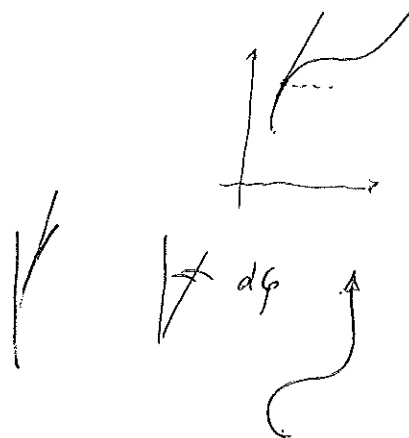
$$\Rightarrow \|P_1 - P\|^2 = \Delta s^2 + \dots$$

$$\Rightarrow (*) \text{ diventa } \frac{r}{\rho} \frac{\Delta s^2}{2} = \frac{\Delta s^2}{2} + \dots$$

$$\Rightarrow \text{per } \Delta s \rightarrow 0, \quad \frac{r}{\rho} \rightarrow 1 \quad \square$$

$$x \quad y = y(x) \quad \leadsto \begin{cases} x = x \\ y = y(x) \end{cases}$$

$$R = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

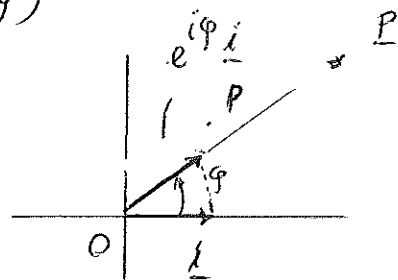


ricambiabile anche direttamente:

$$R = \frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{ds} = \frac{d \arctan y'(x)}{dx} \frac{dx}{ds} = \frac{y''(x)}{1 + y'(x)^2} \cdot \frac{1}{(1 + y'(x)^2)^{1/2}} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

in coordinate polari: $\rho = \rho(\varphi)$

$$\underline{r} = 0 + \rho e^{i\varphi} \underline{i}$$



$$\begin{aligned} \dot{\underline{r}} &= \dot{\rho} e^{i\varphi} \underline{i} + i \rho e^{i\varphi} \underline{i} \\ &= e^{i\varphi} (\dot{\rho} \underline{i} + \rho \dot{\underline{i}}) \end{aligned}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{d}{d\varphi}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\underline{r}} &= i e^{i\varphi} (\dot{\rho} \underline{i} + \rho \dot{\underline{i}}) + e^{i\varphi} (\ddot{\rho} \underline{i} + \dot{\rho} \dot{\underline{i}}) \\ &= e^{i\varphi} [\dot{\rho} \dot{\underline{i}} - \rho \underline{i} + \ddot{\rho} \underline{i} + \dot{\rho} \dot{\underline{i}}] \\ &= e^{i\varphi} [(\ddot{\rho} - \rho) \underline{i} + 2\dot{\rho} \dot{\underline{i}}] \end{aligned}$$

$$|\dot{\underline{r}}|^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \quad (\text{già visto...})$$

$$\langle i \dot{P}, \ddot{P} \rangle = \langle e^{i\phi} [\dot{P} j - P \dot{i}],$$

$$e^{i\phi} [(\ddot{P} - P) i + 2 \dot{P} j] \rangle$$

$$= -P(\ddot{P} - P) + 2\dot{P}^2 =$$

$$= P^2 + 2\dot{P}^2 - P\ddot{P}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{G} = R = \frac{P^2 + 2\dot{P}^2 - P\ddot{P}}{(P^2 + \dot{P}^2)^{3/2}} \quad * = \frac{d}{d\phi}$$

flessi generici $\therefore R = 0$



Nota: da $R(x) = \frac{y''(x)}{(1 + y'^2(x))^{3/2}}$

vediamo come R sia legata alla convessità di $y = y(x)$.

In particolare, se x è critico ($y'(x) = 0$), il test della derivata seconda è di fatto un calcolo di curvatura.

★ Formule generali (nel piano)

$$\bullet = \frac{d}{dt}$$

$$/ = \frac{d}{ds}$$

$$\underline{\dot{p}} = v \underline{t}$$

↑
velocità
(scalare)

$$\frac{d\underline{d}}{dt} = \frac{d\underline{d}}{ds} \frac{ds}{dt}$$

$$\underline{t} \quad \underline{v} = \|\underline{\dot{d}}\|$$

$$\|\underline{t}\| = 1$$

$$\underline{\ddot{p}} = \dot{v} \underline{t} + v \underline{\dot{t}}$$

$$\frac{d\underline{t}}{dt} = \frac{d\underline{t}}{ds} \frac{ds}{dt}$$

accelerazione

$$= \dot{v} \underline{t} + R v^2 \underline{n}$$

$$= v \underline{t}' = v \cdot R \underline{n}$$

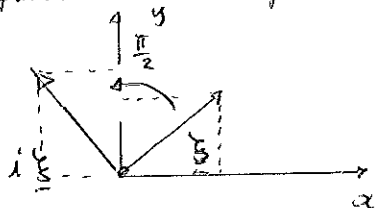
$$= \dot{v} \underline{t} + \frac{v^2}{\rho} \underline{n}$$

accelerazione
tangenziale

accelerazione
centripeta

$$\dot{\underline{p}} = v \cdot \dot{\underline{t}} = v \underline{n}$$

formalismo complesso



$$\langle \dot{\underline{p}}, \underline{\ddot{p}} \rangle = \frac{v^3}{\rho}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho} = R =$$

$$\frac{\langle \dot{\underline{p}}, \underline{\ddot{p}} \rangle}{|\dot{\underline{p}}|^3}$$

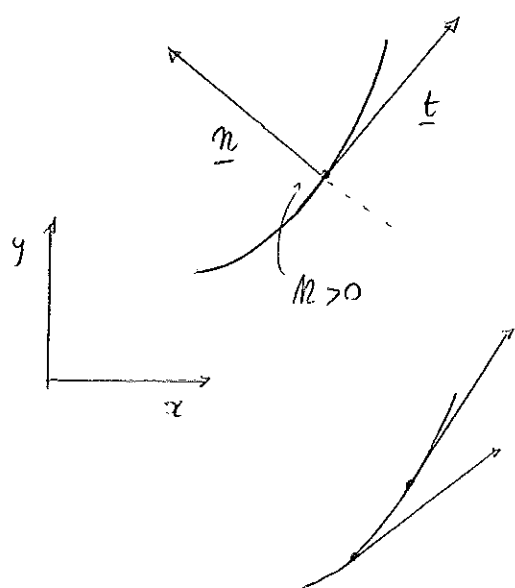
$\begin{pmatrix} -\dot{y} \\ \dot{x} \end{pmatrix}$
 $\sim \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -\dot{y}_2 \\ \dot{x}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}$$

$$\|\underline{\dot{d}}\| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

$$R = \frac{1}{\rho} = \frac{\dot{x} \ddot{y} - \ddot{x} \dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$$

◇ Ricostruzione di una curva piana a partire dalla
sua curvatura (con segno) (parametro: s) a meno di un movimento rigido



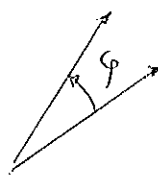
$$(*) \quad \underline{t}' = k \underline{n}$$

$(\underline{t}, \underline{n})$

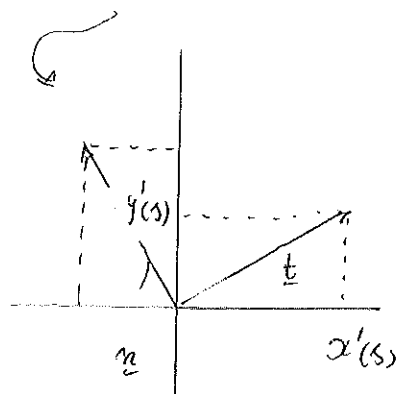
equiorientata
con

$$k = \frac{d\varphi}{ds} (= \varphi') \quad (i, j)$$

teorema fondamentale
per le curve
piane



Se $\underline{t} = (x', y')$, $x'^2 + y'^2 = 1$, $\underline{n} = (-y', x')$



(*) deriva (disponendo le componenti dei vettori in colonna...)

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\underline{t}' = k \underline{n}$$

posto $\underline{\xi} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underline{t}$ $\parallel$ $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$

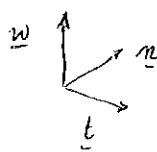
$$\begin{cases} \xi' = -k \eta \\ \eta' = k \xi \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

4 velocità angolare

f. lezione III
e v. anche altre,
formule di Frenet

$$\underline{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} = k \underline{n}$$



Ora: $\underline{t} = (\cos \varphi(s), \sin \varphi(s)) \quad (= e^{i\varphi(s)})$

$$\underline{d}(s) = \underline{d}(s_0) + \int_{s_0}^s \underline{t}(u) du \quad ; \quad \underline{ma} \quad \underline{\varphi' = R} \quad \underline{e}$$

$$\varphi(s) = \varphi_0 + \int_{s_0}^s R(u) du$$

poniamo, per semplicità, $\varphi_0 = 0$, $\underline{d}(s_0) = \underline{0}$, $s_0 = 0$

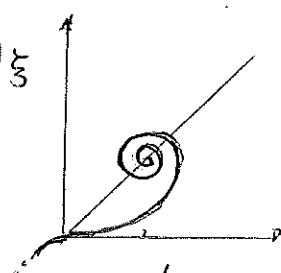
[ciò si può ottenere tramite un movimento rigido]

$$\begin{aligned} \underline{d}(s) &= \int_0^s \underline{t}(u) du \\ \varphi(s) &= \int_0^s R(u) du \end{aligned} \quad \left\| \begin{array}{l} \star \text{ Dunque, la conoscenza di} \\ \text{ricostruire la curva} \\ \text{a partire dalla sua curvatura} \\ \text{a meno di un movimento rigido in} \\ \text{modo esplicito} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \underline{d}(s) = \left(\int_0^s \cos \left(\int_0^\xi R(u) du \right) d\xi, \int_0^s \sin \left(\int_0^\xi R(u) du \right) d\xi \right)$$

$$= \int_0^s \left[e^{i \int_0^\xi R(u) du} \right] d\xi$$

$\star$ formalismo complesso



Esempio: $R(s) = 1 \Rightarrow$ si ottiene la clotoid

(spirale di Cornu) $\varphi(s) = \int_0^s u du = \frac{s^2}{2}$

$$\underline{d}(s) = \left(\int_0^s \cos \frac{\xi^2}{2} d\xi, \int_0^s \sin \frac{\xi^2}{2} d\xi \right) = \int_0^s e^{i \frac{\xi^2}{2}} d\xi$$

l'ora $\underline{d}(s) = \int_0^{+\infty} e^{i \frac{\xi^2}{2}} d\xi$
 $s \rightarrow +\infty$

risultato, frutto (integrali
di Fresnel)

$$\int_0^\infty \cos(t^2) dt = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

$\star$ si noti che i due integrali non convergono
assolutamente

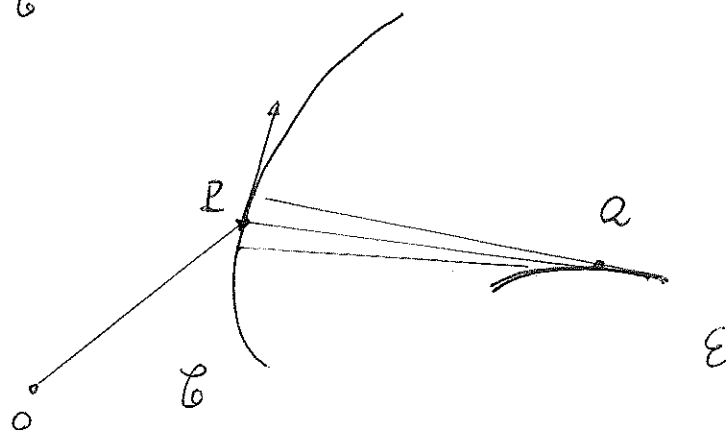
$\star$ si dimostra
 tramite
 l'analisi
 complessa

$\star$ utile nella progettazione di raccordi stradali,
 in ottica (teoria della diffrazione)

* Evoluta di una curva: luogo dei centri di curvatura
(centri dei cerchi osculatori nei vari pt della curva)

$\mathcal{E}$ evoluta di $\mathcal{C}$

$\mathcal{C}$ evolvente
di $\mathcal{E}$



Impieghiamo la notazione "clavin": $P = P(t) \equiv \vec{OP}$ etc.

$$\dot{} = \frac{d}{dt} \quad l = \frac{d}{ds}$$

$$Q = P + \rho \underline{n}$$

"
 R^{-1}

raggio del cerchio osculatore in P
($\equiv$ raggio di curvatura)

lunghezza
d'arco

$$\begin{aligned} \langle \underline{n}, \underline{t} \rangle &\equiv 0 & \langle \underline{n}', \underline{t} \rangle + \langle \underline{n}, \underline{t}' \rangle &= 0 \\ \langle \underline{n}', \underline{t} \rangle &= -R \\ \text{ma } \underline{n}' &\parallel \underline{t} \\ \text{poich\'e } \langle \underline{n}', \underline{n} \rangle &= 0 \\ \Rightarrow \underline{n}' &= -R \underline{t} \end{aligned}$$

$$(\quad \underline{\rho} = \underline{\alpha} + \rho \underline{n} \quad) \quad R \neq 0$$

$$\begin{aligned} Q' &= \frac{dQ}{ds} = P' + \rho' \underline{n} + \rho \underline{n}' \\ &= \underline{t} + \underbrace{-\frac{R'}{R^2} \underline{n}}_{\substack{\text{"} \\ \underline{t}}} - \underbrace{\rho R \underline{t}}_{\substack{\text{"} \\ \underline{t}}} = -\frac{R'}{R^2} \underline{n} \end{aligned}$$

in definitiva

$$(\quad \underline{Q}' = \rho' \underline{n} \quad)$$

(*) $Q' = \rho' \underline{n}$: la normale in P è tangente ad $\mathcal{E}$ nel pt corrispondente Q

$$d\tilde{s} = |\rho'| ds$$

l. d'arco su $\mathcal{E}$

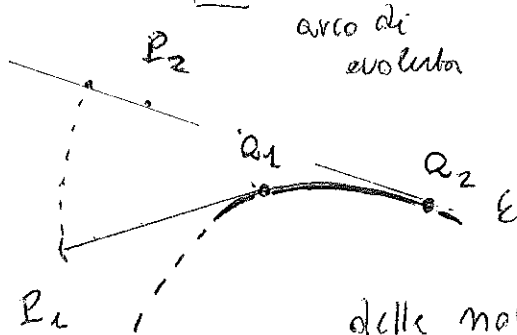
poniamo, per fissare le idee

$$R' < 0 \quad (\rho' > 0)$$

v. figura

$$d\tilde{s} = \frac{d\mathcal{G}}{ds} ds$$

$$\Rightarrow \boxed{l(q_1, q_2) = \mathcal{G}_2 - \mathcal{G}_1} \quad \star \quad (\text{di immediata interpretazione...})$$

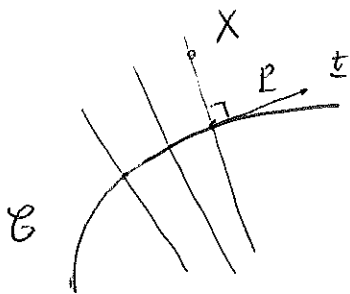


E è anche l'involuppo

delle normali di C (cf $\star$)

ciò è chiaro dalla discussione precedente, ma è istruttivo verificando secondo i dettami della teoria degli involuppi.
Descriviamo la

$\star$ famiglia delle normali a C



Innesco:



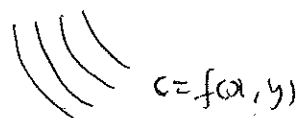
famiglia di curve: $F(x, y, c) = 0$

$\star$ involuppo: curva tangente

(Cauchy) in ogni pto ad un membro della famiglia

Si deve imporre $\frac{\partial F}{\partial c} = 0$

(altrimenti (Diri), ho una famiglia di curve di ordine



$\parallel$ Si arriva al

C - discriminante $\begin{cases} F = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial c} = 0 \end{cases}$

In ogni pto va imposto $\nabla F \neq 0$

per evitare

~~XXXXX~~ : luogo di pti singolari

$$(*) \langle X - P, t \rangle = 0$$

parametro: s

$$F(x, y, s) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial s} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial s} \langle X - P, t \rangle = 0$$

$$\underbrace{\langle -P', t \rangle}_{-1} + \langle X - P, t' \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle X - P, n \rangle = \frac{1}{R}$$

(**)

(*) e (**) porgono

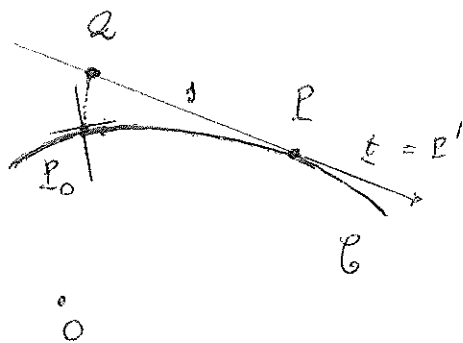
$$X - P = \frac{1}{R} \underline{n} = \mathcal{G} \underline{n} \quad \text{c.v.d.}$$

* Equazione dell'evolvente (involuta)

Di una curva $\mathcal{C}$ (a partire da $P_0 \in \mathcal{C}$)

$$1 = \frac{d}{ds}$$

$$''' \delta = 0$$



$$Q = P + (Q - P)$$

$$= P - \delta \underline{t}$$

$$= P - \delta P'$$

$$Q' = P' - P' - \delta P''$$

$$= -\delta P'' = -\delta \cdot R \cdot i \underline{P}'$$

[Q' è $\parallel \underline{n}$, come

è giusto che sia; i.e. che

$$i Q' = -\delta \cdot R \cdot i \underline{n}$$

$$= +\delta R \underline{t}$$

Esempio: l'evolvente del cerchio

a partire da $P_0 = (1, 0)$

$$\begin{cases} x = \cos \varphi \\ y = \sin \varphi \end{cases}$$

$$t: \delta = \varphi$$

formalismo complesso

$$Q = P - \delta P'$$

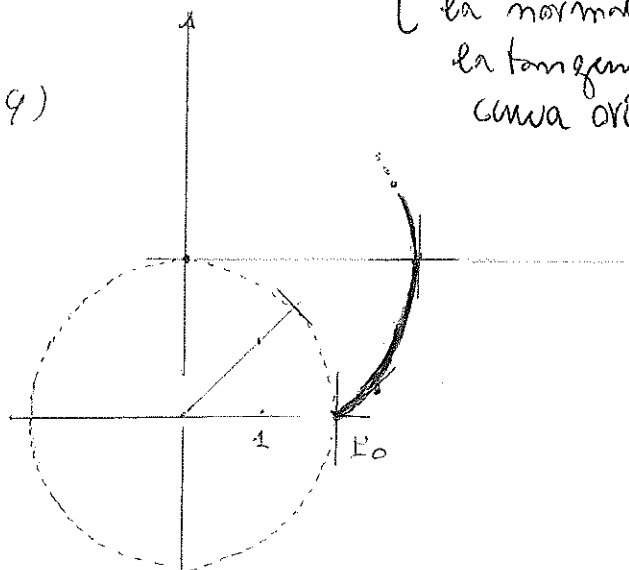
$$= e^{i\varphi} - \varphi i e^{i\varphi}$$

$$= e^{i\varphi} (1 - i\varphi) =$$

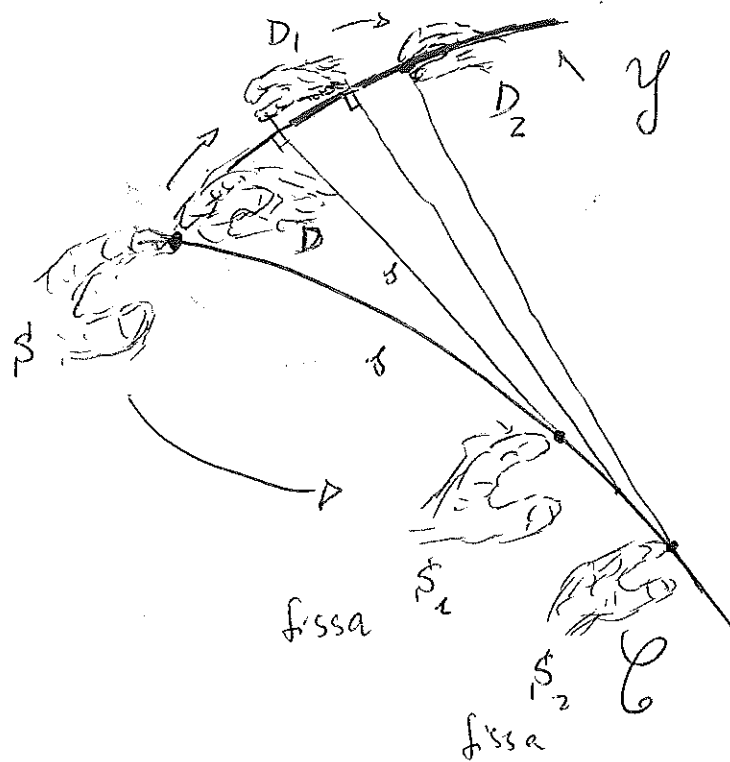
$$= (\cos \varphi + i \sin \varphi) (1 - i\varphi)$$

$$= \underbrace{(\cos \varphi + \varphi \sin \varphi)}_x + i \underbrace{(\sin \varphi - \varphi \cos \varphi)}_y$$

$$\begin{cases} x = \cos \varphi + \varphi \sin \varphi \\ y = \sin \varphi - \varphi \cos \varphi \end{cases}$$



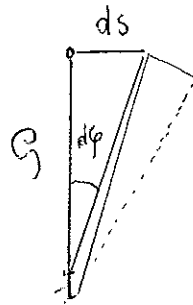
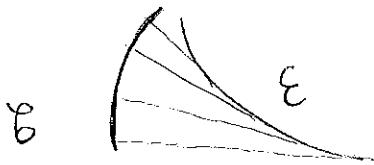
[la normale all'evolvente in Q è la tangente in P alla curva originaria]



evolvente
(o involuta) di C

V-15'

Commento: Si considera l'evolvente di $\mathcal{C}$



$$\mathcal{C} = \frac{1}{R}$$

$$R ds = R \cdot \mathcal{C} d\varphi = d\varphi$$

segue da pag. V-14

$$y(x, y, c) = 0$$

$$y'_x(x-x_0) + y'_y(y-y_0) = 0$$

$$y'_c = 0$$

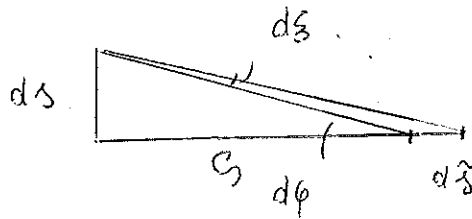
retta tangente

comune a $y(x, y, c_0) = 0$ e

all'inviluppo



$d\tilde{z}$



$d\tilde{z}$: infinitesimo

di ordine sup.
a $d\tilde{z}$

(dello stesso ordine

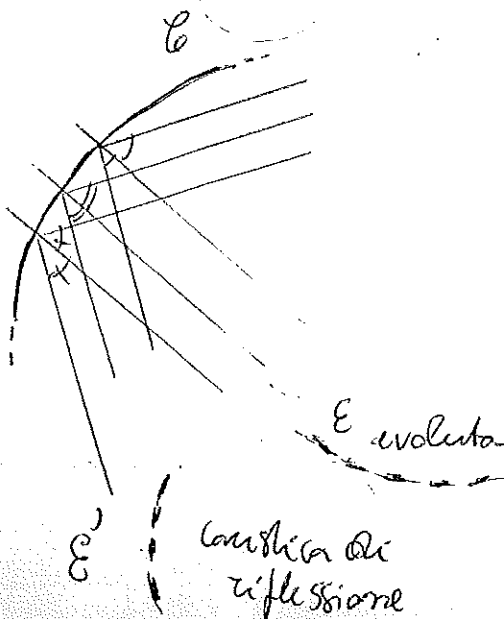
di ds e

$d\varphi$ se

$\mathcal{C}' \neq 0 \dots$

$$\frac{d\tilde{z}}{d\tilde{s}} = \frac{\sin(\pi - d\varphi)}{\sqrt{\mathcal{C}^2 + d\tilde{s}^2}} = \frac{\sin d\varphi}{\sqrt{\mathcal{C}^2 + d\tilde{s}^2}} \sim 0$$

* Ancora sugli inviluppi: caustiche di riflessione (e rifrazione)
(ex: arcobaleno... si ottengono da un'evolvente con un
movimento rigido...

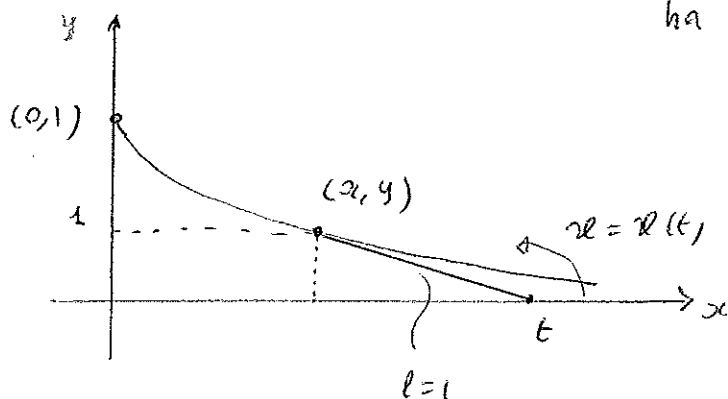


* Principio di Huygens

ogni pto di un fronte d'onda
diviene a sua volta sorgente
di onde sferiche; l'inviluppo
di queste in un istante
successivo dà il nuovo
fronte d'onda...

◇ La trottatrice
 "curva dei forzati"

proprietà caratteristica:
 il segmento di tangente
 compreso tra la curva e l'asse x
 ha lunghezza costante ($=1$)



è fondamentale
 per il seguito...

$$x = x(t) = t + \cos \alpha(t) \quad t \geq 0$$

$$y = y(t) = \sin \alpha(t)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - \sin \alpha \, \alpha' \\ \dot{y} = \cos \alpha \, \alpha' \end{cases}$$

Si ha subito

$$\tan \alpha(t) = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{\cos \alpha \, \alpha'}{1 - \sin \alpha \, \alpha'}$$

e, successivamente

$$\tan \alpha (1 - \sin \alpha \, \alpha') - \cos \alpha \, \alpha' = 0$$

$$\tan \alpha = (\tan \alpha \sin \alpha + \cos \alpha) \alpha' \quad \cos \alpha \neq 0,$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \left(\frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} + \cos \alpha \right) \alpha'$$

$$\sin \alpha = \alpha' = \frac{d\alpha}{dt}$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin \varphi} = t$$

poniamo $\xi = \tan \frac{\varphi}{2}$

$$\sin \varphi = \frac{2\xi}{1+\xi^2}$$

$$\frac{\varphi}{2} = \arctan \xi$$

$$\varphi = 2 \arctan \xi$$

$$d\varphi = 2 \frac{1}{1+\xi^2} d\xi$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin \varphi} = \int \frac{2}{1+\xi^2} \cdot \frac{1+\xi^2}{2\xi} d\xi = \int \frac{d\xi}{\xi} = \log |\xi| + c$$

$$t = \log \underbrace{\tan \frac{\varphi}{2}}_0 + c$$

$$t=0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \log \underbrace{\tan \frac{\pi}{4}}_1 = 0$$

$$\Rightarrow c = 0$$

$$\underline{x} = \underline{x}(\varphi)$$

$$\underline{r} = \underline{r}(\varphi)$$

$$\begin{cases} x = x(\varphi) = \log \tan \frac{\varphi}{2} + \cos \varphi \\ y = y(\varphi) = \sin \varphi \end{cases}$$

$$\frac{\pi}{2} \leq \varphi < \pi$$

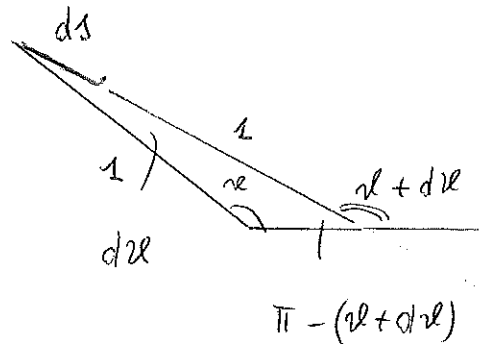
oppure: $e^t = \tan \frac{\varphi}{2}$

$$\sin \varphi = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = 2 \frac{e^t}{1+e^{2t}} = \frac{2}{e^t + e^{-t}} = \operatorname{sech} t$$

$$\cos \varphi = \frac{1 - \tan^2 \frac{\varphi}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{1 - e^{2t}}{1 + e^{2t}} = \frac{e^{-t} - e^t}{e^{-t} + e^t} = -\tanh t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underline{\beta} = \underline{\beta}(t) \\ (\underline{r} = \underline{r}(t)) \end{cases} \sim \begin{cases} x(t) = t - \tanh t \\ y(t) = \operatorname{sech} t \end{cases}$$

calcoliamo la curvatura della trattrice: il calcolo è standard ... tuttavia procediamo nel modo seguente; "all'antica" consideriamo la figura seguente (cf. la proprietà caratteristica della trattrice)



Applichiamo il teorema dei seni al "triangolo infinitesimo"

$$\frac{1}{\sin(\pi - (\alpha + d\alpha))} = \frac{1 + ds}{\sin \alpha}$$

$$\Rightarrow ds = \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + d\alpha)} - 1 = \frac{\sin \alpha - \sin(\alpha + d\alpha)}{\sin(\alpha + d\alpha)}$$

$$\sim \frac{-\cos \alpha d\alpha}{\sin \alpha} = -\cotan \alpha d\alpha$$

[* integrando otteniamo un'espressione per la lunghezza d'arco]

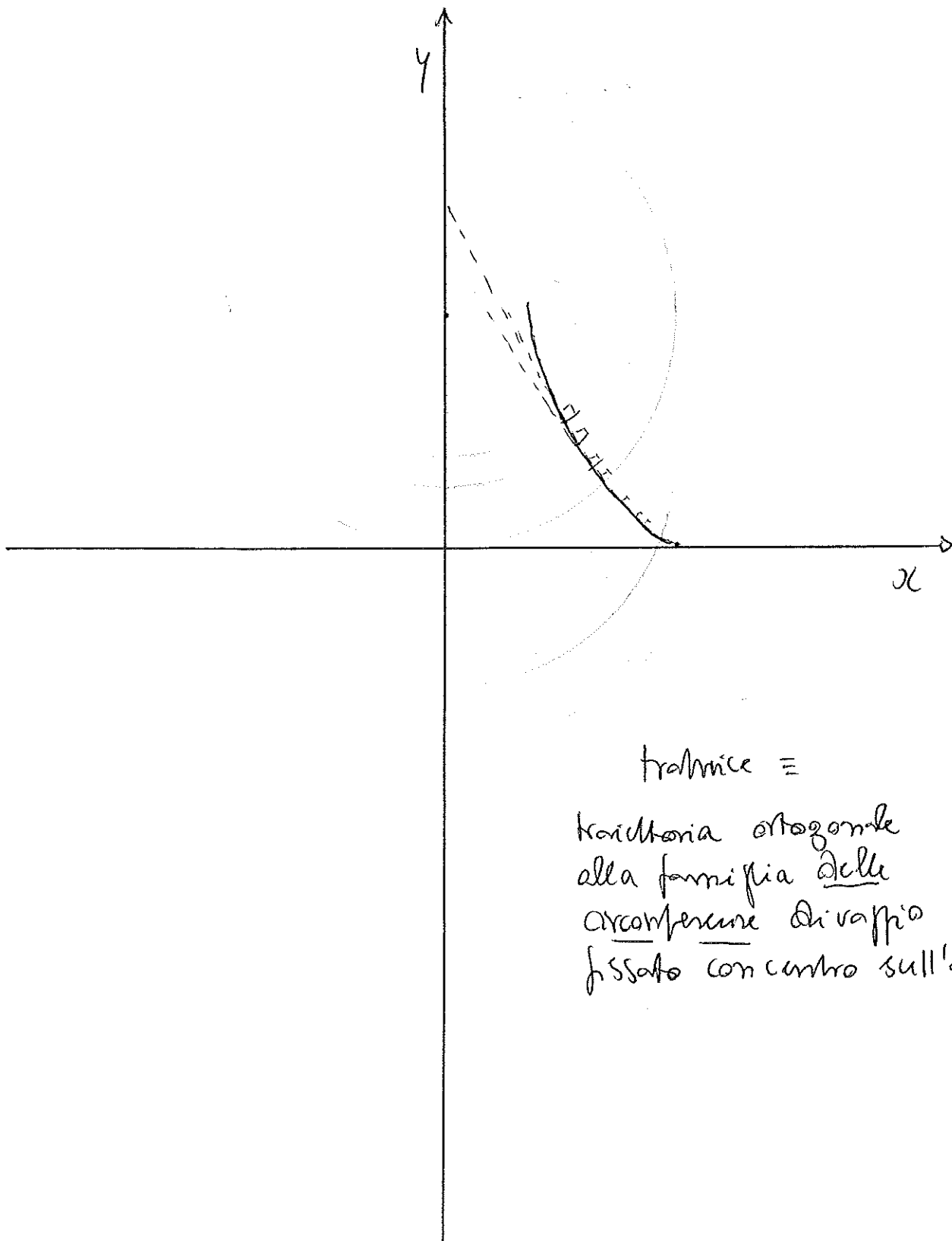
$$\Rightarrow \kappa = \frac{d\alpha}{ds} = -\tan \alpha$$

$$\int \frac{1}{\tan \alpha} d\alpha = -\log |\sin \alpha|$$

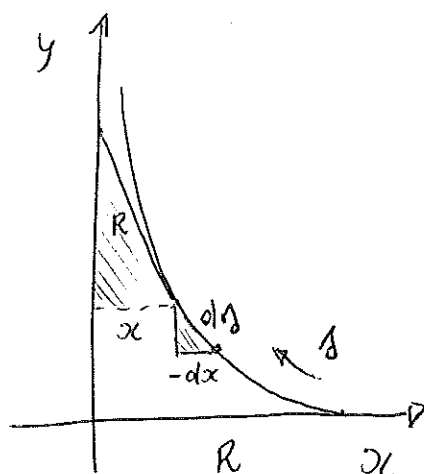
($\sin \alpha = t \dots$)

+ C

$\kappa = -\tan \alpha$



trallice $\equiv$
 trallice ortogonale
 alla famiglia delle
 circonferenze di raggio
 fissato con centro sull'asse y



Altra derivazione dell'eq.
della trattina

("all'antica")

$$0 < x \leq 1$$

$$\frac{dx}{dy} = - \frac{x}{R}$$

$$\frac{dx}{x} = - \frac{ds}{R}$$

$$\log \underbrace{|x|}_{\substack{= \\ x}} = - \frac{ds}{R} + c$$

$$x = C e^{-\frac{s}{R}}$$

$$\& \quad s = 0 \quad \& \quad x = R \Rightarrow C = R$$

$$x = R e^{-\frac{s}{R}} \quad s = \text{p. d'arco}$$

poniamo $R=1$

$$x = e^{-s} \quad s = -\log x$$

l'eq. pu y + più complicata:

V-19''

Ricciamola con:

$$dx = -e^{-s} ds$$

$$dx^2 = e^{-2s} ds^2 = e^{-2s} (dx^2 + dy^2)$$

$$e^{2s} dx^2 = dx^2 + dy^2$$

$$\begin{aligned} dy^2 &= (e^{2s} - 1) dx^2 = (e^{2s} - 1) e^{-2s} ds^2 \\ &= (1 - e^{-2s}) ds^2 \end{aligned}$$

$$dy = \sqrt{1 - e^{-2s}} ds$$

$$y = \int \sqrt{1 - e^{-2s}} ds$$

poniamo $\sqrt{1 - e^{-2s}} = \xi$

$$1 - e^{-2s} = \xi^2$$

$$e^{-2s} = 1 - \xi^2$$

$$-2s = \log(1 - \xi^2)$$

$$s = -\frac{1}{2} \cdot \log(1 - \xi^2)$$

$$ds = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \xi^2} (-2\xi) d\xi$$

$$= \frac{\xi}{1 - \xi^2} d\xi$$

V-19'''

$$y = \int \frac{\xi^2}{1-\xi^2} d\xi = \int \frac{\xi^2-1+1}{1-\xi^2} d\xi =$$

$$= -\xi + \int \frac{1}{1-\xi^2} d\xi$$

$$= -\xi + \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1-\xi} + \frac{1}{1+\xi} \right) d\xi$$

$$= -\xi + \frac{1}{2} \left(\log \frac{1}{1-\xi} + \log(\xi+1) \right) + C$$

$$= -\xi + \log \sqrt{\frac{\xi+1}{1-\xi}} + C$$

$$= -\sqrt{1-e^{-2s}} + \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+\sqrt{1-e^{-2s}}}{1-\sqrt{1-e^{-2s}}} \right) + C$$

Se $s=0$, $\xi=0$, $0=y=C \Rightarrow C=0$

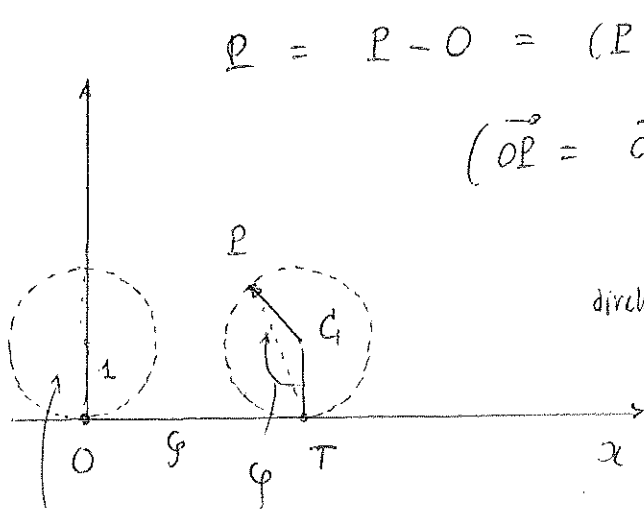
$$\begin{cases} x = e^{-s} \\ y = -\sqrt{1-e^{-2s}} + \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+\sqrt{1-e^{-2s}}}{1-\sqrt{1-e^{-2s}}} \right) \end{cases} \quad s \geq 0$$

Si ha anche

$$y = y(x) = -\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}} \right)$$

$$0 < x \leq 1$$

* L'evoluto di una cicloide è una cicloide
(c. Huygens, "Horologium oscillatorium")



rullante
(roulante)

qui $1 = \frac{d}{d\phi}$

$$Q = P + G \underline{n} =$$

* Centro
di
curvatura

$$P + \frac{\|P'\|^2}{\langle i P', P'' \rangle} \cdot i P'$$

$$P = (\phi - \sin \phi) \underline{i} + (1 - \cos \phi) \underline{j}$$

$$P' = (1 - \cos \phi) \underline{i} + \sin \phi \underline{j}$$

$$i P' = (1 - \cos \phi) \underbrace{i \underline{i}}_{\underline{j}} + \sin \phi \underbrace{i \underline{j}}_{-\underline{i}}$$

$$= -\sin \phi \underline{i} + (1 - \cos \phi) \underline{j}$$

$$= P - T$$

$$(ma P - T = (\phi - \sin \phi) \underline{i} + (1 - \cos \phi) \underline{j} - \phi \underline{i})$$

direttamente

$$\begin{cases} x = \phi - \sin \phi \\ y = 1 - \cos \phi \end{cases}$$

$\phi \in \mathbb{R}$

formalismo
"misto":

$i \underline{v}$:



$$\phi \underline{i} + \underline{j} \cdot e^{-i\phi} \underline{j}$$

attenzione...

$$\phi \underline{i} + \underline{j} (1 - e^{-i\phi})$$

$$= \phi \underline{i} +$$

$$\underline{j} (1 - \cos(-\phi) - i \sin(-\phi))$$

$$= \phi \underline{i} +$$

$$\underline{j} (1 - \cos \phi) +$$

$$- i \underline{j} (-\sin \phi)$$

$$\underline{i} \sin \phi =$$

$$(\phi - \sin \phi) \underline{i} +$$

$$(1 - \cos \phi) \underline{j}$$

si ricordi anche che due

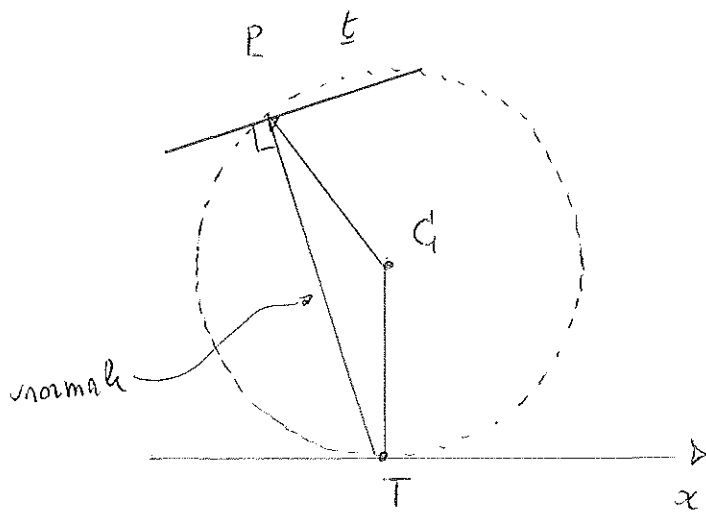
$$z = x_1 + i y_1$$

$$w = x_2 + i y_2$$

$$= (x_1 - i y_1)(x_2 + i y_2)$$

$$= (x_1 x_2 + y_1 y_2) + \text{prod. scabre.}$$

$$+ i(x_1 y_2 - x_2 y_1) \leftarrow \text{area orient.}$$



Pro x quiamo:

$$\|P'\|^2 = (1 - \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi$$

$$= 2 - 2 \cos \varphi = 2(1 - \cos \varphi)$$

$$P'' = \sin \phi \underline{i} + \cos \phi \underline{j}$$

$$\dot{r}_P' = -\sin \varphi \dot{r} + (1 - \cos \varphi) \dot{\varphi}$$

$$\langle i p', p'' \rangle = -\sin^2 \varphi + \cos \varphi (1 - \cos \varphi) = \cos \varphi - 1$$

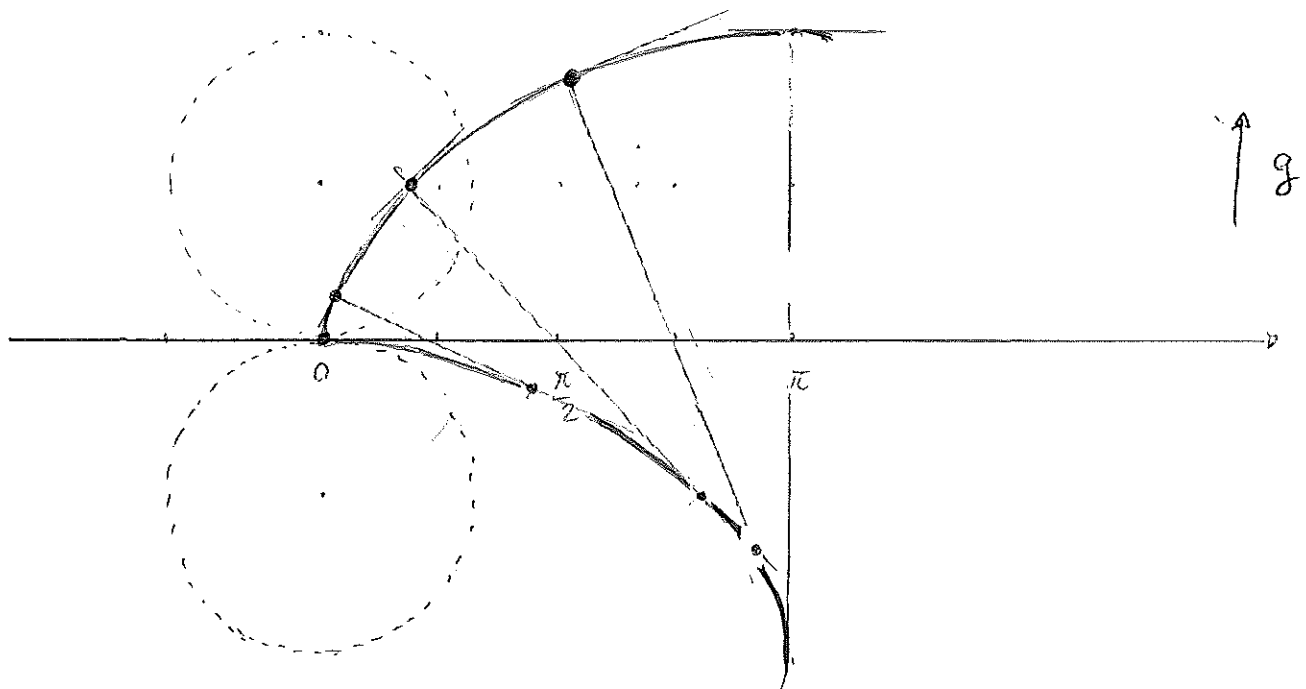
$$\Rightarrow Q = P + 2(T - P) \quad \left[\begin{array}{l} \text{il doppio della} \\ \text{lunghezza della} \\ \text{normale} \end{array} \right]$$

$$\underline{r} = (\rho - \sin \phi) \underline{i} + (1 - \cos \phi) \underline{j} + 2 (\sin \phi \underline{i} + (\cos \phi - 1) \underline{j})$$

$$= (\varphi + \sin \varphi) \underline{i} - (1 - \cos \varphi) \underline{j}$$

che è ancora una cicloide (v. figura)
congruente alla data.

Le proprietà evidenziate agevolano il tracciamento della curva $\rightarrow$

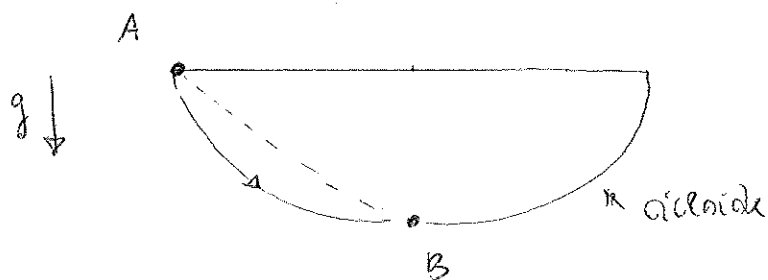


* così funziona il pendolo cicloideale (si rovescia la figura..)

[le oscillazioni sono isocrone]. Per questo

la cicloide è detta tautochrone, ed è anche

brachistocrone: una pallina pesante
impiega il minor tempo per andare da A a B
lungo una cicloide



L'equazione differenziale della cicloide

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$dx = \overbrace{(1 - \cos t)}^y dt \quad y \geq 0$$

$$dy = \sin t \, dt$$

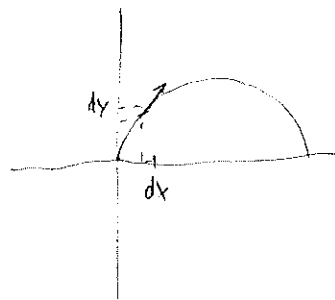
da $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ si ha, successivamente,

$$\sin^2 t = 1 - \cos^2 t = (1 - \cos t)(1 + \cos t)$$

$$\text{e } \overbrace{(1 - \cos t)}^y + (1 + \cos t) = 2$$

$$\Rightarrow \sin^2 t = y(2 - y)$$

$$\sin t = \pm \sqrt{y(2 - y)}$$



$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \pm \sqrt{\frac{y(2-y)}{y^2}} = \pm \sqrt{\frac{2-y}{y}}$$

$y \neq 0$

$$\boxed{dx = dy \sqrt{\frac{y}{2-y}}} \quad (\text{segno } +)$$

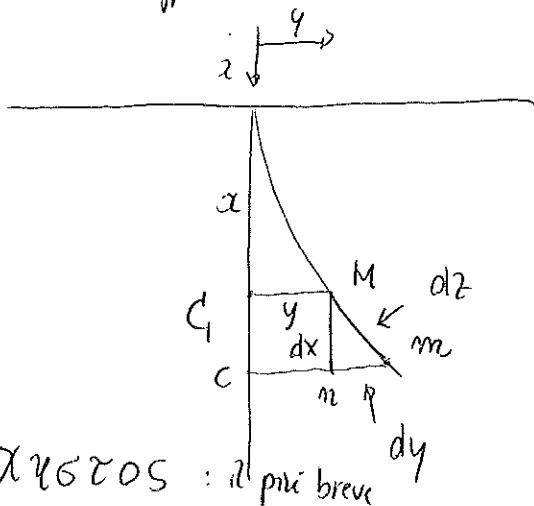
★ La brachistocrona (+)

(Cf. E. Goursat Piccola storia
del calcolo infinitesimale
dall' antichità al novecento)

la Soluzione di Johann Bernoulli

* Principio di Fermat

* legge due seni (Snell-Cartesio)



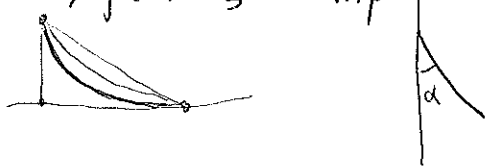
cost. di prop.

$$f_{\text{red}} = \frac{dy}{dz} = \left(\frac{1}{a} \right) v$$

R velocità della luce nel mezzo

(+) βράχυστος : $\int_a^c \frac{1}{x} dx$

Χρόνος : tempo



$$a \, dy = v \, dz$$

$$a^2 dy^2 = v^2 dz^2 =$$

$$= v^2 (dx^2 + dy^2)$$

A Ma

$$v^2 = ax$$

$$\Rightarrow (a^2 - v^2) dy^2 = v^2 dx^2$$

1^o velocidade a Copie Grata

$v = \sqrt{2gx}$ da un'origine in caduta libera ($v(0) = 0$
 $x(0) = 0$)

$$\cancel{d}(a-x) dy^2 = \cancel{d} x dx^2$$

$$q = 2g$$

$\Rightarrow$

$$dy = dx \sqrt{\frac{x}{a-x}}$$

che è l'equaz. diff. della cicloide!

V - 22 //

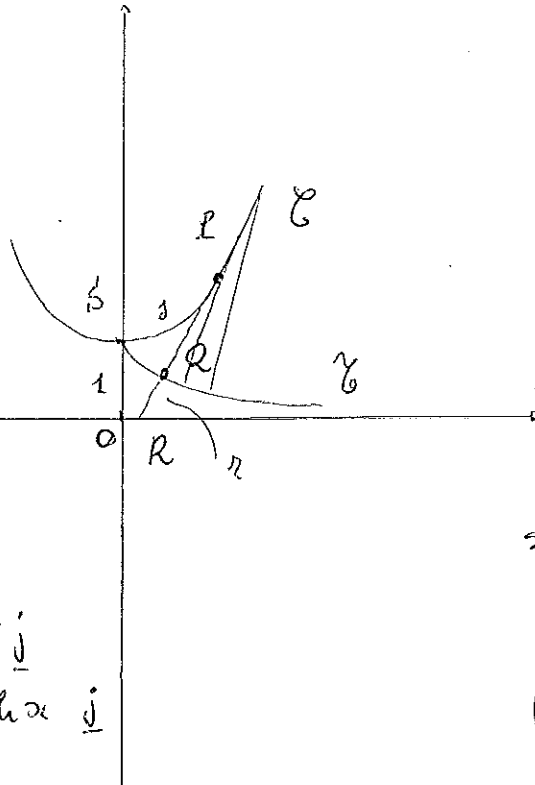
◇ l'evolvente (o involuta) di una catenaria è una trattrice

★ catenaria: $\mathcal{C}$ $y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

curva lungo
la quale si
dispone un
filo teso pesante

per x piccoli è
 $y = 1 + \frac{x^2}{2} + \dots$

e si può approssimare
con un arco di
parabola (cf. Galileo)



$$y' = \sinh x$$

$$P = x \underline{i} + \cosh x \underline{j}$$

$$P' = \underline{i} + \sinh x \underline{j}$$

★ importante anche
per gli sviluppi
successivi

(★ pseudosfera di Beltrami)

★ lunghezza d'arco della catenaria

$$s = l(\overline{PS}) = \int_0^x \sqrt{1 + \sinh^2 t} dt = \int_0^x \cosh t dt = \sinh x$$

$$Q = P + (Q - P) = P - \underbrace{\sinh x}_{s} \frac{dP}{ds} = P + \sinh x \frac{dP}{dx} \frac{dx}{ds}$$

$$= P + \underbrace{\frac{\sinh x}{\cosh x}}_{\tanh x} \frac{dP}{dx} = x \underline{i} + \cosh x \underline{j} + (-\tanh x)(\underline{i} + \sinh x \underline{j})$$

$$= (x - \tanh x) \underline{i} + \left(\cosh x - \frac{\sinh^2 x}{\cosh x} \right) \underline{j} =$$

$$= (\alpha - \tanh \alpha) \underline{i} + \frac{\overbrace{\cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha}^1}{\cosh \alpha} \underline{j}$$

$$= (\alpha - \tanh \alpha) \underline{i} + \underbrace{\frac{1}{\cosh \alpha}}_{\text{posto } \alpha=t} \underline{j} \quad \leftarrow \underline{\underline{\gamma_{trivice}}}$$

$$\begin{cases} x = t - \tanh t \\ y = \text{sech } t \end{cases} \quad \text{eq. parametriche della trivice. Discusse in precedenza}$$

Osservazioni [qui $\alpha \equiv t$]

1. Si trova, per la curvatura di γ ,

$$R(\alpha) = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_{\text{cat}}} = \frac{1}{\sinh \alpha}$$

Si vede $R = \left| \begin{array}{c} -\tanh \alpha = \frac{1}{\sinh \alpha} \end{array} \right|$
 già trovato

* Controllo (V. V. 18)

$$\tanh \alpha = \frac{\text{sech } \alpha}{-\tanh \alpha} = - \frac{1}{\cosh \alpha} \frac{\cosh \alpha}{\sinh \alpha} = - \frac{1}{\sinh \alpha} \quad \checkmark$$

In definitiva, abbiamo determinato R in due modi diversi, evitando il calcolo diretto.

Esempi

P: $y^2 = 2px$

$\mathcal{E}_p: 27py^2 = 8(x-p)^3$ parabola
semicubica

$\mathcal{E}_y: \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\mathcal{E}_y: \left(\frac{ax}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} \pm \left(\frac{by}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$ astroide
 $c^2 = a^2 \mp b^2$

γ trallice

$\mathcal{E}_\gamma$ catenaria

$\mathcal{C}$ cicloide

$\mathcal{E}_\mathcal{C}$ cicloide

* Teorema ("Umlaufsatz" di Ropf)

Sia γ ($\alpha: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$) liscia, regolare
semplice, chiusa. Allora

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^l R ds = \pm 1$$

a seconda dell'orientamento
 (antiorario: + ; orario: -)

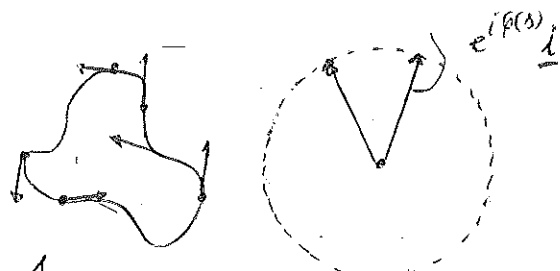
R = curvatura (con segno)

Commento

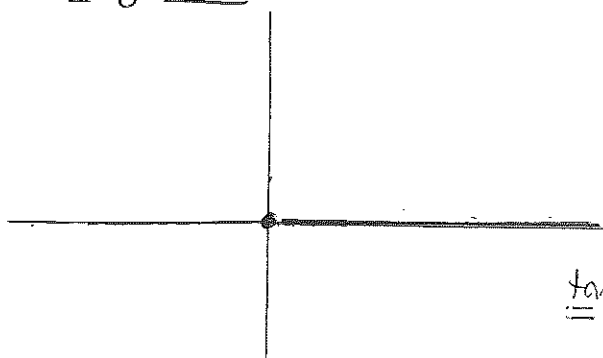
$$R = \frac{d\varphi}{ds} \quad \text{tracce}$$

(supp. $R > 0$)

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{d\varphi}{ds} ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi = +1 \quad \text{bottagli: pag. V-28}$$



Digressione:



Tagliare:

φ : funzione angolo

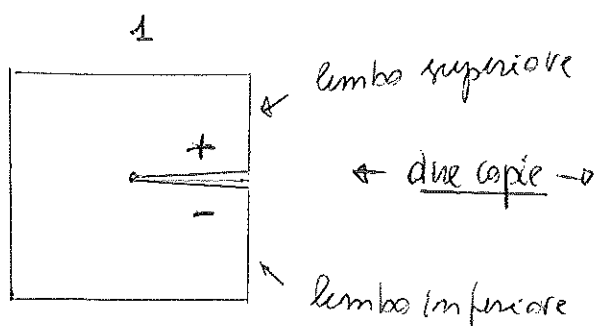
(non è def su tutto $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$
 in modo continuo)

$$\text{loc: } \varphi = \arctan \frac{y}{x}$$

$\varphi \in [0, 2\pi)$

per renderla
 continua si

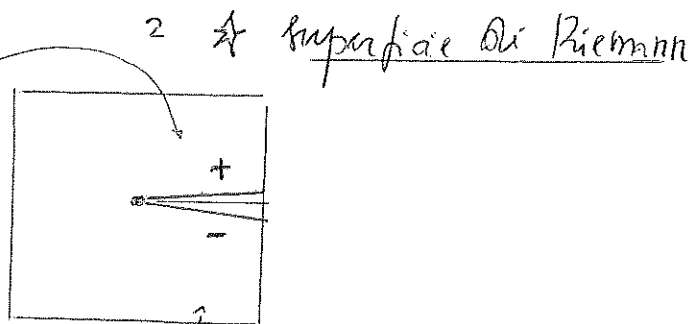
costruisce un'opportuna



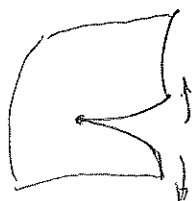
lombo superiore

← due copie →

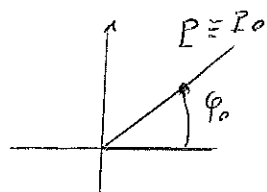
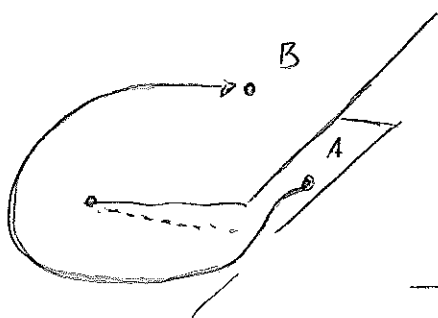
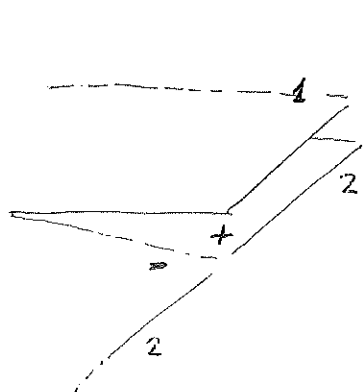
lombo inferiore



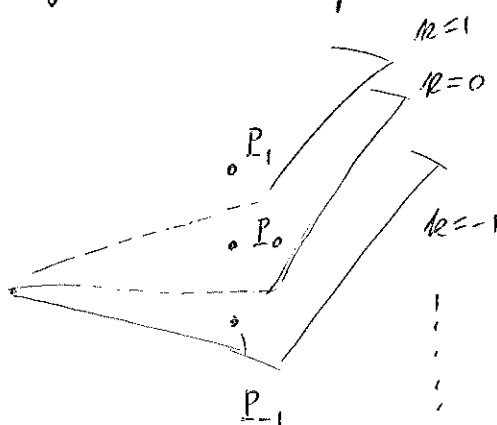
* superficie di Riemann



Si faccia ora coincidere il lombo inferiore di
 1 (-) col lombo superiore di 2 (+)



diverse determinazioni di φ ($= \varphi_0 + 2k\pi$)
 $\leadsto$ diversi "fogli" della superficie di Riemann



Sia $z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\log z = \log |z| e^{i\varphi} = \log |z| + \log e^{i\varphi} = \log |z| + i\varphi$$

formalmente

logaritmo complesso

vogliamo
 $\log(z_1 \cdot z_2) = \log z_1 + \log z_2 \dots$

$$\frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + i \arctan \frac{y}{x}$$

loc.

$\log$ risulta polidroma (cioè "a più valori")

diviene monodroma (cioè è ben definita, ad un solo valore).

(come dev' essere per una funzione!) sull'appropriata

superficie di Riemann

Si osserva che $d \log z = \frac{dz}{z} = \frac{\bar{z} dz}{|z|^2} = \frac{(x-iy)(dx+idy)}{x^2+y^2}$

forma chiusa
 ma non
 esatta in
 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} + i \left(\frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{d(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = d \log \sqrt{x^2 + y^2} + i d\varphi$$

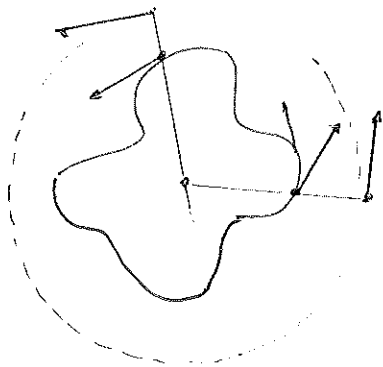
forma
esatta

Il teorema è ovvio per una circonferenza.

Ora, una curva liscia, regolare, semplice e chiusa C è omotopa ad una circonferenza C_1 (percorsa una volta in senso antiorario, per es., fissando un opportuno orientamento) vale a dire, esiste una famiglia continua di curve C_σ , $\sigma \in [0,1]$ tale che $C_0 = C$, $C_1 = C_1$

$$\text{e } C_\sigma = C \neq p = p(\varphi), \varphi \in [0, 2\pi)$$

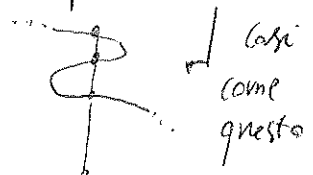
per $0 \leq \sigma \leq 1$ poniamo $C_\sigma: \varphi \mapsto \sigma(R - p(\varphi)) + p(\varphi)$



$$\sigma = 0 \Rightarrow \varphi \mapsto p(\varphi)$$

$$\sigma = 1 \Rightarrow \varphi \mapsto R$$

ammettiamo di poterla descrivere in coordinate polari



questi si possono comunque

"ci si può stare" operando con deformazioni continue...

$$\text{l'integrale } \frac{1}{2\pi} \int_0^l k \, ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi = I \in \mathbb{Z}$$



$$\text{ma } [0,1] \ni \sigma \mapsto I_\sigma \in \mathbb{Z}$$

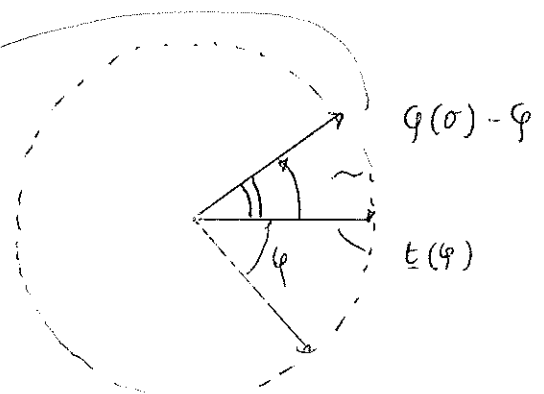
$\times I$ relativo a C_σ

è senz'altro una funzione continua, a valori interi e pertanto è necessariamente costante.

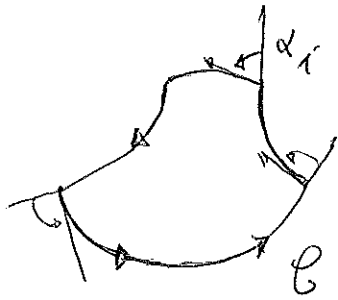
(l'immagine di $[0,1]$ è connessa, pertanto si riduce ad un singolo pts!) . Ma per la circonferenza data

$I_1 = +1$, da cui l'asserto.

l'angolo tra le rispettive tangenti non è mai superiore a 2π , in modulo



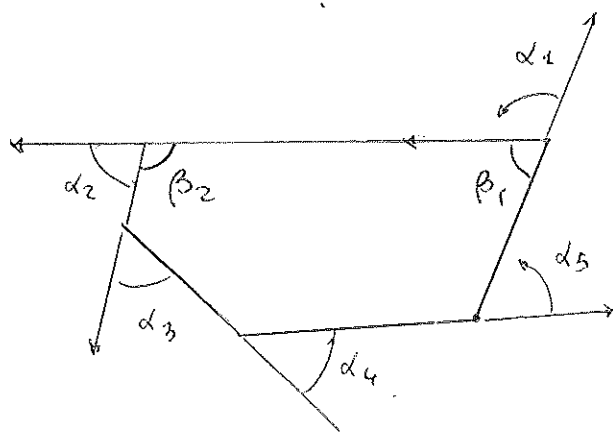
Se $\mathcal{C}$ è regolare a tratti, il teorema di Hopf
diviene



$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}} \kappa ds + \sum \alpha_i = \pm 1$$

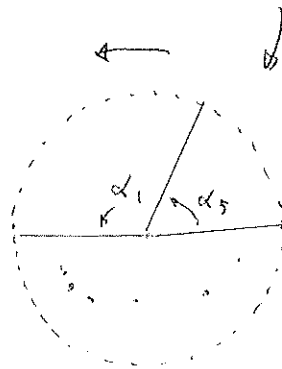
angoli
esterni

(nell'esempio viene $+1$)



Corollario: la somma
degli angoli esterni di
un poligono convesso
vale 2π

dim. diretta...



... e, pertanto, la somma
degli angoli interni vale $(n-2)\pi$

dim: Si ha $\alpha_i + \beta_i = \pi$

$$\Rightarrow \sum_i \beta_i = \sum_i (\pi - \alpha_i) = n\pi - \underbrace{\sum_i \alpha_i}_{2\pi} = (n-2)\pi.$$

* II teorema dei quattro vertici

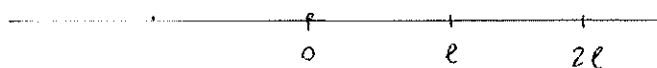
Sia C una curva liscia, semplice, chiusa, convessa
(ipotesi di comodo)

Allora essa possiede almeno 4 vertici ($\equiv$ gli n cui $R' = 0$)

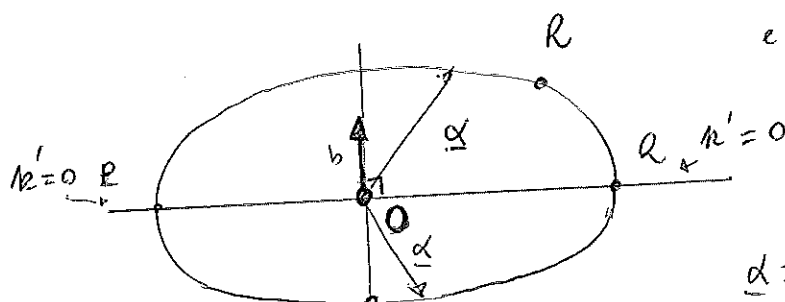
(punti critici della curvatura)

Dim. $R: [0, l] \ni s \rightarrow R(s) \in \mathbb{R}$

γ liscia, $R(0) = R(l)$ γ liscia come f periodica...



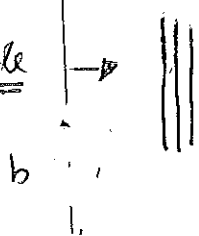
In $[0, l]$ ammette max e minimo assoluti, che possiamo supporre distinti (altrimenti C sarebbe una circonferenza...) e interni a $[0, l]$. Tracciamo PQ , e sia $\underline{b} \perp PQ$,



$\|b\| = 1$
e siano p.a. P e Q
gli unici vertici

$$\underline{d} = \underline{d}(s)$$

osservazione cruciale



S' può supporre (v. figura)

(che $\langle \underline{d}, \underline{b} \rangle \geq 0$ dove $K' \geq 0$)

$$\begin{aligned} \text{ora } \int_0^l R'(s) \underline{d}(s) ds &= \underbrace{\int_0^l (R \underline{d})' ds}_0 - \int_0^l R(s) \underbrace{\underline{d}'(s)}_{\underline{t}(s)} ds \\ &= \int_0^l \underline{n}'(s) ds = 0 \end{aligned}$$

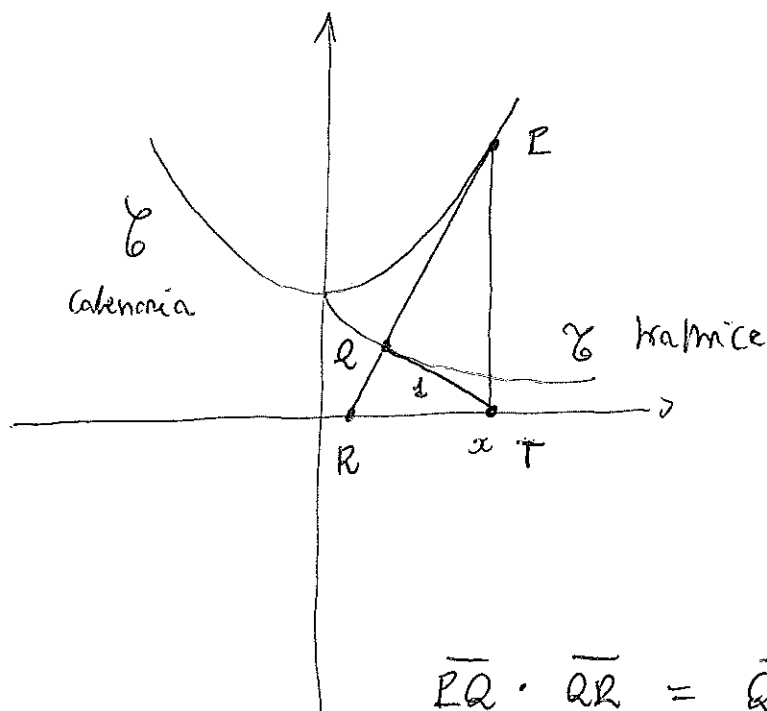
Da ciò si ha:

$$\int_0^l \kappa' \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle ds = \underline{0}$$

ma, per come è stato orientato $\underline{b}$, l'integrandò
è ≥ 0 (e non è id. nullo). Ciò porta ad una
contraddizione.

Quindi deve esistere almeno
un terzo vertice R . Ma allora, su due archi
contigui (di tre individuati da P, Q, R), κ' ha
lo stesso segno. Ragionando come prima, si conclude
che ciò è assurdo. Deve pertanto esistere un quarto vertice. $\square$

2. Si noti la configurazione seguente



di cruciale importanza per il seguito !!