

#### 4.1 FLUSSI DI EQUAZIONI AUTONOME.

Diciamo che l'equazione  $\dot{x} = F(t, x)$  è *autonoma* se  $F$  non dipende da  $t$ . Un'equazione autonoma è quindi del tipo

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in D = D^\circ \subseteq \mathbb{R}^n, \quad (4.1.1)$$

e la funzione  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  si dice *campo vettoriale* su  $D$  e sarà sempre supposta *continua*.

Facciamo subito vedere che *l'insieme delle soluzioni di un'equazione autonoma è invariante per traslazioni del tempo*. Ovvero, se  $\phi : I \rightarrow D$  è soluzione di (4.1.1) e  $\tau \in \mathbb{R}$ , allora

$$\phi_\tau : I - \tau \rightarrow D, \quad t \mapsto \phi(t + \tau), \quad \text{dove} \quad I - \tau := \{t - \tau \in \mathbb{R} : t \in I\}, \quad (4.1.2)$$

è ancora una soluzione. Infatti

$$\frac{d}{dt}\phi_\tau(t) = \frac{d}{dt}\phi(t + \tau) = f(\phi(t + \tau)) = f(\phi_\tau(t)). \quad (4.1.3)$$

**Definizione 4.1.1.** Diciamo che la funzione  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , continua sull'aperto  $D$  di  $\mathbb{R}^n$ , dà un *flusso continuo* se: (i) per ogni  $x_0 \in D$  c'è un'unica soluzione massimale  $I(x_0) \rightarrow D$ ,  $t \mapsto \Phi(t, x_0)$  dell'equazione differenziale  $\dot{x} = f(x)$  che soddisfa la condizione iniziale  $\Phi(0, x_0) = x_0$ , (ii) il più grande sottoinsieme  $\mathcal{D}$  di  $\mathbb{R} \times D$  in cui è definita la funzione  $(t, x_0) \mapsto \Phi(t, x_0)$  è aperto in  $\mathbb{R} \times D$ , e (iii) la funzione  $\Phi$ , detta *flusso*, è continua.

Come conseguenza di un teorema che non trattiamo si ha la seguente:

**Proposizione 4.1.2.** Sia  $f \in C^k(D; \mathbb{R}^n)$ , con  $k \geq 1$  naturale, e  $D$  aperto di  $\mathbb{R}^n$ . Allora  $f$  dà un *flusso continuo* che è pure di classe  $C^k$

$$f \in C^k, \quad k \geq 1, \quad \implies \quad \Phi \in C^k(\mathcal{D}; D), \quad \mathcal{D} = \overset{\circ}{\mathcal{D}} \subseteq \mathbb{R} \times D. \quad (4.1.4)$$

**Proposizione 4.1.3.** La funzione  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , continua sull'aperto  $D$  di  $\mathbb{R}^n$ , dia un *flusso continuo*  $\Phi$ . Allora il *flusso* soddisfa la seguente *fondamentale proprietà*: per  $s \in I(x)$ , si ha che  $t + s \in I(x)$  è equivalente a  $t \in I(\Phi(s, x))$  e  $s, t + s \in I(x)$  danno

$$\Phi(t, \Phi(s, x)) = \Phi(t + s, x). \quad (4.1.5)$$

*Dimostrazione.* Infatti, entrambi i membri, pensati come funzioni della sola variabile  $t$ , sono soluzioni dell'equazione differenziale. Inoltre coincidono per  $t = 0$  e quindi per ogni  $t$  per l'unicità delle soluzioni dei problemi di Cauchy.  $\square$

Un *flusso globale*, cioè con  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \times D$ , si dice anche *sistema dinamico*; più in generale un sistema dinamico è una funzione continua  $\Phi$  definita su  $\mathbb{R} \times D$ , con  $D = D^\circ \subseteq \mathbb{R}^n$ , e a valori in  $D$ , che soddisfi (4.1.5) e tale che  $\Phi(0, x_0) = x_0$  per ogni  $x_0 \in D$ .

**Proposizione 4.1.4.** *La funzione  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , continua sull'aperto  $D$  di  $\mathbb{R}^n$ , dia un flusso continuo  $\Phi : \mathcal{D} \rightarrow D$ . Per  $\tau \in \mathbb{R}$  sia  $D_\tau$  l'insieme degli  $x$  la cui soluzione esiste fino all'istante  $\tau$ :*

$$D_\tau := \{x \in D : (\tau, x) \in \mathcal{D}\} = \{x \in D : \tau \in I(x)\}. \quad (4.1.6)$$

Per ogni  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $D_\tau$  è un aperto di  $D$  (ma può essere vuoto), e la seguente funzione è un omeomorfismo

$$\Phi^\tau : D_\tau \rightarrow D_{-\tau}, \quad x \mapsto \Phi(\tau, x) \quad \text{e} \quad (\Phi^\tau)^{-1} = \Phi^{-\tau}. \quad (4.1.7)$$

Se  $f \in C^k$ , con  $k \geq 1$ , allora  $\Phi^\tau$  è un diffeomorfismo di classe  $C^k$  per ogni  $\tau \in \mathbb{R}$ .

*Dimostrazione.*  $D_\tau$  è aperto in  $D$  perché  $\mathcal{D}$  è aperto in  $\mathbb{R} \times D$ . Sia  $I(x_0)$  come nella Definizione 4.1.1. Per la proposizione 4.1.3

$$x_0 \in D_\tau \iff 0, \tau \in I(x_0) \iff -\tau, 0 \in I(\Phi(\tau, x_0)) \iff \Phi(\tau, x_0) \in D_{-\tau} \quad (4.1.8)$$

Dunque l'applicazione  $\Phi^\tau$  manda  $D_\tau$  in  $D_{-\tau}$ . Scambiando  $\tau$  con  $-\tau$  si ha che  $\Phi^{-\tau}$  manda  $D_{-\tau}$  in  $D_\tau$ . Dalla (4.1.5) abbiamo infine che  $\Phi^\tau$  e  $\Phi^{-\tau}$  sono una l'inversa dell'altra:

$$\Phi^\tau(\Phi^{-\tau}(x_0)) = \Phi(\tau, \Phi(-\tau, x_0)) = \Phi(\tau - \tau, x_0) = \Phi(0, x_0) = x_0.$$

Essendo entrambe continue, sono omeomorfismi. Se poi  $f \in C^k$  allora  $\Phi^\tau$  e  $\Phi^{-\tau}$  sono diffeomorfismi di classe  $C^k$ , essendo inversi una dell'altra e di classe  $C^k$ .  $\square$

#### 4.4 ATTRATTIVITÀ E STABILITÀ DELL'EQUILIBRIO.

In questa sezione consideriamo equazioni autonome in aperti di  $\mathbb{R}^n$  con un equilibrio che, senza perdita di generalità, fissiamo una volta per tutte nell'origine

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in D = D^\circ \subseteq \mathbb{R}^n, \quad 0 \in D, \quad f(0) = 0. \quad (4.4.1)$$

Dove  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  è  $C^1$  e il suo flusso sia  $\Phi$ . Come al solito  $I(x_0)$  è l'intervallo di esistenza della soluzione massimale  $t \mapsto \Phi(t, x_0)$ .

Diciamo che l'origine è un *attrattore* (locale), oppure che è un *pozzo* (locale), se esiste un suo intorno  $V = V^\circ \subseteq D$  tale che per  $x_0 \in V$  si ha  $\sup I(x_0) = +\infty$  e  $\Phi(t, x_0) \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow +\infty$ . Diciamo poi *bacino d'attrazione* del pozzo l'insieme

$$\mathcal{A} := \left\{ x_0 \in D : \sup I(x_0) = +\infty, \lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi(t, x_0) = 0 \right\}. \quad (4.4.2)$$

Per la continuità del flusso, il bacino d'attrazione  $\mathcal{A}$  è aperto in  $D$

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^\circ \subseteq D. \quad (4.4.3)$$

Infatti, sia  $x_0 \in \mathcal{A}$ . Allora esiste  $\tau > 0$  tale che  $\Phi^\tau(x_0) = \Phi(\tau, x_0) \in V = V^\circ$ , il suddetto intorno dell'origine. La funzione  $\Phi^\tau$  è un omeomorfismo fra due aperti  $D_\tau \rightarrow D_{-\tau}$ ,

quindi  $U = \Phi^{-\tau}(V \cap D_{-\tau})$  è un intorno di  $x_0$  che va in in  $V$ . Le soluzioni che partono da punti di  $U$  tendono quindi all'origine per  $t \rightarrow +\infty$ , cioè  $U \subseteq \mathcal{A}$  che è quindi aperto.

Diciamo che l'origine è un equilibrio *stabile* (alla Liapunov) se per ogni  $\epsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che

$$|x_0| < \delta \quad \implies \quad |\Phi(t, x_0)| < \epsilon \quad \text{per ogni } t \in I(x_0) \cap \mathbb{R}_+. \quad (4.4.4)$$

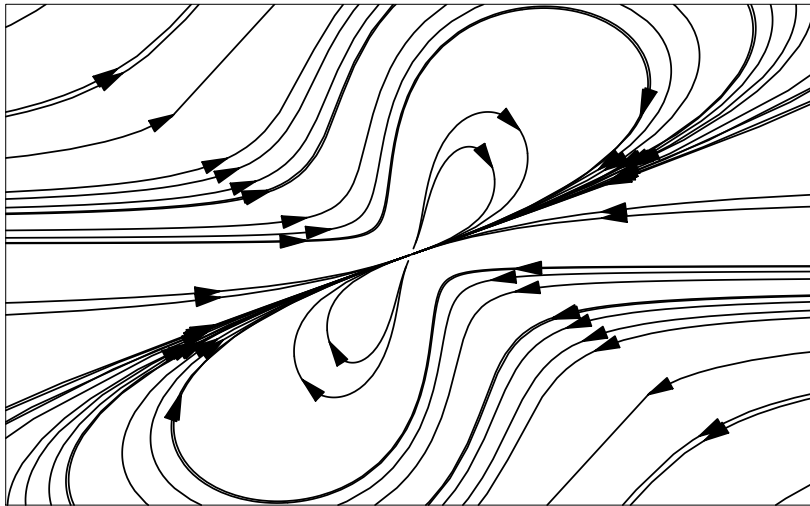
Come sappiamo esiste allora un intorno  $D_+ \subseteq D$  dell'origine tale che tutte le soluzioni che partono in  $D_+$  sono definite per tempi arbitrariamente grandi

$$I(x_0) \cap \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}_+ \quad \text{per ogni } x_0 \in D_+. \quad (4.4.5)$$

Se l'equilibrio non è stabile si dice *instabile*.

Un attrattore (non-lineare) può essere benissimo instabile come mostra il seguente esempio (di Vinograd)

$$\dot{x} = x^2(y - x) + y^5, \quad \dot{y} = y^2(y - 2x), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (4.4.6)$$



Non facciamo dimostrazioni e ci accontentiamo del ritratto di fase in figura da cui si vede che ci sono orbite omocline. Basta considerarne una e una palla di centro l'equilibrio che non la contenga tutta e si ha subito l'instabilità come per un qualunque sistema per cui si ha una soluzione che tende all'equilibrio per  $t \rightarrow -\infty$  (si rifletta su questo punto considerando la negazione della definizione di stabilità). Dal ritratto di fase vediamo inoltre che ogni soluzione ha per limite l'origine per  $t \rightarrow +\infty$ .

Un esempio di equilibrio stabile che non è un attrattore è il centro  $\dot{x} = -y$ ,  $\dot{y} = x$ . Le orbite sono circonferenze con centro l'origine e la definizione di stabilità è soddisfatta per esempio con  $\delta = \epsilon$ . Anche l'occhio del pesce cioè l'equilibrio  $(q, p) = (a/3, 0)$  per

$$\dot{q} = p, \quad \dot{p} = aq - 3q^2, \quad (q, p) \in \mathbb{R}^2 \quad (4.4.7)$$

con il parametro  $a > 0$ , è un centro (non-lineare) ed è stabile. In questo caso applicare la definizione è un po' più arduo ma con il teorema di Liapunov che vedremo sarà facile provarlo. Invece l'origine è un equilibrio instabile per (4.4.7) dato che sappiamo che esiste una soluzione che tende all'origine per  $t \rightarrow -\infty$ .

Un equilibrio che sia un attrattore stabile si dice *asintoticamente stabile*. Un pozzo lineare nel piano è un esempio di equilibrio asintoticamente stabile.

## 4.5 INTEGRALI PRIMI.

Consideriamo un'equazione autonoma  $\dot{x} = f(x)$ , con  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  di classe  $C^1$  sull'aperto  $D$  di  $\mathbb{R}^n$ . Una funzione  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  si dice *integrale primo* dell'equazione differenziale se per ogni  $x_0 \in D$ ,  $t \in I(x_0)$ , si ha

$$V(\Phi(t, x_0)) = V(x_0). \quad (4.5.1)$$

L'utilità degli integrali primi è legata al fatto che non occorre conoscere  $\Phi$  per verificare (4.5.1) almeno per  $V \in C^1$  che è integrale primo se e solo se il prodotto scalare fra il gradiente di  $V$  e il campo vettoriale  $f$  è la funzione nulla

$$\dot{V}(x) := \nabla V(x) \cdot f(x) = 0 \quad \text{per ogni } x \in D \quad (4.5.2)$$

come si verifica subito. Ad esempio l'equazione del secondo ordine  $\ddot{q} = -\nabla U(q)$ , con  $q \in \mathbb{R}^n$  e  $U \in C^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ , è equivalente al sistema

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -\nabla U(q) \end{cases} \quad (q, p) \in \mathbb{R}^{2n} \quad (4.5.3)$$

che ha la seguente funzione come integrale primo detto integrale dell'energia

$$E(q, p) = \frac{1}{2}|p|^2 + U(q). \quad (4.5.4)$$

La verifica è immediata. Nel caso particolare del sistema (4.4.7)

$$E : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (q, p) \mapsto \frac{1}{2}p^2 + q^2 \left( q - \frac{a}{2} \right). \quad (4.5.5)$$

Una funzione  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  costante è sempre un integrale primo per una qualsiasi equazione differenziale  $\dot{x} = f(x)$  in  $D$ . Si tratta però di un integrale primo banale, assolutamente inutile. Possiamo anzi dire banale un integrale primo continuo che sia costante su un aperto contenuto in  $D$ . L'esistenza di integrali primi (globali) *continui non banali* è un fatto eccezionale se pensiamo all'equazione  $\dot{x} = f(x)$  nel mondo di tutte le E.D.O. autonome.

## 5.1 PRINCIPIO DI INVARIANZA.

In questo capitolo consideriamo equazioni autonome in aperti di  $\mathbb{R}^n$

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in D = D^\circ \subseteq \mathbb{R}^n. \quad (5.1.1)$$

Consideriamo  $f \in C^1(D; \mathbb{R}^n)$ . Ci interessa studiare l'attrattività dell'equilibrio, più in generale gli  $\omega$ -limiti, e la stabilità dell'equilibrio. A tal fine uno strumento fondamentale di indagine sono le *funzioni debolmente di Liapunov*.

**Definizione 5.1.1.** *Con riferimento all'equazione (5.1.1) diciamo funzione debolmente di Liapunov una funzione  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  che sia continua e decresca debolmente lungo le soluzioni. In particolare una  $V$  differenziabile tale che  $\dot{V}(x) := \nabla V(x) \cdot f(x) \leq 0$  per ogni  $x \in D$ .*

Le funzioni debolmente di Liapunov a volte sono integrali primi (vedi Paragrafo 4.5). In qualche caso la loro scelta è naturale, in genere comunque è un lavoro di ricerca tutt'altro che banale.

L'esistenza di una funzione debolmente di Liapunov ha notevoli conseguenze. In questo paragrafo vedremo alcuni fatti sull'insieme  $\omega$ -limite, dovuti a LaSalle, e indipendentemente a Krasovskii, che hanno importanti estensioni ed applicazioni anche in dimensione infinita. Per rendere più chiaro il seguente Lemma lo presentiamo in un contesto generale, riferendoci all'insieme  $\omega$ -limite di una curva continua  $\beta: [0, b[ \rightarrow D$ . Anche se questa non è la soluzione di un'equazione differenziale, possiamo definire il suo  $\omega$ -limite come l'insieme dei punti  $y \in D$  tali che esista una successione di istanti di  $[0, b[$  che tende a  $b$ ,  $t_j \rightarrow b$  per  $j \rightarrow \infty$ , tale che  $\beta(t_j) \rightarrow y$  per  $j \rightarrow \infty$ .

**Lemma 5.1.2.** *Sia  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $V: D \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua,  $\beta: [0, b[ \rightarrow D$  una curva continua, tali che  $V$  sia debolmente decrescente lungo  $\beta$ . Allora  $V$  è costante sull' $\omega$ -limite della curva.*

*Dimostrazione.* Vogliamo dimostrare che sull' $\omega$ -limite, se non è vuoto, la funzione ha il valore costante

$$\inf_{t \in [0, b[} V(\beta(t)) \quad (5.1.1)$$

che è automaticamente finito. Sia infatti  $y$  un punto qualsiasi dell' $\omega$ -limite. Esiste allora una successione  $t_j \rightarrow b$  tale che  $\beta(t_j) \rightarrow y$ . Ma allora, visto che  $V$  e  $\beta$  sono continue e  $t \mapsto V(\beta(t))$  è debolmente decrescente,

$$-\infty < V(y) = \lim_{j \rightarrow +\infty} V(\beta(t_j)) = \lim_{t \rightarrow b} V(\beta(t)) = \inf_{t \in [0, b[} V(\beta(t)). \quad (5.1.2)$$

□

**Teorema 5.1.3.** *Principio di invarianza.* *Siano  $D$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$ ,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  di classe  $C^1$ . Assumiamo inoltre che esista una funzione debolmente di Liapunov differenziabile  $V: D \rightarrow \mathbb{R}$ , cioè con  $\dot{V}(x) := \nabla V(x) \cdot f(x) \leq 0$  per ogni  $x \in D$ . Sia infine  $M$  il più grande sottoinsieme di  $S := \{x \in D : \dot{V}(x) = 0\}$  che sia invariante per il flusso, cioè  $M = \{x \in S : \gamma(x) \subseteq S\}$ . Allora l' $\omega$ -limite di ciascun  $x_0 \in D$  è contenuto in  $M$ . Se poi l'orbita futura  $\gamma_+(x_0)$  ha chiusura in  $D$  compatta allora  $\text{dist}(\Phi(t, x_0), M) \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow +\infty$ .*

*Dimostrazione.* Si sa che, se  $y \in \omega(x_0) \neq \emptyset$  allora la soluzione  $t \mapsto \Phi(t, y)$  è tutta contenuta in  $\omega(x_0)$ , sul quale la  $V$  è costante per la proposizione precedente. Allora derivando la funzione costante  $t \mapsto V(\Phi(t, y))$  rispetto a  $t$  otteniamo

$$0 = \frac{d}{dt} V(\Phi(t, y)) = \nabla V(\Phi(t, y)) \cdot f(\Phi(t, y)). \quad (5.1.3)$$

Ponendo  $t = 0$  si ottiene che  $\nabla V(y) \cdot f(y) = 0$ . L' $\omega$ -limite, essendo un insieme invariante contenuto in  $\{y : \nabla V(y) \cdot f(y) = 0\}$ , è contenuto in  $M$ , che è l'unione di tutti gli insiemi invarianti contenuti in  $\{y : \nabla V(y) \cdot f(y) = 0\}$ .

Se infine l'orbita futura ha chiusura compatta in  $D$  sappiamo che c'è esistenza globale nel futuro e la sua distanza dall' $\omega$ -limite tende a 0, e dunque a maggior ragione anche la distanza da  $M$  tende a 0. □

## 5.2 ESEMPIO DI SISTEMI MECCANICI DISSIPATIVI.

Siano  $k \geq 0$  e  $U: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione regolare e consideriamo l'equazione del secondo ordine  $\ddot{q} = -\nabla U(q) - k\dot{q}$ , ossia il sistema del primo ordine

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ -\nabla U(q) - kp \end{pmatrix}. \quad (5.2.1)$$

Allora la funzione energia  $E(q, p) = \frac{1}{2}|p|^2 + U(q)$  è decrescente lungo le soluzioni:

$$\begin{aligned} \dot{E}(q, p) &= (\nabla U(q), p) \cdot (p, -\nabla U(q) - kp) = \\ &= \nabla U(q) \cdot p - p \cdot \nabla U(q) - k|p|^2 = -k|p|^2 \leq 0. \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

Nel caso particolare  $k = 0$  l'energia è un integrale primo (una costante del moto), e il sistema si dice "conservativo". Quando l'energia decresce si parla di sistema "dissipativo". Vediamo cosa ci dice il teorema di LaSalle. Bisogna individuare il più grande insieme invariante fatto di punti  $(q, p)$  che verifichino la condizione

$$0 = \dot{E}(q, p) = -k|p|^2 \iff p = 0, \quad (5.2.3)$$

cioè di punti del tipo  $(q, 0)$ . Osserviamo che un'orbita fatta tutta di punti della forma  $(q, 0)$  ha seconda componente identicamente nulla. Dall'equazione si ottiene  $0 \equiv \dot{p} = -\nabla U(q) - kp = -\nabla U(q)$ . L'insieme  $M$  è contenuto quindi nell'insieme dei punti  $(q, 0)$  in cui  $q$  è stazionario per  $U$ . In realtà i due insiemi sono uguali, in quanto ogni soluzione  $q(t)$  di  $\ddot{q} = -\nabla U(q) - k\dot{q}$  che parte da un punto stazionario a velocità nulla è costante. Possiamo concludere che ogni soluzione  $q(t)$  che nel futuro rimanga limitata e con velocità limitata deve avvicinarsi all'insieme dei punti stazionari di  $U$ .

Possiamo pensare che un sistema meccanico conservativo rappresenti ad esempio un sistema fisico in condizioni ideali di vuoto. La dissipazione dell'energia interviene quando teniamo conto ad esempio di un mezzo resistente come l'aria o l'acqua in cui il sistema è immerso.

## 5.3 TEOREMA DI STABILITÀ DI LIAPUNOV.

Si pensi a una conca in montagna: se è vietato salire di quota, e se siamo sotto il livello del più basso dei passi che sono attorno, allora ci è impossibile uscire.

Per essere sicuri che le soluzioni dell'equazione differenziale  $\dot{x} = f(x)$  non escano da un intorno dell'origine basta che esista una funzione reale (regolare quanto basta) che abbia nell'origine un punto di minimo stretto, e che sia decrescente quando calcolata sulle soluzioni.

**Teorema 5.3.1.** *Di Liapunov. La funzione  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  sia di classe  $C^1$  sull'aperto  $D$  di  $\mathbb{R}^n$ . Ci sia un equilibrio  $e$ , per fissare le idee, sia l'origine:  $0 \in D$  e  $f(0) = 0$ . Supponiamo che esista una funzione  $V: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile,  $0 \in \Omega = \Omega^\circ \subseteq D$ , e tale che*

- (i)  $V(x) > 0$  per ogni  $x \in \Omega \setminus \{0\}$ ,  $V(0) = 0$ , e
- (ii)  $\dot{V}(x) := \nabla V(x) \cdot f(x) \leq 0$  per ogni  $x \in \Omega$ .

Allora l'origine è un equilibrio stabile per l'equazione  $\dot{x} = f(x)$ . Se rafforziamo le ipotesi assumendo anche che

(iii)  $\dot{V}(x) < 0$  per ogni  $x \in \Omega \setminus \{0\}$ ,

allora l'origine è asintoticamente stabile.

La condizione (i) dice che  $V$  ha un minimo stretto nell'origine e la (ii) che è una funzione debolmente di Liapunov. La condizione (iii) dice che le funzioni  $t \mapsto V(\Phi(t, x_0))$  sono strettamente decrescenti.

*Dimostrazione.* Fissiamo  $\epsilon > 0$ . Possiamo prenderlo abbastanza piccolo in modo che la palla  $|x| \leq \epsilon$  sia inclusa in  $\Omega$ . Sia  $m := \min\{V(x) : |x| = \epsilon\}$ . Per (i) abbiamo  $m > 0$ . Grazie alla continuità di  $V$ , e al fatto che  $V(0) = 0$ , esiste  $\delta > 0$ ,  $\delta < \epsilon$ , tale che  $V(x_0) < m/2$  per ogni  $x_0$  tale che  $|x_0| < \delta$ . Fissiamo uno di questi  $x_0$ . Per la decrescenza della funzione  $t \mapsto V(\Phi(t, x_0))$

$$V(\Phi(t, x_0)) \leq V(x_0) < \frac{m}{2} \quad \text{per ogni } t > 0 \text{ tale che } \Phi(t, x_0) \in \Omega. \quad (5.3.1)$$

Per assurdo la soluzione attraversi la sfera  $|x| = \epsilon$  e sia  $\tau$  il più piccolo istante di attraversamento:  $\tau > 0$ ,  $|\Phi(\tau, x_0)| = \epsilon$ , e  $|\Phi(t, x_0)| < \epsilon$  per  $0 \leq t < \tau$ . Allora

$$m = \min_{|x|=\epsilon} V(x) \leq V(\Phi(\tau, x_0)) \leq V(x_0) < \frac{m}{2} \quad (5.3.2)$$

una contraddizione che prova che la soluzione non può attraversare mai la sfera  $|x| = \epsilon$ . Si ha quindi  $|\Phi(t, x_0)| < \epsilon$  per ogni  $t \in \mathbb{R}_+$  (la soluzione  $t \mapsto \Phi(t, x_0)$  esiste per ogni  $t \geq 0$  dato che l'orbita positiva sta nel compatto  $|x| \leq \epsilon$ ). Abbiamo quindi dimostrato la stabilità.

Assumiamo ora che valga (iii) e sia  $\delta$  come sopra. Facciamo vedere che

$$|x_0| < \delta \quad \implies \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi(t, x_0) = 0. \quad (5.3.3)$$

Sia  $|x_0| < \delta$ . Poiché  $\{x \in \Omega : \nabla V(x) \cdot f(x) = 0\} = \{0\}$  si ha  $\text{dist}(\Phi(t, x_0), \{0\}) \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow +\infty$  per il principio di invarianza.  $\square$

Usando il teorema di Liapunov dimostriamo che l'occhio del pesce è stabile, cioè che l'equilibrio  $(q, p) = (a/3, 0)$  è stabile per (4.4.7). La funzione differenziabile su tutto il piano  $V(q, p) = E(q, p) - E(a/3, 0)$ , con  $E$  come in (4.5.5), è un integrale primo quindi vale (ii) con  $\dot{V}(q, p) = 0$ . Proviamo che  $(q, p) = (a/3, 0)$  è un punto di minimo locale stretto, da ciò segue (i) dato che  $V(a/3, 0) = 0$ . Si ha  $\partial_q V(q, p) = 3q^2 - aq$ ,  $\partial_p V(q, p) = p$ , pertanto  $\partial_q V(a/3, 0) = 0$ ,  $\partial_p V(a/3, 0) = 0$ , infine la matrice Hessiana è definita positiva nel punto in questione:

$$V''(q, p) = \begin{pmatrix} 6q - a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V''(a/3, 0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} > 0.$$

## 5.4 STABILITÀ ASINTOTICA E INSTABILITÀ DALLA LINEARIZZAZIONE.

**Lemma.** *Sia  $A$  una matrice reale  $n \times n$  con autovalori con parti reali  $< 0$ . Allora esiste una matrice simmetrica definita positiva  $L$  tale che*

$$A^T L + LA = -I.$$

*Dimostrazione.* Sia  $a > 0$  tale che gli autovalori di  $A$  abbiano parti reali  $< -a$ . Allora, esiste  $k \geq 1$  tale che valga la formula

$$\|e^{tA}\| \leq ke^{-ta} \quad \text{per ogni } t \geq 0. \quad (\star)$$

Infatti, dalla decomposizione fondamentale, sappiamo che esiste una matrice reale invertibile  $P$  tale che  $A = P(\diamond + \Delta)P^{-1}$  con  $\diamond$  matrice reale quasi-diagonale,  $\Delta$  matrice nilpotente, e con  $\diamond\Delta = \Delta\diamond$ . Gli autovalori di  $A$  coincidono con quelli di  $\diamond$ . Possiamo considerare  $\epsilon > 0$  tale che le parti reali degli autovalori siano  $< -a - \epsilon < 0$ . Per  $t \geq 0$ , dalla formula dell'esponenziale di  $t\diamond$  si ha quindi

$$\|e^{tA}\| \leq \|P^{-1}\| \|P\| e^{-ta} e^{-t\epsilon} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k \|\Delta^k\|}{k!}. \quad (\star\star)$$

Per un qualunque polinomio  $p(t)$  si ha  $e^{-t\epsilon}p(t) \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow +\infty$ , perciò la funzione  $e^{-t\epsilon}p(t)$  è limitata per  $t \geq 0$  e  $(\star\star)$  dà  $(\star)$  con  $k \geq 1$  opportuno.

Dalla  $(\star)$ , e dall'analogia formula per  $A^T$  che ha gli stessi autovalori di  $A$ , si ha che il seguente integrale converge e possiamo porre

$$L := \int_0^{+\infty} e^{tA^T} e^{tA} dt.$$

Si ha  $L = L^T$  perché la funzione integranda è simmetrica; inoltre  $L > O$  poiché per ogni  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , essendo  $e^{tA}$  invertibile, abbiamo

$$x \cdot Lx = \int_0^{+\infty} (e^{tA} x) \cdot (e^{tA} x) dt > 0$$

(il puntino denota il prodotto scalare usuale in  $\mathbb{R}^n$ ). Infine:

$$A^T L + LA = \int_0^{+\infty} \left( A^T e^{tA^T} e^{tA} + e^{tA^T} e^{tA} A \right) dt = \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} \left( e^{tA^T} e^{tA} \right) dt = -I.$$

□

**Teorema 5.4.1.** *Sia  $f \in C^1(D; \mathbb{R}^n)$ , con  $D$  aperto di  $\mathbb{R}^n$  che contiene l'origine, e sia  $f(0) = 0$ . Se la matrice Jacobiana nell'origine  $f'(0)$  ha autovalori con parti reali tutte strettamente negative, allora l'equilibrio è asintoticamente stabile per  $\dot{x} = f(x)$ .*



*Dimostrazione.* Per il Lemma, esiste una matrice simmetrica e definita positiva  $L$  tale che

$$f'(0)^T L + Lf'(0) = -I. \quad (5.4.1)$$

Definiamo  $V(x) := x \cdot Lx$  e verifichiamo che è una funzione che soddisfa le ipotesi del Teorema 5.1.1, inclusa (iii). Innanzi tutti si ha che  $V$  è definita positiva, cioè  $V(x) > 0$  per ogni  $x \neq 0$  e  $V(0) = 0$ . Per verificare che, in un intorno dell'origine, la funzione  $x \mapsto \dot{V}(x)$  è definita negativa, usiamo

$$\dot{x} = f(x) = f'(0)x + o(|x|), \quad (5.4.2)$$

e la (5.4.1):

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \nabla V(x) \cdot f(x) = f(x) \cdot Lx + x \cdot Lf(x) = \\ &= f'(0)x \cdot Lx + x \cdot Lf'(0)x + o(|x|^2) = \\ &= x \cdot (f'(0)^T L + Lf'(0)) x + o(|x|^2) = \\ &= -|x|^2 + o(|x|^2). \end{aligned} \quad (5.4.3)$$

Poichè

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\dot{V}(x)}{|x|^2} = -1,$$

c'è un intorno dell'origine dove  $\dot{V}(x) < 0$  salvo che nell'origine stessa. □

Abbiamo visto che un equilibrio dove la matrice Jacobiana ha autovalori con parti reali strettamente negative è asintoticamente stabile, e in particolare è quindi un attrattore. Nel caso in cui le parti reali siano strettamente positive è naturalmente un *repulsore* (o sorgente) cioè tutte le soluzioni in un intorno dell'equilibrio tendono ad esso per  $t \rightarrow -\infty$ . Più precisamente, scambiando  $t$  con  $-t$ , considerando quindi l'equazione  $\dot{x} = -f(x)$  definita dal campo vettoriale opposto, si ottiene un equilibrio asintoticamente stabile. Un esempio è l'origine per

$$\dot{x} = x(1 - x^2 - y^2) - y, \quad \dot{y} = y(1 - x^2 - y^2) + x, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

che abbiamo visto come sistema con un 'ciclo limite' (basta passare a coordinate polari). Si verifica facilmente che la matrice Jacobiana del campo vettoriale nell'origine ha autovalori  $1 \pm i$  che hanno parti reali strettamente positive.

Riportiamo infine senza dimostrazione il seguente fatto: basta che un solo autovalore abbia parte reale  $> 0$  per avere instabilità.

**Teorema 5.4.2.** *Sia  $f \in C^1(D; \mathbb{R}^n)$ , con  $D$  aperto di  $\mathbb{R}^n$  che contiene l'origine, e sia  $f(0) = 0$ . Se la matrice Jacobiana nell'origine  $f'(0)$  ha un autovalore con parte reale  $> 0$ , allora l'equilibrio è instabile per  $\dot{x} = f(x)$ .*

Un esempio è l'origine per (4.4.7) dato che si verifica facilmente che la matrice Jacobiana del campo vettoriale nell'origine ha autovalori  $\pm\sqrt{a}$  (sella non-lineare). Si noti infine che nell'occhio del pesce  $(a/3, 0)$ , che già sappiamo essere stabile ma non attrattore (centro non-lineare), gli autovalori sono  $\pm i\sqrt{a}$ , appartengono quindi all'asse immaginario.

## 5.7 IL PENDOLO SEMPLICE.

Dalla Meccanica è nota l'equazione del secondo ordine  $\ddot{q} + c \sin q = 0$  con  $q \in \mathbb{R}$  e  $c > 0$  parametro reale. Si dice equazione del *pendolo semplice* ed è equivalente al sistema non-lineare piano

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -c \sin q \end{cases} \quad (q, p) \in \mathbb{R}^2. \quad (5.7.1)$$

Si tratta di un caso particolare del sistema (4.5.3) e, già sappiamo che ha l'integrale primo dell'energia (4.5.4) che nel nostro caso è

$$E(q, p) = \frac{1}{2}|p|^2 - c \cos q + c \quad (5.7.2)$$

dove abbiamo usato la libertà che abbiamo di una costante additiva per avere  $E(0, 0) = 0$ . Si vede subito che  $E(q, p) > 0$  per ogni  $(q, p) \neq (0, 0)$  in un opportuno intorno dell'origine. Essendo inoltre  $E$  costante lungo le soluzioni, sono soddisfatte le ipotesi (i) e (ii) del teorema di Liapunov 5.3.1 con  $V = E$  e l'origine è stabile.

Indichiamo con  $f$  il campo vettoriale in (5.7.1) e con  $f'$  il campo di matrici Jacobiane. Per ogni  $m \in \mathbb{Z}$

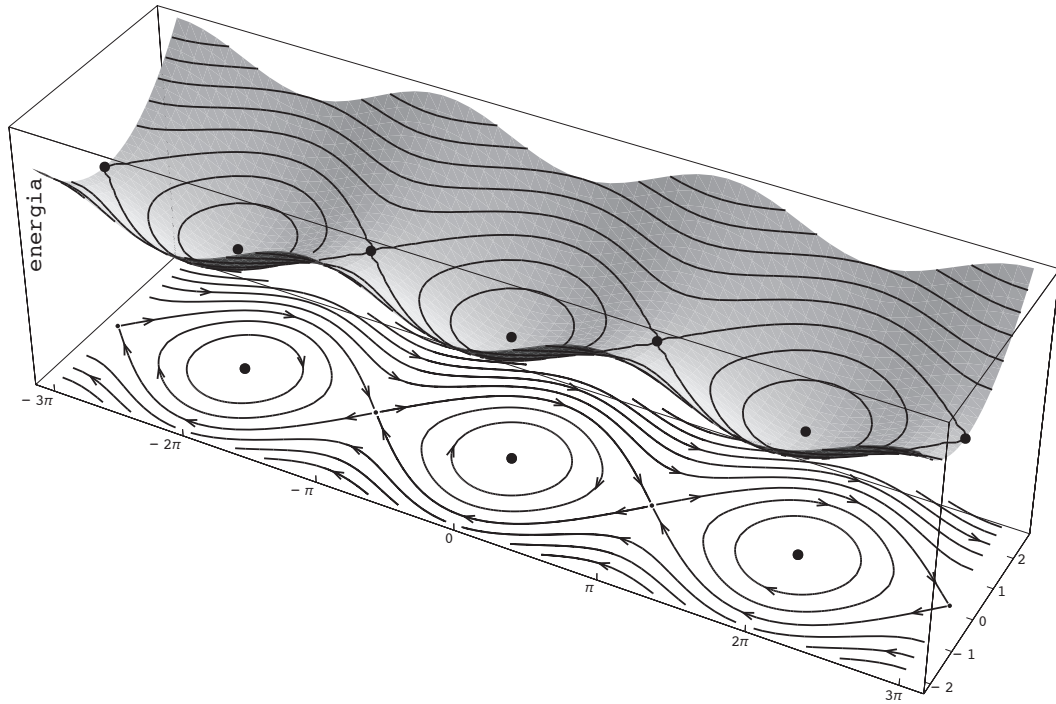
$$f(q, p) = \begin{pmatrix} p \\ -c \sin q \end{pmatrix}, \quad f(m\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.7.3)$$

$$f'(q, p) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c \cos q & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.7.4)$$

$$f'(2m\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & 0 \end{pmatrix}, \quad f'((2m+1)\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.7.5)$$

Tutti i punti  $(2m\pi, 0)$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ , oltre all'origine, sono equilibri, e la funzione  $E$  come per l'origine prova che sono tutti stabili. Invece gli equilibri  $q = (2m+1)\pi$ , per ogni  $m \in \mathbb{Z}$ , sono instabili, infatti la seconda matrice in (5.7.5) ha autovalori  $\pm\sqrt{c}$  e il Teorema 5.6.2 ci permette di concludere. Incidentalmente la matrice Jacobiana nei punti  $2m\pi$  ha autovalori immaginari  $\pm i\sqrt{c}$ .

In figura mostriamo il ritratto di fase che il lettore è invitato a intuire pensando ad un pendolo semplice fisico che si muove in un piano verticale essendo  $q$  l'angolo che forma con la verticale discendente orientato in verso antiorario. Si noti che tutte le orbite in un intorno di ciascun equilibrio stabile sono periodiche e racchiudono l'equilibrio che è quindi un *centro* non-lineare (come l'occhio del pesce). Ci sono anche orbite che collegano due equilibri instabili, dette eterocline. Incidentalmente, la periodicità in  $q$  dell'equazione differenziale, porterebbe a considerarla meglio come equazione sul cilindro invece che su  $\mathbb{R}^2$ . In questo modo le orbite eterocline diventerebbero omocline e il ritratto di fase corrisponderebbe più direttamente all'interpretazione fisica.



Fin qui abbiamo visto il pendolo semplice *conservativo* per la presenza dell'integrale dell'energia. L'equazione del secondo ordine  $\ddot{q} + c \sin q + k\dot{q} = 0$ , con  $q \in \mathbb{R}$  e  $c, k > 0$  parametri reali, si dice invece equazione del *pendolo semplice con smorzamento*. Si tratta di un modello matematico che tiene conto della presenza per esempio dell'aria che per velocità non troppo grandi offre una resistenza lineare nella velocità  $-k\dot{q}$  che non compariva nell'equazione del pendolo semplice conservativo. L'equazione  $\ddot{q} + c \sin q + k\dot{q} = 0$  equivale al sistema non-lineare piano

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -c \sin q - kp \end{cases} \quad (q, p) \in \mathbb{R}^2. \quad (5.7.6)$$

Indichiamo con  $f$  il campo vettoriale e con  $f'$  il campo di matrici Jacobiane. Per ogni  $m \in \mathbb{Z}$

$$f(q, p) = \begin{pmatrix} p \\ -c \sin q - kp \end{pmatrix}, \quad f(m\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.7.7)$$

$$f'(q, p) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c \cos q & -k \end{pmatrix}, \quad f'(2m\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & -k \end{pmatrix}. \quad (5.7.8)$$

I punti  $(2m\pi, 0)$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ , e in particolare l'origine, sono tutti equilibri in cui la matrice Jacobiana ha autovalori  $(-k \pm \sqrt{k^2 - 4c})/2$  le cui parti reali sono strettamente negative. Per il Teorema 5.4.1 sono quindi asintoticamente stabili.

Potevamo usare l'energia (5.7.2) per provare la stabilità asintotica? Si ha

$$\dot{E}(q, p) = \nabla E(q, p) \cdot f(q, p) = (c \sin q) p + p (-c \sin q - kp) = -kp^2 \leq 0 \quad (5.7.9)$$

questa funzione non è però definita negativa in un intorno dei suddetti equilibri e quindi, tramite il teorema di Liapunov, ci dà solo la stabilità, come nel caso conservativo.

Possiamo però usare il principio di invarianza. Infatti,  $M = \{(q, p) : \nabla U(q) = 0, p = 0\}$ , e i punti di  $M$  sono isolati.

Abbiamo provato la stabilità asintotica in due modi, il primo, che usa gli autovalori, si rifà al teorema di Liapunov tramite una funzione ausiliaria quadratica. Si possono considerare altre funzioni di Liapunov come

$$V(q, p) := p^2 + (p + q)^2 + 4(1 - \cos q), \quad (5.7.10)$$

$$\dot{V}(q, p) = \nabla V(q, p) \cdot f(q, p) = -2(p^2 + q \sin q), \quad (5.7.11)$$

che si verifica subito soddisfa tutte le condizioni del Teorema 5.3.1 in un opportuno intorno dell'origine. A volte si riesce a produrre funzioni di Liapunov “non naturali” come questa per provare la stabilità o la stabilità asintotica, è comunque una ricerca non banale e spesso gli sforzi per produrle non sono compensati da successo. Quando si riesce a produrle, sono un potente mezzo anche per la stima del bacino d'attrazione.

Invece

$$f'((2m + 1)\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c & -k \end{pmatrix}. \quad (5.7.12)$$

I punti  $((2m + 1)\pi, 0)$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ , e in particolare  $(\pi, 0)$ , sono tutti equilibri in cui la matrice Jacobiana ha un autovalore strettamente negativo e uno strettamente positivo come nel caso conservativo. In base al Teorema 5.6.2 sono così riconosciuti instabili (in accordo con l'esperienza fisica di ognuno di noi). In figura vediamo il ritratto di fase per il pendolo con resistenza di mezzo.

