Analisi Matematica per Bio-Informatici
Esercitazione 14 – a.a. 2007-2008

Dott. Simone Zuccher

06 Marzo 2008

Nota. Queste pagine potrebbero contenere degli errori: chi li trova è pregato di segnalarli all'autore (zuccher@sci.univr.it).

1 Equazioni differenziali

Si chiama *equazione differenziale ordinaria di ordine* n una relazione nella forma

$$F(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0, \qquad F : \mathbb{R}^{n+2} \subseteq A \to \mathbb{R}.$$

L'equazione si dice *lineare* se F è una funzione lineare di y e delle sue derivate, si dice *autonoma* se F non dipende esplicitamente dal tempo. Alcune tipologie ricorrenti sono le seguenti:

- A variabili separabili. Si presentano nella forma

  $$y' = f(t)g(y),$$

  con $f \in C(I)$ e $g \in C(J)$ $(I, J \subseteq \mathbb{R})$).
  Se $\bar{y}$ è soluzione dell'equazione $g(y) = 0$ allora la retta $y = \bar{y}$ è una curva integrale.
  Se $g(y) \neq 0$ in $J' \subseteq J$ allora l'integrale generale è dato da

  $$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(t) dt + c.$$

- Del prim'ordine. Si presentano nella forma

  $$y' + P(t)y = Q(t),$$

  dove P, Q sono funzioni continue in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$. Se $Q = 0$ l'equazione si dice omogenea. Per integrare queste equazioni si osservi che moltiplicando entrambi i membri per $e^{\int P(t)dt}$, che è sempre non nullo, si ha

  $$e^{\int P(t)dt}[y'(t) + P(t)y(t)] = e^{\int P(t)dt} Q(t),$$

$\Delta > 0$	$\lambda_1 \neq \lambda_2$	$y_o(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$
$\Delta = 0$	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$	$y_o(t) = (c_1 + c_2 t) e^{\lambda t}$
$\Delta < 0$	$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y_o(t) = e^{\alpha t}[c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t)]$

Tabella 1: Soluzione omogenea y_o nel caso di equazione differenziale del secon'ordine a coefficienti costanti

ma essendo

$$e^{\int P(t)dt}[y'(t) + P(t)y(t)] = \left[e^{\int P(t)dt} y(t)\right]',$$

si ha

$$\left[e^{\int P(t)dt} y(t)\right]' = e^{\int P(t)dt} Q(t),$$

da cui, integrando a destra e a sinistra, si ottiene

$$e^{\int P(t)dt} y(t) = \int Q(t) e^{\int P(t)dt} dt + c$$

ed infine

$$y(t) = e^{-\int P(t)dt} \left[\int Q(t) e^{\int P(t)dt} dt + c\right].$$

Si osservi che, in pratica, basta riscrivere l'equazione portando tutti i termini che dipendono da y (ossia y e y') al primo membro e normalizzare l'equazione in modo che il coefficiente di y' sia 1. Quindi, il fattore per il quale moltiplicare a destra e sinistra è l'esponenziale dell'integrale del coeffciente di y.

- Second'ordine lineari a coefficienti costanti. Si presentano nella forma

$$ay'' + by' + cy = f(t),$$

dove a, b, c sono costanti reali e $f(t)$ viene spesso chiamata "forzante". Se $f(t) = 0$ allora l'equazione si dice omogenea. Si osservi che, essendo l'equazione lineare, vale il principio di sovrapposizione degli effetti e, pertanto, se $y_o(t)$ indica la soluzione associata all'equazione omogenea e $y_p(t)$ indica una particolare soluzione ottenuta con il termine forzante, allora la soluzione generale di un'equazione non omogenea è data da

$$y(t) = y_o(t) + y_p(t).$$

Caso omogeneo. Consideriamo il caso $ay'' + by' + cy = 0$. Il fatto che la somma della funzione incognita con alcune sue derivate (moltiplicate per dei coefficienti) debba essere nulla suggerisce di cercare delle soluzioni che siano proporzionali alle loro derivate, i.e. funzioni del tipo $y(t) = e^{\lambda t}$. Evidentemente si ha $y'(t) = \lambda e^{\lambda t}$ e $y''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$, da cui $a\lambda^2 e^{\lambda t} + b\lambda e^{\lambda t} + ce^{\lambda t} = 0$, i.e.

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0.$$

$f(t) = Q_k(t)$	$y_p(t) = \begin{cases} \widetilde{Q}_k(t) & \text{se } P_2(0) \neq 0 \\ t\widetilde{Q}_k(t) & \text{se } 0 \text{ è radice di } P_2 \text{ di molteplictà } 1 \\ t^2\widetilde{Q}_k(t) & \text{se } 0 \text{ è radice di } P_2 \text{ di molteplictà } 2 \end{cases}$
$f(t) = ae^{\lambda t}$	$y_p(t) = \begin{cases} Ae^{\lambda t} & \text{se } P_2(\lambda) \neq 0 \\ Ate^{\lambda t} & \text{se } \lambda \text{ è radice di } P_2 \text{ di molteplictà } 1 \\ At^2e^{\lambda t} & \text{se } \lambda \text{ è radice di } P_2 \text{ di molteplictà } 2 \end{cases}$
$f(t) = e^{\alpha t}Q_k(t)\cos(\beta t)$ $f(t) = e^{\alpha t}Q_k(t)\sin(\beta t)$	$y_p(t) = \begin{cases} e^{\alpha t}[A_k(t)\cos(\beta t) + B_k(t)\sin(\beta t)] & \text{se } P_2(\alpha \pm i\beta) \neq 0 \\ te^{\alpha t}[A_k(t)\cos(\beta t) + B_k(t)\sin(\beta t)] & \text{se } P_2(\alpha \pm i\beta) = 0 \end{cases}$

Tabella 2: Soluzione particolare y_p nel caso di equazione differenziale del secon'ordine a coefficienti costanti

$P_2(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$ prende il nome di *polinomio caratteristico* ed ammette due soluzioni reali e distinte se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, due soluzioni reali concidenti se $\Delta = 0$ e due soluzioni complesse coniugate se $\Delta < 0$. Per ciascuno di questi casi si hanno le famiglie di soluzioni riportate in tabella 1 che variano al variare di due costanti arbitrarie $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ da determinarsi in base alle condizioni iniziali.
Caso non omogeneo. Come detto, per determinare *tutte* le soluzioni dell'equazione $ay'' + by' + cy = f(t)$ basta trovarne una particolare $y_p(t)$ e sommarla a quella omogenea $(y_o(t))$ ottenuta con $f(t) = 0$. Ipotizzando per $f(t)$ una forma polinomiale del tipo $Q_k(t)$, dove k è il grado del polinomio, oppure una forma esponenziale del tipo $ae^{\lambda t}$, oppure una forma goniometrica del tipo $e^{\alpha t}Q_k(t)\cos(\beta t)$ (oppure $\sin(\beta t)$), ed indicando con P_2 il polinomio caratteristico associato all'equazione omogenea, si hanno i casi riportati in tabella 2.

Esercizio 1.1 *Risolvere l'equazione $y' = t/y$.*

Risoluzione. Si noti che, secondo la notazione introdotta, si ha $f(t) = t$ e $g(y) = 1/y$. Pertanto l'equazione $g(y) = 0$ non ammette soluzioni. Si osservi, inoltre, che deve essere $y(t) \neq 0$, altrimenti l'equazione differenziale perde di significato. Riscrivendo $y' = dy/dt$ si ha $dy/dt = t/y$ da cui $ydy = tdt$. Integrando si ottiene $\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}t^2 + c$ che, dopo aver posto $\bar{c} = -2c$, si osserva essere l'equazione di un'iperbole equilatera nel piano (t, y) nella forma

$$t^2 - y^2 = \bar{c} \qquad \Rightarrow \qquad y = \pm\sqrt{t^2 - \bar{c}}.$$

Pertanto, la soluzione è definita $\forall\, t \in \mathbb{R}$ se $\bar{c} < 0$ (i.e. i fuochi dell'iperbole sono sull'asse t), oppure per $t < -\sqrt{\bar{c}}$ e $t > \sqrt{-\bar{c}}$ se $\bar{c} > 0$ (i.e. i fuochi dell'iperbole sono sull'asse t). Chiaramente, la costante $\bar{c}$ dipende dalla condizione iniziale $y(t_0) = y_0$, perché $\bar{c} = t_0^2 - y_0^2$

e quindi al variare di essa si ottiene l'una o l'altra iperbole, con l'esclusione dei punti $y = 0$ (non ammessi). ■

Esercizio 1.2 *Risolvere l'equazione* $y' = 2t\sqrt{1-y^2}$.

Risoluzione. In questo caso si ha $f(t) = 2t$ e $g(y) = \sqrt{1-y^2}$, per cui le rette $y = 1$ e $y = -1$ sono soluzioni stazionarie. Inoltre, l'equazione data ha significato solo per $1 \leq y \leq 1$ e quindi tali rette costituiscono anche la frontiera dell'insieme defizione di $2t\sqrt{1-y^2}$. Le altre soluzioni si trovano, sotto l'ipotesi $y \neq \pm 1$, allo stesso modo di prima, ossia riscrivendo $y' = dy/dt$ da cui

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy = 2\int t dt + c \quad \Rightarrow \quad \arcsin y = t^2 + c \quad \Rightarrow \quad y = \sin(t^2 + c)$$

. Come in precedenza, la costante $\bar{c}$ dipende dalle condizioni iniziali. ■

Esercizio 1.3 *Determinare la funzione* $y(t)$ *che soddisfa l'equazione* $y' = t^2 y^3$ *e tale per cui* $y(1) = 3$.

Risoluzione. La soluzione stazionaria è $y = 0$. Riscrivendo $y' = dy/dt$ si ha $dy/dt = t^2 y^3$ da cui $dy/y^3 = t^2 dt$. Integrando si ottiene $-\frac{1}{2y^2} = \frac{t^3}{3} + c$, ma siccome $y(1) = 3$, sostituendo, si ricava $-\frac{1}{18} = \frac{1}{3} + c$ da cui $c = -\frac{7}{18}$. La soluzione cercata, pertanto, soddisfa l'equazione $-\frac{1}{2y^2} = \frac{t^3}{3} - \frac{1}{18}$, da cui

$$y(t) = \frac{3}{\sqrt{7 - 6t^3}}$$

Si noti che la soluzione è definita solo per $t \leq \sqrt[3]{7/6}$. ■

Esercizio 1.4 *Determinare la funzione* $y(t)$ *che soddisfa i seguenti problemi di Cauchy*

$$(a) \quad \begin{cases} y' = 2ty^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad\qquad (b) \quad \begin{cases} y' = 2ty^2 \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

Risoluzione. Evidentemente l'equazione differenziale è la stessa in entrambi i casi, ma varia la condizione iniziale. La soluzione stazionaria è $y = 0$, che non è la soluzione di nessuno dei due problemi a causa della condizione iniziale ($y(0) \neq 0$). Procedendo come prima si ha

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int 2t dt \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{y} = t^2 + c \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{t^2 + c}.$$

Si noti il diverso dominio delle soluzioni dipendentemente da c. Imponendo $y(0) = 1$ si ha $c = -1$ mentre da $y(0) = -1$ si ha $c = 1$, da cui le rispettive soluzioni

$$(a) \quad y = \frac{1}{1 - t^2} \qquad\qquad (b) \quad y = -\frac{1}{1 + t^2}$$

$\blacksquare$

Esercizio 1.5 *Determinare la funzione $y(t)$ che soddisfa il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = 2t(\cos y)^2 \\ y(0) = 2\pi \end{cases}$$

Risoluzione. Essendo $g(y) = (\cos y)^2$ le soluzioni che soddisfano $\cos y = 0 \Rightarrow y = \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ sono soluzioni stazionarie (rette orizzontali). Procedendo come noto si ha

$$\int \frac{1}{(\cos y)^2} dy = \int 2t dt \quad \Rightarrow \quad \tan y = t^2 + c \quad \Rightarrow \quad y = \arctan(t^2 + c) + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Imponendo $y(0) = 2\pi$ si ha $c = 0$ da cui $2\pi = 0 + k\pi$, ovvero $k = 2$, da cui la soluzione

$$y = \arctan(t^2) + 2\pi.$$

Si noti che, essendo $\lim_{t\to+\infty} y(t) = \frac{5}{2}\pi$ e $\lim_{t\to-\infty} y(t) = \frac{3}{2}\pi$, il grafico della soluzione è compreso tra le soluzioni stazionarie $y = \dfrac{3}{2}\pi$ e $y = \dfrac{5}{2}\pi$. $\blacksquare$

Esercizio 1.6 *Determinare la funzione $y(t)$ che soddisfa l'equazione differenziale*

$$y' = -y + t.$$

Risoluzione. L'equazione data è lineare del prim'ordine e quindi può essere risolta portando tutto ciò che dipende dalla soluzione (y e y') a sinistra e moltiplicando per l'esponenziale di un opportuno fattore. Quindi, da $y' + y = t$ si ha che il coefficiente di y è 1 e pertanto il fattore cercato è e^t essendo t l'integrale di dt. Pertanto si ha

$$e^t[y'(t) + y(t)] = e^t t \quad \Rightarrow \quad [e^t y(t)]' = e^t t \quad \Rightarrow \quad e^t y(t) = \int [e^t t] dt + c,$$

ma essendo $\int [e^t t] dt = e^t(t-1)$ (per parti), si ha

$$e^t y(t) = e^t(t-1) + c \quad \Rightarrow \quad y(t) = t - 1 + ce^{-t}.$$

La soluzione è definita su tutto $\mathbb{R}$ e dipende dalla costante c da determinarsi in base alla condizione iniziale. $\blacksquare$

Esercizio 1.7 *Determinare la funzione $y(t)$ che soddisfa il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{y}{t} + 4t^2 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Risoluzione. Si noti innazi tutto che il coefficiente di y è una funzione continua solo per $t < 0 \vee t > 0$, e quindi la soluzione non è definita in $t = 0$. Questo significa anche che se una soluzione passa da un punto del piano (t, y) caratterizzato da $t < 0$, allora essa rimane confinata nel semipiano $t < 0$ e viceversa. Riscrivendo l'equazione con i termini in y e y' a sinistra, si osserva che il coefficiente di y $(1/t)$ ha come integrale $\log|t|$. Pertanto il fattore moltiplicativo è $e^{\log|t|} = |t|$, ma essendo interessati solo al caso $t > 0$ (si veda la condizione iniziale del problema di Cauchy), si ha

$$y' + \frac{y}{t} = 4t^2 \quad \Rightarrow \quad t\left[y' + \frac{y}{t}\right] = 4t^3 \quad \Rightarrow \quad \int [ty(t)]'dy = \int 4t^3 dt + c$$

da cui

$$y(t)t = t^4 + c \quad \Rightarrow \quad y(t) = t^3 + \frac{c}{t}.$$

Imponendo $y(1) = 0$ si ha $c = -1$ da cui $y = t^3 - \dfrac{1}{t}$. Si osservi che la soluzione ha un asintoto verticale in $t = 0$ ma è definita altrove, sia per $t < 0$ che per $t > 0$. Nel nostro caso, però, a seguito della condizione iniziale, occorre considerare *solo* la soluzione per $t > 0$ ■

Esercizio 1.8 *Determinare la funzione $y(t)$ che soddisfa l'equazione differenziale*

$$y' = \frac{y}{e^t + 1} + e^t.$$

Risoluzione. In questo caso l'insieme di definizione è tutto $\mathbb{R}$. Riscrivendo l'equazione come $y' - \dfrac{y}{e^t + 1} = e^t$ si osserva che è necessario calcolare l'integrale

$$-\int \frac{y}{e^t + 1} dt = \int \frac{-e^{-t}}{1 + e^{-t}} dt = \log(1 + e^{-t}).$$

Questo fornisce il fattore moltiplicativo $e^{\log(1+e^{-t})} = 1 + e^{-t}$:

$$(1 + e^{-t})\left[y' - \frac{y}{e^t + 1}\right] = e^t(1 + e^{-t}) \quad \Rightarrow \quad \int [(1 + e^{-t})y(t)]'dy = e^t + t + c,$$

da cui la soluzione

$$y(t) = \frac{e^t + t + c}{1 + e^{-t}},$$

che è definita su tutto $\mathbb{R}$ e dipende dalla costante c da determinarsi in base alla condizione iniziale. ■

Esercizio 1.9 *Determinare la funzione $y(t)$ che soddisfa l'equazione differenziale*

$$y'' - 4y' + 3y = 0.$$

Risoluzione. Si tratta di un'equazione del second'ordine, lineare a coefficienti costanti e omogenea. L'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = 1$ e $\lambda = 3$. La soluzione è quindi $y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{3t}$, dove le costanti arbitrarie sono da determinarsi in base alla condizione iniziale. ■

Esercizio 1.10 *Determinare la funzione $y(t)$ che soddisfa l'equazione differenziale*

$$y'' + 6y' + 9y = 0.$$

Risoluzione. Si tratta di un'equazione del second'ordine, lineare a coefficienti costanti e omogenea. L'equazione caratteristica è $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$, che ha due soluzioni reali e coincidenti $\lambda = -3$, ovvero una radice di molteplicità due. La soluzione è quindi $y(t) = (c_1 t + c_2)e^{-3t}$, dove le costanti arbitrarie sono da determinarsi a seguito della condizione iniziale. ■

Esercizio 1.11 *Determinare la funzione $y(t)$ che soddisfa l'equazione differenziale*

$$y'' - 4y' + 13y = 0.$$

Risoluzione. Si tratta di un'equazione del second'ordine, lineare a coefficienti costanti e omogenea. L'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda_{1,2} = 2 \pm 3i$. La soluzione dell'equazione differenziale è quindi $y(t) = e^{2t}(c_1 \cos(3t) + c_2 \sin(3t))$, dove le costanti arbitrarie sono da determinarsi in base alla condizione iniziale. ■

Esercizio 1.12 *Determinare la funzione $y(t)$ che soddisfa l'equazione differenziale*

$$y'' + 6y' + 9y = e^{-3t}.$$

Risoluzione. Si tratta di un'equazione del second'ordine, lineare a coefficienti costanti non omogenea. La parte omogenea è la stessa dell'esercizio 1.10, con polinomio caratteristico $P_2(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$, che ha due soluzioni reali e coincidenti $\lambda = -3$. Quindi, la soluzione omogenea è $y_o(t) = (c_1 t + c_2)e^{-3t}$. La soluzione particolare, secondo la tabella 2, essendo $P_2(-3) = 0$ è del tipo $y_p(t) = At^2 e^{-3t}$, da cui

$$y_p'(t) = 2\,A\,t\,e^{-3\,t} - 3\,A\,t^2\,e^{-3\,t}, \qquad y_p''(t) = 9\,A\,t^2\,e^{-3\,t} - 12\,A\,t\,e^{-3\,t} + 2\,A\,e^{-3\,t}.$$

Sostituendo nell'equazione differenziale e semplificando si ottiene

$$y_p''(t) + 6y_p'(t) + 9y_p(t) = 2Ae^{-3t},$$

da cui, dovendo essere $2Ae^{-3t} = e^{-3t}$, si ricava immediatamente $A = 1/2$. In conclusione la soluzione dell'equazione iniziale è

$$y(t) = \left(\frac{1}{2}t^2 + c_1 t + c_2\right) e^{-3t},$$

dove le costanti arbitrarie c_1 e c_2 sono da determinarsi con l'eventuale condizione iniziale. ■

Esercizio 1.13 *Determinare la funzione $y(t)$ che soddisfa l'equazione differenziale*

$$y''' + 2y'' = 4t.$$

Risoluzione. Si tratta di un'equazione del terz'ordine, lineare a coefficienti costanti e non omogenea. Procediamo dapprima al calcolo della soluzione omogenea che soddisfa $y''' + 2y'' = 0$. Il polinomio caratteristico $P_3(\lambda)$ ammette le radici $\lambda = 0$ di molteciplità 2 e $\lambda = -2$ di molteciplità 1. Pertanto, dopo aver osservato che $e^0 = 1$ e con riferimento alla tabella 1, la soluzione omogenea è

$$y_o(t) = (c_1 t + c_2) + c_3 e^{-2t}.$$

I base alla tabella 2, essendo $P_3(0) = 0$, la soluzione particolare è del tipo $y_p(t) = t^2(At + B)$. Derivando tre volte si ha

$$y_p'(t) = 3At^2 + 2Bt, \qquad y_p''(t) = 6At + 2B, \qquad y_p'''(t) = 6A,$$

e dopo la sostituzione nell'equazione differenziale di partenza si ottiene

$$6A + 2(6At + 2B) = 4t \quad \Rightarrow \quad 12At + (6A + 4B) = 4t \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{3} \text{ e } B = -\frac{1}{2}.$$

Pertanto la soluzione paticolare è

$$y_p(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2$$

e la soluzione finale dell'equazione completa è

$$y(t) = y_o(t) + y_p(t) = c_1 t + c_2 + c_3 e^{-2t} + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2,$$

dove le constanti arbitrarie c_1, c_2, c_3 sono da determinarsi in base alle condizioni iniziali (o ai limiti). Si osservi che è sempre possibile verificare la correttezza dei calcoli sostituendo l'espressione di $y(t)$ nell'equazione differenziale inziale. ■

Esercizio 1.14 *Determinare la funzione $y(t)$ che soddisfa l'equazione differenziale*

$$y'' + y = t \cos t.$$

Risoluzione. Si tratta di un'equazione del second'ordine, lineare a coefficienti costanti e non omogenea. Per la soluzione omogenea osserviamo che il polinomio caratteristico è $P_2(\lambda) = \lambda^2 + 1$, che ammette come soluzioni $\lambda = \pm i$. Pertanto,

$$y_o(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t.$$

Per la soluzione particolare, con rifermento alla tabella 2, osserviamo che $\alpha = 0$, $\beta = 1$ e $P_2(\alpha \pm i\beta) = 0$. Pertanto la soluzione particolare è del tipo

$$y_p(t) = (At + B)t \sin t + (Ct + D)t \cos t,$$

per cui derivando due volte si ha

$$y_p'(t) = (-Ct^2 - Dt - 2At + B) \sin t + (At^2 + Bt + 2Ct + D) \cos t$$

$$y_p''(t) = (-At^2 - Bt - 4Ct - 2D + 2A) \sin t + (-Ct^2 - Dt + 4At + 2B + 2C) \cos t$$

da cui

$$y_p''(t) + y_p(t) = (-4Ct - 2D + 2A) \sin t + (4At + 2B + 2C) \cos t.$$

Dovendo essere $y_p''(t) + y_p(t) = t \cos t$ si ha che $A = 1/4, B = 0, C = 0$ e $D = 1/4$. Pertanto,

$$y_p(t) = \frac{1}{4} t(t \sin t + \cos t).$$

In definitiva,

$$y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + \frac{1}{4} t(t \sin t + \cos t),$$

dove le constanti arbitrarie c_1 e c_2 sono da determinarsi in base alle condizioni iniziali (o ai limiti). ∎