

TOPOLOGIA E GEOMETRIA DIFFERENZIALE

a.a. 2009/10 Lezione A4

Prof. M. Spina

Ancora sull'analisi complessa

Serie di Laurent

Teorema dei Residui

Principio dell'argomento

★ Serie doppie (.. di Laurent)

sia $a \in \mathbb{C}$ $\{d_n\}$ $d_n \in \mathbb{C}$

la scrittura

★
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n (z-a)^n$$

va intesa come

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n (z-a)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} d_n (z-a)^n$$

(serie di potenze
(Taylor))

S_1

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_{-n} (z-a)^{-n}$$

S_2

parte singolare

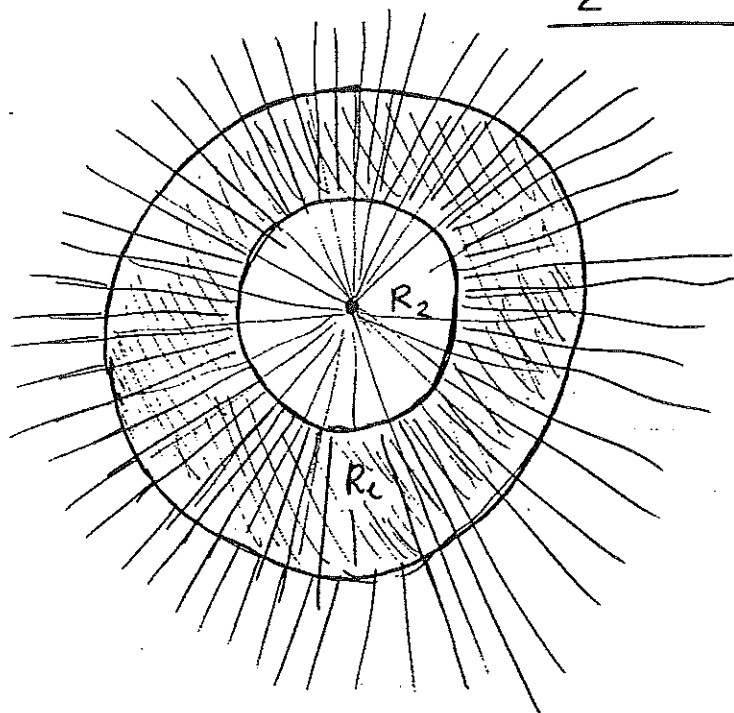
◆ è una serie di potenze in $z = \frac{1}{z-a}$
(serie di MacLaurin centrata in $z = \infty$) $(z=0)$

★ converge in z se ivi convergono le
due serie terze considerate

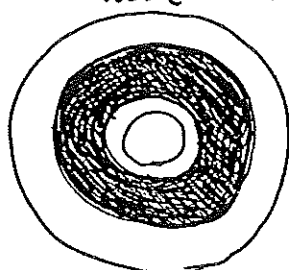
Anche l'insieme di convergenza non sia vuoto
 osserviamo che, dato R_1 il raggio di
 convergenza di S_1 (> 0), dato R_2
 il raggio di conv. di S_2 (come fare in 5)
 dove avremo $|z-a| < R_1$, $|z-a| < R_2$

ovvero $|z-a| < R_1$ $|z-a| > R_2$

$\Rightarrow$ dove essere $R_2 < R_1$ ★



★ la convergenza della serie risulta per
assoluta e uniforme in ogni compatto K
 contenuto nella corona $\{z \mid R_2 < |z-a| < R_1\}$



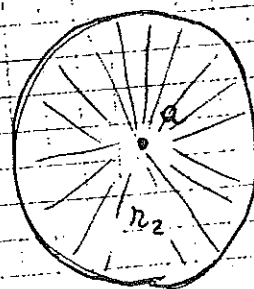
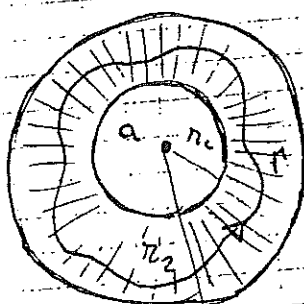
(in particolare in ogni corona
 chiusa $\{R_2 \leq |z-a| \leq R_1\}$)

Teorema (Laurent)

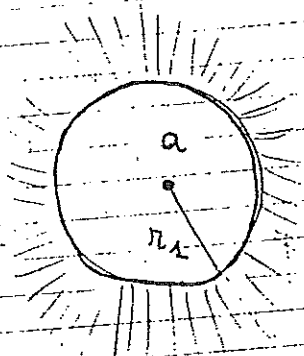
Sia Ω una corona circolare aperta

$$\Omega = \{ z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z-a| < r_2 \}$$

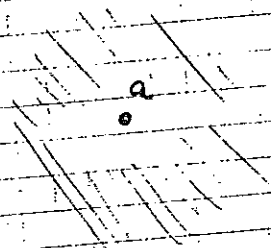
$$(0 \leq r_1 < r_2 \leq +\infty)$$



$$r_1 = 0$$



$$r_2 = +\infty$$



$$\Omega = \{a\}$$

$$r_1 = 0$$

$$r_2 = +\infty$$

Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa

Sia $\gamma \subset \Omega$ regolare a tratti, semplice, chiusa
orientata positivamente.

1) Vale lo sviluppo (* serie di Laurent)

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta}_{C_n} (z-a)^n$$

$z \in \Omega$

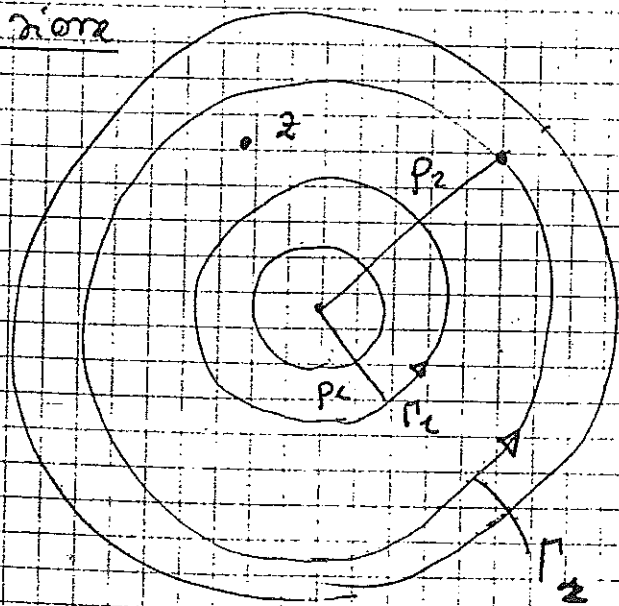
[ii.) $\sum C_n (z-a)^n$ converge per (se $\lim_{n \rightarrow \infty} |C_n|^{\frac{1}{n}} < \lim_{n \rightarrow \infty} |C_n|^{\frac{1}{n}}$)
 $A_1 < \rho_1 \leq |z-a| \leq \rho_2 < A_2$]
 iii.) tale sviluppo è univocamente determinato

* Commento * (Se f è olomorfa in $\{|z-a| < r_2\}$

è subito $C_n = 0$ per $n \leq -1$, e si riduce alla serie di Taylor

** Γ può essere sostituita da una qualsiasi curva ad essa omologa (i coefficienti C_n non mutano).

Dimostrazione

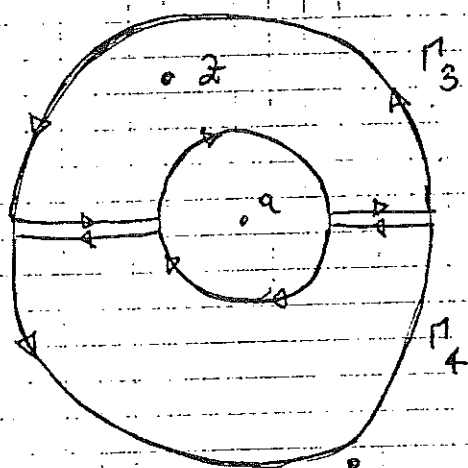


Sono $r_1 < p_1 < p_2 < r_2$ (vedi figura).

Si ha facilmente

$$\text{III} \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f(s)}{s-z} ds - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(s)}{s-z} ds$$

(conseguenza diretta
della formula di
Cauchy, per regioni
moltepiamente
connesse)



ciò segue dal fatto che $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_3} \frac{f(s)}{s-z} ds = f(z)$

$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_4} \frac{f(s)}{s-z} ds = 0$, e $\Gamma_3 + \Gamma_4 = \Gamma_2 - \Gamma_1$

Utilizziamo la

Se $\xi \in \Gamma_2$ $\left| \frac{z-a}{\xi-a} \right| < 1$

$\Rightarrow \frac{1}{s-z} = \frac{1}{s-a+a-z} = \frac{1}{s-a} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-a}{s-a}} =$

(serie geometrica ³⁴)

$$= \frac{1}{z-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{z-a} \right)^n$$

$\Rightarrow$ in base alla convergenza uniforme della serie

$$\int \sum = \sum \int \quad \star$$

e si ha

$$\star \star \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f(s)}{s-z} ds = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n \int_{\Gamma_2} \frac{f(s)}{(s-a)^{n+1}} ds \right\}$$

se ora $\{ \in \Gamma_2 \} \quad \text{e} \quad \left| \frac{s-a}{z-a} \right| < 1$

$$\text{e} \quad \frac{1}{s-z} = \frac{1}{s-a+a-z} = \frac{1}{z-a} \frac{1}{1 - \frac{s-a}{z-a}} =$$

$$= \frac{1}{z-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{s-a}{z-a} \right)^n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f(s)}{s-z} ds = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-a)^{n+1}} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} f(s)(s-a)^n ds \right)$$

per omografia

ora

$$\oint_{\Gamma_c} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} f(s) (s-a)^n ds$$

$(\Gamma_1 \sim \Gamma_2)$

(attenzione!) ⚠

e, grazie a $\blacksquare$, si conclude.

●

[ii]

osservazione. Da

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \left(\frac{1}{z-z_0} \right)^n$$

Si ha, in base alla formula

di Cauchy-Radonni

$$\frac{1}{|z-z_0|} \leq \rho_1 < A_1 = \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \right]^{-1}$$

●

convergenza per

$$= \left[\lim_{n \rightarrow -\infty} |a_n|^{-\frac{1}{n}} \right]^{-1} =$$

$$= \left[\lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{1}{|a_n|^{\frac{1}{n}}} \right]$$

$$\Rightarrow |z-z_0| \geq \rho_1 > A_1 = \left[\lim_{n \rightarrow -\infty} |a_n|^{-\frac{1}{n}} \right]^{-1}$$

○

Analogamente

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

converge (abs. e unif.) se $|z-z_0| \leq \rho_2 < \left[\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} \right]^{-1}$

$\Rightarrow$ La serie di Laurent converge se
 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |c_n|^{\frac{1}{n}} < \lim_{n \rightarrow -\infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}$$

$A_1 \qquad \qquad \qquad A_2$

per

$$\frac{1}{A_2} < |z-a| < \frac{1}{A_1}$$

$$A_1 < A_2$$

$$\frac{1}{A_1} > \frac{1}{A_2}$$

(Ricorrere, se si vuole, all'interpretazione geometrica
 Sufficiente alla mappa $z \rightarrow \frac{1}{z}$)

La parte singolare della serie di Laurent
 è una serie di potenze centrata all'infinito
 (se $a=0, \dots$)

iii) Basta mostrare che se

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n (z-a)^n = 0 \quad \text{in } \mathbb{C}$$

allora $d_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$.

Dm. moltiplichiamo entrambi i membri per $(z-a)^p \quad p \in \mathbb{Z}$.

Integrando su un opportuno contorno γ

centrato in a si ha

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

$$0 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n \int_{\gamma} (z-a)^{n+p} dz = 0 \quad \begin{matrix} (n+p = -1 \\ n = -1-p) \end{matrix}$$

$$= 2\pi i d_{-1-p}$$

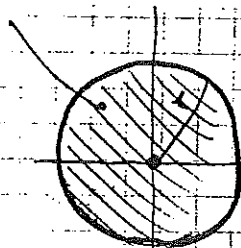
$$\Rightarrow d_{-1-p} = 0 \quad \forall p \in \mathbb{Z} \quad \square$$

$$\star \quad f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} \quad \begin{matrix} z \neq 0 \\ z \neq 1 \end{matrix}$$

se $0 < |z| < 1$ R_1

$$\text{ho } f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n =$$

$$= \sum_{n=-1}^{\infty} z^n$$

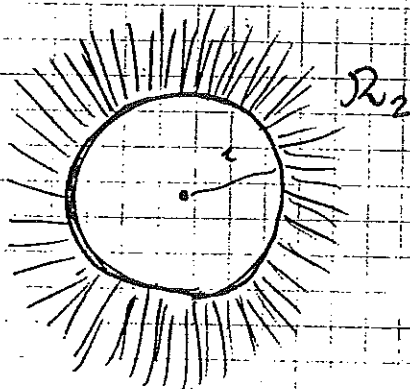


se $|z| > 1$ R_2

Scriviamo $\frac{1}{1-z} = \frac{1}{z} \frac{1}{\frac{1}{z} - 1} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{z}}$

$$= -\frac{1}{z} \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \right) = -\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k+1}$$

$$= f(z) = \dots - \sum_{n=2}^{\infty} z^{-n}$$

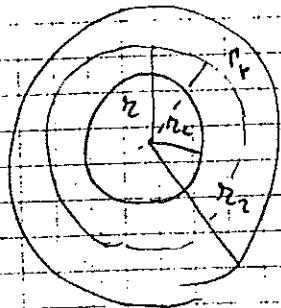


R_2

$\Rightarrow$ Due
Sviluppi
di Laurent
distinti

in due diverse regioni
annulari

★ Stima di Cauchy



Se $z \in (r_1, r_2)$ e

★ $|c_n| \leq \frac{M(r)}{r^n} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

con $M(r) = \max_{|z-a|=r} |f(z)|$

Dim. $|c_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi \right|$

$= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + re^{i\varphi})}{r^{n+1}} i e^{i\varphi} r d\varphi \right|$

$\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(a + re^{i\varphi})|}{r^n} d\varphi \leq \frac{M(r)}{r^n} \quad \square$

Si ricorda: per una serie di Taylor e

★ $|f^{(n)}(a)| \leq \frac{M n!}{r^n}$ $\rightarrow$ la stima non può essere migliorata: si prenda $f(z) = z^n$, $a=0$, $r=1$.

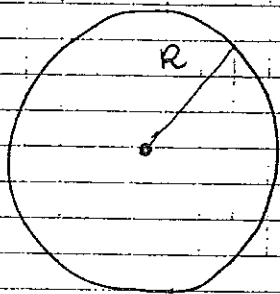
Cioè la stessa stima... Alk - 12 -

* Singolarità isolate e loro classificazione

Sia $f: \Omega - \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa
 $\nwarrow$ singolarità isolata

$$\Omega = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R \} \quad R > 0$$

$$\Omega - \{z_0\} = \{ 0 < |z - z_0| < R \}$$



disco puntato di raggio R

Consideriamo la parte principale dello sviluppo di Laurent di f , ossia

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n$$

* z_0 è detta singolarità eliminabile se non c'è parte principale, ovvero $a_n = 0 \quad \forall n < 0$

* z_0 è detto polo di ordine m se $a_{-m} \neq 0$ e $a_n = 0 \quad \forall n < -m$

ovvero, se la p.p. è del tipo

$$\sum_{n=-1}^{-m} a_n (z - z_0)^n$$

$m \in \mathbb{N}$

cioè contiene un numero finito e non nullo coefficienti $\neq 0$

$$A_4 = 13$$

* z_0 è retta singolarità essenziale

se la p.p. contiene infiniti coefficienti
non nulli

* Teorema i) z_0 è eliminabile $\Leftrightarrow$

$$\exists l = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \text{ ed } l \neq \infty$$

precisamente

ii) z_0 è un polo $\Leftrightarrow$

$$\left[\exists L = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z-z_0)^m \right]$$

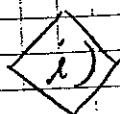
$$L \neq 0, L \neq \infty$$

$$\exists l = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \text{ ed } l = \infty$$

iii) z_0 è una singolarità essenziale

$$\Leftrightarrow \nexists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$$

Dim.



$\Rightarrow$

Si ha subito, in tal caso

$$l = a_0 \neq \infty$$

$\Leftarrow$ f risulta localmente limitata:

$$|f(z)| \leq M \quad 0 < |z - z_0| < r \text{ opportuno}$$

Utilizziamo la serie di Cauchy

per i suoi coefficienti di Laurent

$$|a_n| \leq \frac{M(\rho)}{\rho^n}; \quad 0 < \rho < r \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$(M(\rho) = \max_{|z-z_0|=\rho} |f(z)|)$$

Da ciò si ha

$$|a_n| \leq \frac{M}{\rho^n}; \quad 0 < \rho < r, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \text{se } n < 0, \text{ segue } a_n = 0$$

per l'arbitrarietà di ρ (si fa tendere ρ a 0)
i) è provato

4 Osservazione Di fatto, abbiamo dimostrato

il 4 teorema di Weierstrass (di limitazione di singolarità)

● f olomorfa in un disco puntato si
estende ad una f olomorfa in tutto il disco 4
 $\Leftrightarrow$ è limitata nel disco puntato



$\Rightarrow$ è ancora chiaro
(anche l'unicità sull'ordace)

$$\Leftarrow \text{ se } \exists l = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty,$$

la funzione $g(z) = \frac{1}{f(z)}$

è tale che
 $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = 0$

in base al teorema di Weierstrass

$g(z)$ è olomorfa (anche in z_0)

$$\Rightarrow g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n}$$

Sia b_N , $N \neq 0$ $\star$ il primo coeff. non $\star$

○ non nullo ($N \neq 0$ altrimenti $f(z)$ sarebbe costante ...)

Si ha $f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^N} \cdot \underbrace{\frac{1}{b_N + b_{N+1}(z-z_0) + \dots}}_{\text{olomorfa}}$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^N} \underbrace{(c_0 + c_1(z-z_0) + \dots)}_{\text{olomorfa}}$$

che prova l'asserto.

iii) Se que necessariamente da i) e ii)

Osservazione Se $f(z) \rightarrow \infty$ per $z \rightarrow z_0$ (polo)
l'ordine di infinito è un numero naturale.

⚡ Non può accadere $f(z) \sim z^\alpha$ $\alpha < 0$
se $z \rightarrow 0$ (punto di zeri)
in quanto

per α negativo si ha ∞ ⚡ un pto di

Osservazione e ordine polid'ordine
(non siamo nell'ambito delle ipotesi del teorema.)

★ Teorema (Sokhotski - Goursat - Weierstrass)

sia f olomorfa in un disco puntato

$\{0 < |z - a| < r\}$ e sia a una singolarità

essenziale. Allora f assume un

valore denso (o $\mathbb{C}$) di valori; precisamente

○ $\forall w \in \mathbb{C}, \forall 0 < \delta < r, \forall \varepsilon > 0,$

$\exists z, 0 < |z - a| < \delta$ tale che

$$|f(z) - w| < \varepsilon$$

† Ancora: in un qualivanti intorno di una singolarità essenziale, la funzione assume valori arbitrariamente vicini ad un qualivanti numero prefissato

(in particolare (Piccola) non può mancare essenziale)

Dim. Per assurdo $\exists w_0, \delta_0, \varepsilon_0$

talché $\forall z, 0 < |z - a| < \delta_0, |f(z) - w_0| \geq \varepsilon_0$

$$|f(z) - w_0| \geq \varepsilon_0$$

condizione

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - w_0}$$

olomorfa in $\{0 < |z - z_0| < \delta\}$ e di
limitata $\Rightarrow$ (Riemann)

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

Sia $m \geq 0$ il primo indice tale che

$c_m \neq 0$. Scriviamo

$$g(z) = (z-a)^m \underbrace{g_1(z)}_{\text{olomorfa}}$$

$(g_1(a) \neq 0)$

$$\Rightarrow f(z) = w_0 + \frac{1}{(z-a)^m} \underbrace{\left(\frac{1}{g_1(z)} \right)}_{\text{olomorfa}}$$

(Sviluppando)

$\Rightarrow$ a sarebbe un polo di
ordine m (se $m > 0$)

(o una sing. eliminabile, se $m = 0$)

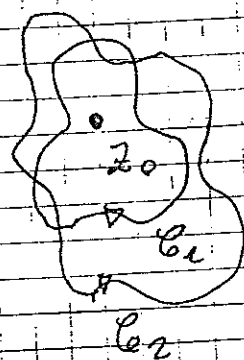
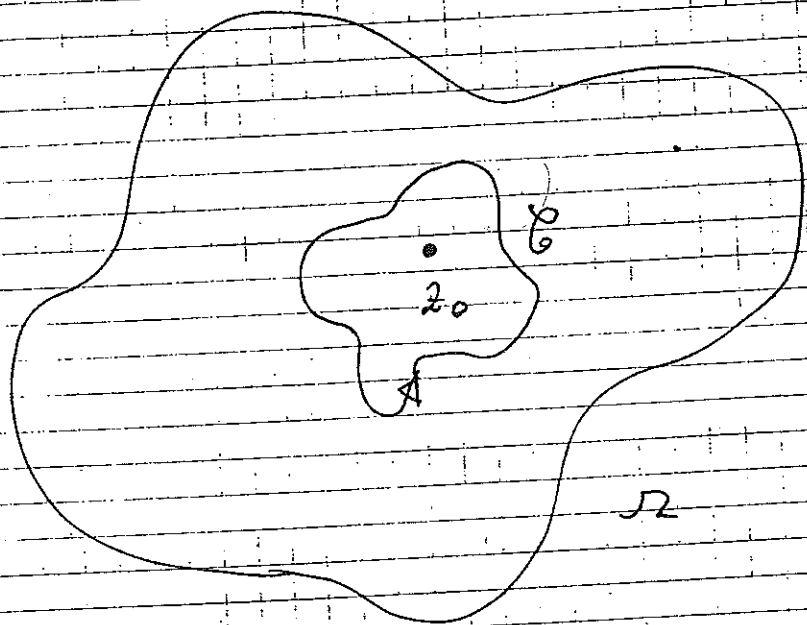
contro l'ipotesi. $\square$

★ Residuo in un pto singolare isolato

Sia $f: \Omega - \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$

regione
= aperto
connesso

olomorfa



○ Dicesi residuo di f in z_0 , e si denota con $\text{Res}_{z_0} f$, la quantità

$$\boxed{\text{Res}_{z_0} f := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz}$$

○ Dove γ è una curva in $\Omega - \{z_0\}$ semplice e chiusa
(... γ' a tratti) ^{che toccherà z_0} orientata in senso antiorario
Al - 20 -

⚡ $\text{Res}_{z_0} f$ dipende solo dalla classe di omologia di γ : $\gamma, \gamma + \gamma_0$

⚡ Se f è olomorfa in Ω , è subito (teorema di Cauchy) $\text{Res}_{z_0} f = 0$

$\forall z_0 \in \Omega$ (cioè annulla il termine "residuo")

Attenzione!

⚡ Sarebbe più corretto parlare di residuo in z_0 della 1-forma olomorfa $f dz$ in z_0 .
($\text{Res}_{z_0}(f dz)$)

Il concetto di residuo è invariante per trasformazioni olomorfe di coordinate

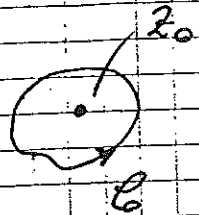
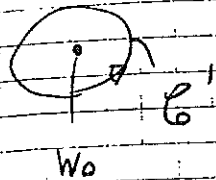
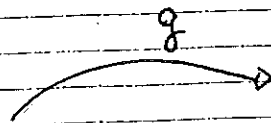
nel senso seguente

$$\begin{array}{ccc} z = g(w) & \text{olomorfa} & \\ w \mapsto z & w_0 \mapsto z_0 & \gamma' \rightarrow \gamma \\ & F & \\ f(z) dz & = & (f \circ g)(w) \frac{dz}{dw} dw = \\ & & F(w) g'(w) dw \equiv \text{"pull-back di } f dz \text{"} \end{array}$$

$$\Rightarrow \left[\text{Res}_{z_0}(f dz) = \text{Res}_{w_0}(F g' dw) \right]$$

$$= \text{Res}_{w_0}((f \circ g) g' dw)$$

$$\int_{\gamma} (f \circ g)(w) g'(w) dw$$



$$\int_{\gamma} f(z) dz$$

$$\gamma = g(\gamma')$$

$$\int_{\gamma} f(g(w)) g'(w) dw$$

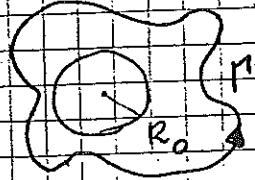
$$\int_{\gamma} f(w) dw = \text{"pull-back" di } \int_{\gamma} f dz \text{ tramite } g$$

$$g^*(f dz) \star \left[\int_{\gamma} g^*(f dz) = \int_{\gamma(\gamma')} f dz \right]$$

Si ricorda che una transf. olm. non muta l'orientamento del piano poiché ha jacobiano $\neq 0$

Tale proprietà di invarianza consente di definire il concetto di residuo all'infinito

Sia f olomorfa in $\{|z| > R_0\}$
possiamo fare Definiamo



$$\text{Res}_{\infty} f$$

$$\text{Res}_{\infty}(f dz) := - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz$$

(notare)

orientamento
opposto

$$\int_{\gamma'} f(z) dz$$

mostriamo che ciò ha senso

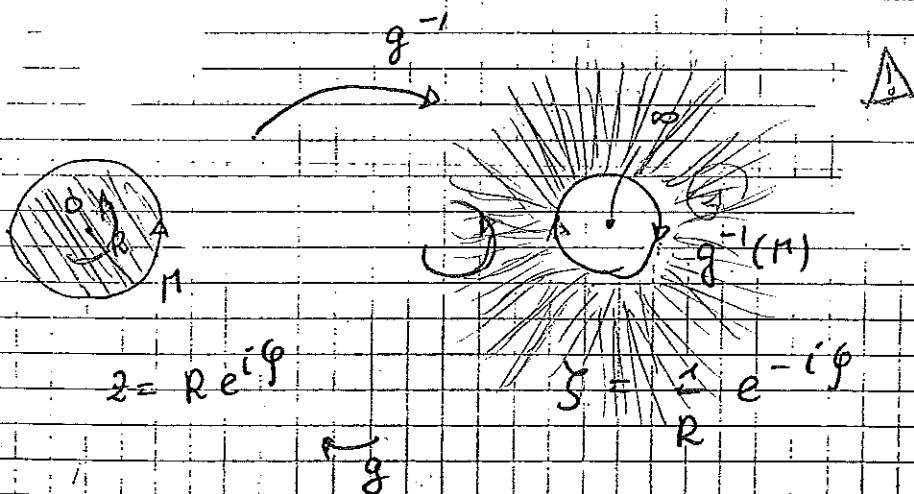
Consideriamo la trasformazione

$$z = \frac{1}{\zeta} = g(\zeta)$$

$$|z| > R_0 \iff |\zeta| < \frac{1}{R_0}$$

$$z = \infty \iff \zeta = 0$$

$$-\int_{\Gamma} f dz = -\int_{g^{-1}(\Gamma)} f\left(\frac{1}{\zeta}\right) \left(-\frac{1}{\zeta^2}\right) d\zeta$$



$$= \int_{g^{-1}(\Gamma)^+} f\left(\frac{1}{\zeta}\right) \left(-\frac{1}{\zeta^2}\right) d\zeta$$

$$= \int_{g^{-1}(\Gamma)^+} \gamma(\zeta) d\zeta$$

Assumendo

... Allora $\text{Res}_0 \gamma d\zeta$

$\text{Res}_0 g^*(f dz) =$

$\text{Res}_\infty f dz$

Ah - 23 -

$= \text{Res}_{g(0)}(f dz)$

★ Esempio elementare

★ $\text{Res}_0 \underbrace{\frac{1}{z}}_{f(z)} dz = +1$

se $\gamma = \frac{1}{z}$, $z = \frac{1}{\gamma}$ $\therefore f(z) dz = \gamma \cdot \left(-\frac{1}{\gamma^2}\right) d\gamma$
 $= -\frac{1}{\gamma} d\gamma$

Riflettete!

$f(z) = \frac{1}{z}$ è olomorfo aff' 0

ma $\text{Res}_0 f dz = -1$

Il concetto di residuo

è "coomologico":
 è più corretto parlare di
 Res della 1-forma

★ $\text{Res}_\infty f(z) dz = -1$

$\text{Res}_0 f dz + \text{Res}_\infty f dz = 0$

Nota: al punto

se f è olomorfa in a ,
 $\text{Res}_a f = 0$. Il viceversa

è falso: $f = \frac{1}{z^2}$ ha

un polo di ordine 2 in $z=0$

ma $\text{Res}_0 f = 0$

Calcolo diretto:

$\oint_{\gamma} f(z) dz = \oint_{\gamma} \frac{1}{z} dz =$

$= \oint_{\gamma} -\frac{1}{\gamma} d\gamma = -\oint_{\gamma} \frac{1}{\gamma} d\gamma = -2\pi i$

Lo stesso calcolo mostra che

$\oint_{\gamma} f(z) dz = \oint_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \dots = \oint_{\gamma} \frac{1}{\gamma} d\gamma = +2\pi i$