

☆☆ Punti critici vincolati: teoria dei

moltiplicatori di Lagrange

(importantissima in meccanica analitica)

Analizziamo i seguenti casi

GEOMETRIA

Prof. M. Spina

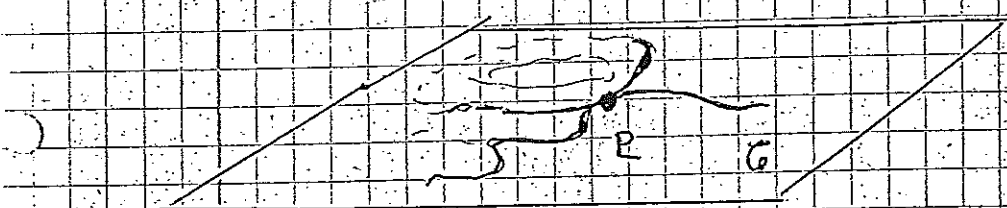
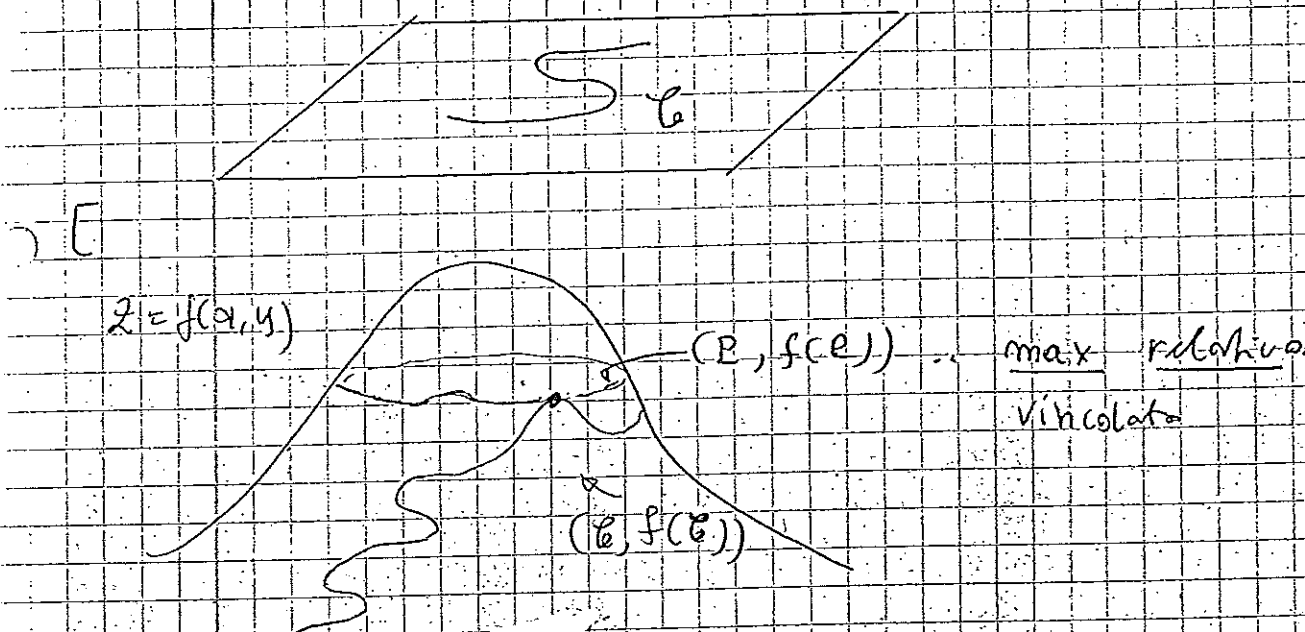
Addendatum V

RICHIAMI DI
ANALISI

1. $f = f(x, y)$

vincolo: $g(x, y) = 0$

curva piana



2. $f = f(x, y, z)$

vincolo: $g(x, y, z) = 0$

(superficie in $\mathbb{R}^3$)

3. $f = f(x, y, z)$

vincolo: $\begin{cases} g_1(x, y, z) = 0 \\ g_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$

curva in $\mathbb{R}^3$

Tutte le funzioni sono di classe $\mathcal{C}^1$,
 $\mathbb{R}$ suff. grande. (in ogni caso $\mathbb{R} \geq 1$)

Cominciamo con il 3° caso.

③ Impediamo la regolarità del vincolo:

$$\mathcal{C} := \begin{cases} g_1 = 0 \\ g_2 = 0 \end{cases}, \text{ ovvio, } \forall P \in \mathcal{C}$$

$$\nabla g_1(P) \times \nabla g_2(P) \neq 0, \text{ ovvio,}$$

In un opportuno intorno di ogni punto di $\mathcal{C}$, esiste una parametrizzazione $\underline{r} = \underline{r}(t)$

$t \in I$ (per il teorema del Dini t può

essere una delle tre coordinate ...), e $\dot{\underline{r}}(t) \neq 0$

Sia $P_0 \in \mathcal{C}$ un punto critico vincolato di f

★ ossia la funzione $F(t) := f(\underline{r}(t))$ ha

un punto critico in t_0 ($P_0 = \underline{r}(t_0)$):

$F'(t_0) = 0$. Si ha successivamente

$$0 = F'(t_0) = \left\langle \nabla f(P_0) \mid \dot{\underline{r}}(t_0) \right\rangle = 0$$

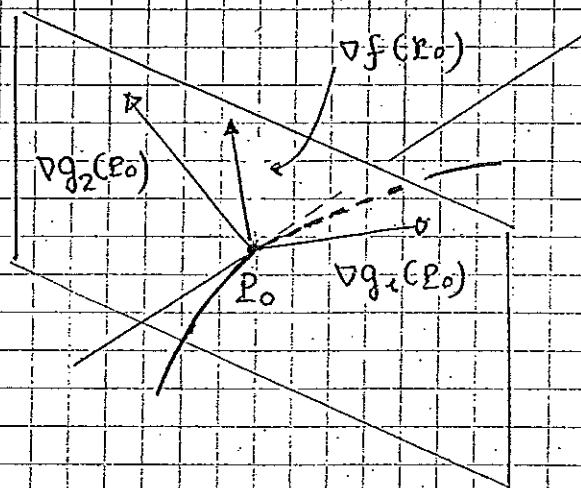
$\nabla f(P_0)$ appartiene al piano normale alla

curva in P_0 , che è generata dai vettori

lin. indipendenti $\nabla g_1(P_0)$ e $\nabla g_2(P_0)$, cioè.

$$\star \quad \nabla f(P_0) = \lambda_1 \nabla g_1(P_0) + \lambda_2 \nabla g_2(P_0)$$

λ_1, λ_2 : moltiplicatori di Lagrange



Viceversa, se in $P_0 \in B$ $\star$ è verificata,
 P_0 è pto critico vincolato ...

Conclusione

$\star\star$ I punk critici vincolati di f su B si
 ottengono risolvendo il sistema (di Lagrange

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2 \\ g_1 = 0 \\ g_2 = 0 \end{cases} \quad (5 \text{ equazioni})$$

nelle 5 incognite $(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2)$

$\underbrace{\quad}_{\text{coordinate dei punti critici}} \quad \underbrace{\quad}_{\text{moltiplicatori}}$

Attenzione : questo teorema non ci dice
nulla sulla natura del punto critico, che
 va accertata esaminando F'' , ed eventualmente

divente successive...

2) regolarità del vincolo $\Sigma: g=0$:

$$\nabla g(P) \neq 0, \forall P \in \Sigma$$

(= posso esprimere ^{rispetto ad} una variabile tramite le altre due (dici))

In generale $\Sigma: r = r(u, v)$ (descrizione locale) e $r_u \times r_v \neq 0$

$$\text{Sia } F(u, v) := f(r(u, v))$$

$P_0 \in \Sigma$ è un punto critico vincolato se

$$\nabla F(P_0) = \nabla F(u_0, v_0) = 0 \quad \left(\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right) \right)$$

Cio' implica:

$$F_u = f_x x_u + f_y y_u + f_z z_u = \langle \nabla f(P_0) | r_u^0 \rangle = 0$$

$$F_v = \dots = \langle \nabla f(P_0) | r_v^0 \rangle = 0$$

$\Rightarrow \nabla f(P_0)$ è ortogonale al piano tangente a Σ in P_0 , ovvero

$$\nabla f(P_0) = \lambda \nabla g(P_0)$$

λ : moltiplicatore di Lagrange

Se, viceversa, $P_0 \in \Sigma$ verifica $\nabla f(P_0) = \lambda \nabla g(P_0)$, esso è necessariamente un punto critico vincolato.

Conclusione

I punti critici di f vincolata su Σ si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 0 \end{cases}$$

ovvero 4 equazioni nelle 4 incognite (x, y, z, λ)

1) ① regolarità del vincolo $g: g=0$

$$\nabla g \neq 0$$

$$t_0 \neq t \Rightarrow \underline{r} = \underline{r}(t), \quad \underline{r}$$

si considera

$$F(t) := f(\underline{r}(t)), \quad p_0 \in \mathcal{C} \text{ critico}$$

$$F'(p_0) \equiv F'(t_0) = 0, \quad \text{ovvero}$$

$$\langle \nabla f(p_0) | \dot{\underline{r}}(t_0) \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\nabla f(p_0)} = \lambda \underline{\nabla g(p_0)} \quad \lambda \neq 0$$

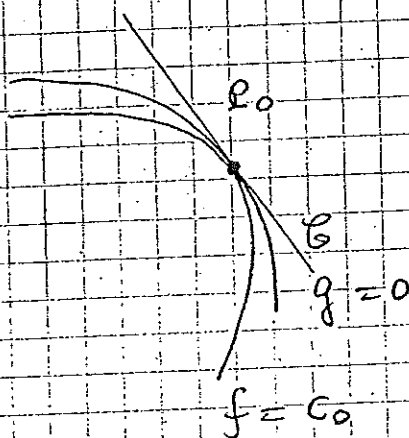
$\Rightarrow$ i punti critici cercati si ottengono risolvendo

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 0 \end{cases} \quad (3 \text{ equazioni, } 3 \text{ incognite})$$

I casi 1 e 2 ammettono le seguenti

semplici interpretazioni geometriche, simili nella sostanza.

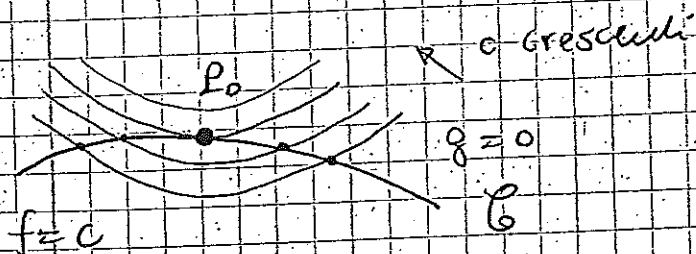
(1)



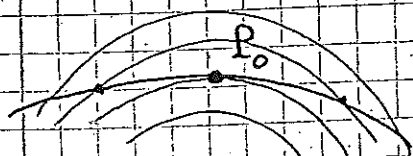
$f=c_0$ curva di livello di f passante per P_0

★ In un punto critico P_0 la curva di livello $f=c_0$ è tangente al vincolo g

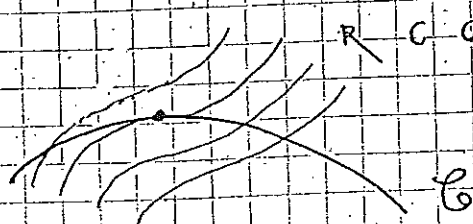
★ La geometria delle curve di livello consente di determinare la natura del punto



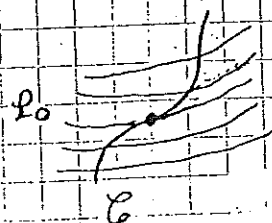
P_0 : max. rel. vincolato



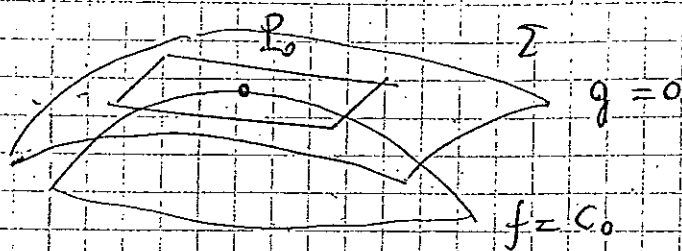
P_0 : min. rel. vincolato



P_0 : flesso vincolato



(2)



★ In un punto critico P_0 la superficie di livello $f = C_0$ passante per P_0 è tangente al piano Σ .

Esercizio

$\mathcal{C} = \begin{cases} z = y + \frac{1}{2} & \text{piano} \\ z = x^2 + y^2 & \text{paraboloida di rotazione} \end{cases}$

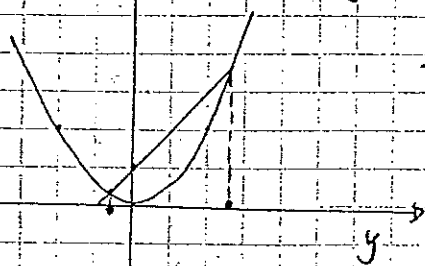
- Dimostrare che $\mathcal{C}$ è una curva regolare
- Determinare i punti di $\mathcal{C}$ aventi massima e minima distanza dal piano $z = 0$

a) Posto $g_1 = x^2 + y^2 - z = 0$

$g_2 = y - z + \frac{1}{2} = 0$

ho $\nabla g_1 = (-2x, -2y, -1) \quad (\neq 0)$

$\nabla g_2 = (0, 1, -1) \quad (\neq 0)$



$\Rightarrow \|\nabla g_1 \times \nabla g_2\|^2 =$

$(-2y+1)^2 + (-2x)^2 + (2x)^2 = 8x^2 + (1-2y)^2$

$= 0 \quad \text{se} \quad x=0, y=\frac{1}{2} \Rightarrow$

$z=1 \quad \text{e} \quad z=\frac{1}{4} \quad \therefore \text{assurdo} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\mathcal{C}$ è regolare (è un'ellisse...)

★ Osservazione: $\mathcal{S}$ ha come piano

$$\mathcal{C} = \begin{cases} z = y + \frac{1}{2} \\ y + \frac{1}{2} = x^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 - \frac{3}{4} = 0$$

cilindro

★ per semplificare un dato problema, si può esprimere il vincolo in modo di vari...

b) $\mathcal{S}$ pone $f(x, y, z) = |z| = \text{distanza}$
 da $\mathcal{P} = (x, y, z)$ dal piano (x, y) ($z=0$).

$\mathcal{S}$ ha come $f|_{\mathcal{C}} = z$ ($z \geq 0$)

$\Rightarrow$ la funzione da ottimizzare è $f = z$

Il sistema di Lagrange acquista la forma

$$\begin{cases} 0 = \lambda \cdot 2x + \mu \cdot 0 = 2\lambda x \\ 0 = \lambda \cdot 2y + \mu \cdot 1 = 2\lambda y + \mu \\ 1 = \lambda(-1) + \mu(-1) = -\lambda - \mu \end{cases}$$

$g_1 = 0$
 $g_2 = 0$

$\Rightarrow \lambda x = 0 \Rightarrow$

$\lambda = 0$

o

$x = 0$

$\Downarrow$

$\mu = 0$

$\Downarrow$
 $y = -\frac{\mu}{2\lambda} \quad (\lambda \neq 0!)$

e $\mu = 1$
 assurdo!

$g_1 = 0$
 $g_2 = 0$
 $\Rightarrow$

$y^2 = z = y + \frac{1}{2}$

$y^2 - y - \frac{1}{2} = 0$

, $2y^2 - 2y - 1 = 0$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1+2}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow P_1 = \left(0, \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}, 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

(... non è necessario calcolare λ e μ)

Analisi locale per $P_1 = \left(0, \frac{1+\sqrt{3}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$\frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(y, z)} = \begin{vmatrix} (g_1)_y & (g_1)_z \\ (g_2)_y & (g_2)_z \end{vmatrix} = 2y \cdot (-1) - (-1) \cdot$$

$$= -2y + 1 \quad \text{in } P_1 = -2 \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) + 1$$

$$= -1 - \sqrt{3} + 1 = -\sqrt{3} \neq 0$$

$$\Rightarrow \text{localmente } P_1: \begin{cases} x = x \\ y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases} \quad \begin{matrix} x \in I \\ (\text{intervallo di } x) \end{matrix}$$

$$\text{combinando } F(x) := f(x, y(x), z(x)) = z(x)$$

$$\text{Dobbiamo trovare } F'(0) = 0$$

$$\text{e calcoliamo anche } F''(0).$$

$$F''(x) = z''(x)$$

$$(i) \begin{cases} x^2 + y(x)^2 - z(x) = 0 \\ y(x) - z(x) + \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$(ii) \begin{cases} 2x x' + 2y y' - z' = 0 \\ y' - z' = 0 \end{cases} \quad \text{in } P_1 \Rightarrow (2y - 1) y' = 0$$

$$\Rightarrow y' = z' = 0 \quad (F'(0) = 0)$$

Dividendo ancora la (ii)

$$\begin{cases} 2 + 2y y'' + 2y'^2 - z'' = 0 \\ y'' - z'' = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{in } E_0 \quad 2 + (2y - 1) z'' = 0$$

$$\Rightarrow z'' = \frac{-2}{2y - 1} = \frac{2}{1 - 2y} = \frac{2}{-\sqrt{3}} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$\Rightarrow E_1$: pto max. relativo locale

Analogamente : E_2 : pto min. relativo locale.

★ Ora, poiché l'ellisse E è un insieme compatto in $\mathbb{R}^3$, grazie al teorema di Weierstrass concludiamo che tali punti sono di minimo e massimo assoluti.

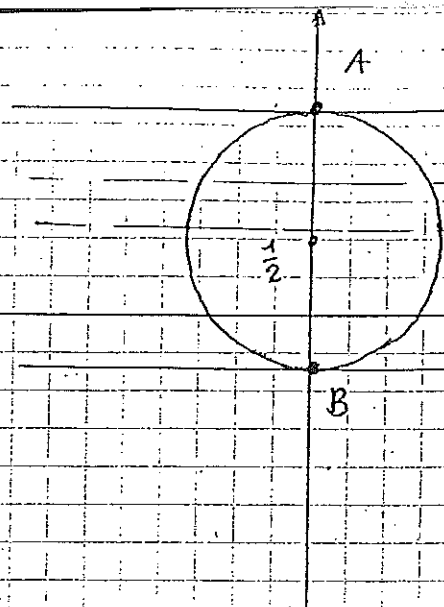
2° metodo

si riduce il problema all'isotonia di una funzione di due variabili (e priori) con un solo vincolo:

$$f = z = y + \frac{1}{2} \equiv f(x, y)$$

$$\tilde{E} : x^2 + y^2 - y - \frac{1}{2} = 0$$

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 0$$



$$f = y + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$f = c$$

$$f = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow A = \left(0, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow P_1 = \left(0, \frac{1+\sqrt{3}}{2}, 1\right)$$

$$B = \left(0, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow P_2 = \left(0, \frac{1-\sqrt{3}}{2}, 1\right)$$

3° metodo ("fortuito"...))

Descrivo $\tilde{C}$ in coordinate polari

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi \\ y = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi \end{cases} \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$

$$\Rightarrow f = z = y + \frac{1}{2} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi$$

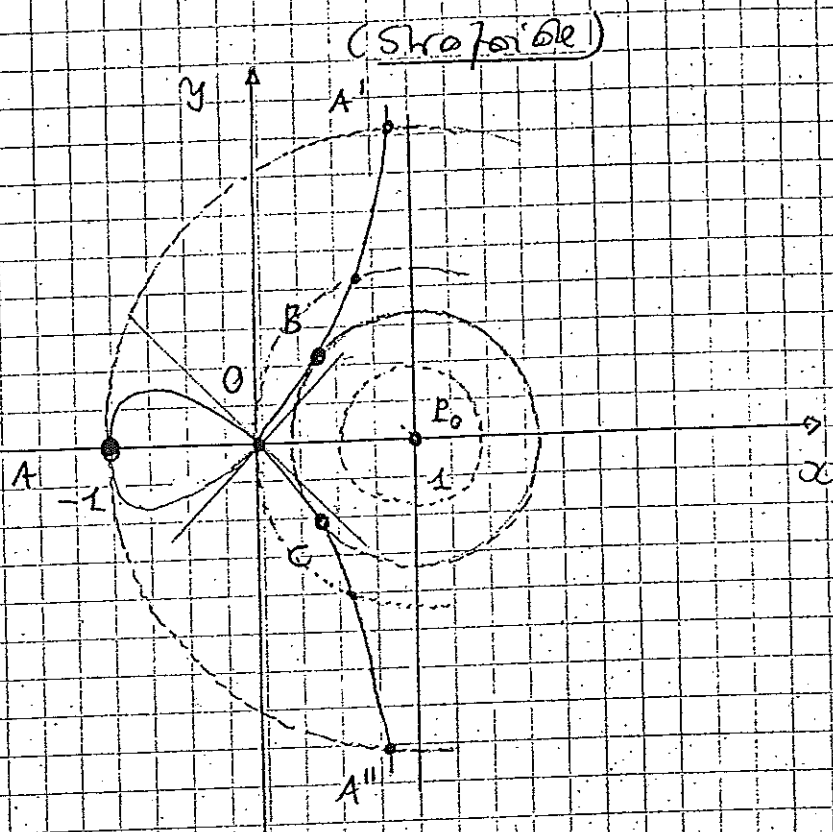
$$\Rightarrow \text{funzione } F(\varphi) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi$$

$$0 = F'(\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}; \varphi = \frac{3\pi}{2}$$

e riporto i risultati precedenti...

Esercizio (Cuneo)

$$C: (1-x)y^2 - (1+x)x^2 = 0$$



Determinare i punti di C a cui
corrisponde la minima e massima distanza da $P_0 = (1, 0)$

Cuneo di soluzione

E' equivalente studiare

$$f(x, y) = (x-1)^2 + y^2 \quad (= d(P, P_0)^2)$$

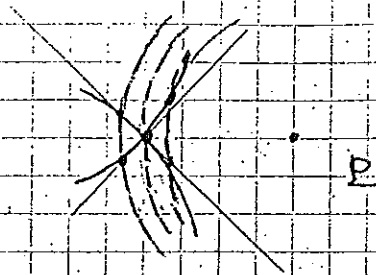
($P = (x, y)$) vincolata su C .

La risposta è: B, C minimi assoluti

A minimo relativo non assoluto

★ C ha un punto singolare, O (nodo)

che deve essere conosciuto a parte



0 non è né pto di max né min.

per concludere che A non è un minimo
assoluto. Osserviamo che per $C \geq C_0$ (C_0 corrispondente ad A e B), il
sistema

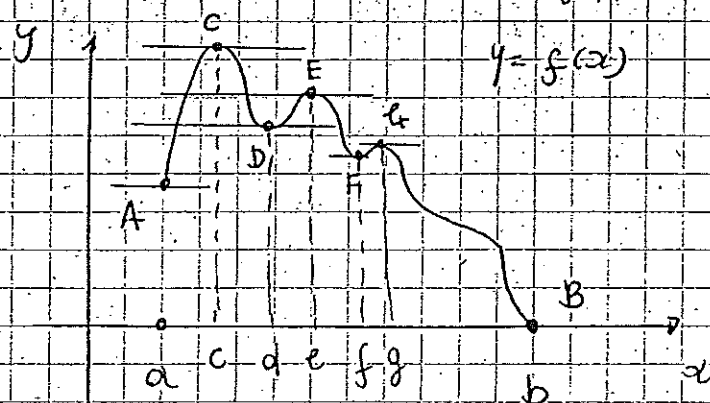
$$\begin{cases} (1-x)y^2 - (1+x)x^2 = 0 \\ (x-1)^2 + y^2 = C \end{cases}$$

ammette sempre soluzioni ...

★ Dunque non a sono pti di B aventi massima distanza da E.

In questo esempio non si poteva applicare
il teorema di Weierstrass.

★ Commento: in generale è necessaria
sia un'analisi locale che globale (e si riconosce
tutti i punti critici)



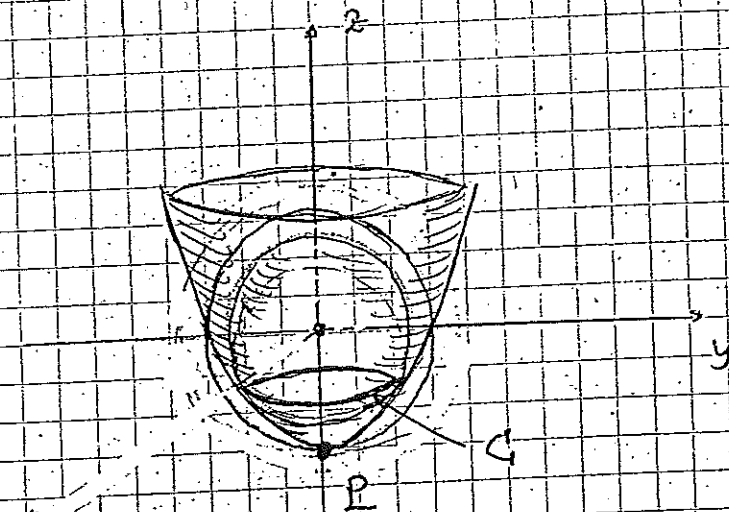
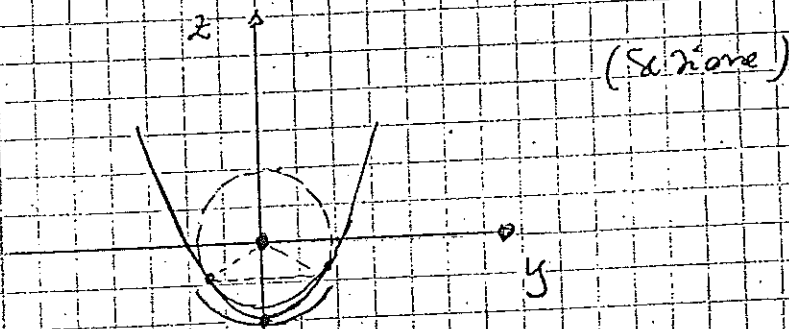
★ f : max rel. ; D : min rel. ma $f(g) < f(d)$
 C : max assoluto ; B : min assoluto
(qui ovviamente $f(c) > f(b)$)

Esercizio (Kaccia)

Studiare i pt critici di $f = x^2 + y^2 + z^2$
vincolata su $\tau: g = x^2 + y^2 - z - 1 = 0$

e precisare la natura

(paraboloide
di rotazione)



Il sistema di Lagrange

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 0 \end{cases}$$

fornisce

$$\begin{cases} x = \lambda x \\ y = \lambda y \\ z = -\frac{\lambda}{2} \\ x^2 + y^2 - z - 1 = 0 \end{cases}$$

Sia

$$\lambda = 1$$

Si ha $\boxed{z = -\frac{1}{2} \quad ; \quad x^2 + y^2 = \frac{3}{2}} \quad (\text{Circonferenza})$

Se $\lambda \neq 1$ e $x = 0, y = 0 \Rightarrow z = -1$

$\Rightarrow$ si ottiene $P = (0, 0, -1)$

Analisi locale per P

$$z = x^2 + y^2 - 1$$

$$f(x, y) = f(x, y, z(x, y)) =$$

$$= x^2 + y^2 + (x^2 + y^2 - 1)^2 =$$

$$= 1 - x^2 - y^2 + x^4 + y^4$$

(con un intorno di $(0, 0) \dots$)

$\Rightarrow \dots$ P ptto massimo relativo

($\dots$ non assoluto!).)

Analisi locale in un ptto qualsiasi di G...

Ovvero un minimo relativo (e assoluto) non

proprio (per simmetria) $\Rightarrow$

★ avendo una proprietà sempre verificata
positiva.

★ Autovalori e autovettori reali

$$A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

A simmetrico

op. lineare

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

(rispetto alla base canonica)

$$Q_A(v) = \langle v | Av \rangle = \quad (v = (x, y))$$

$$(x, y) \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax^2 + 2bxy + dy^2$$

$$= Q(x, y)$$

vincoliamo Q sulla circonferenza $g = x^2 + y^2 - 1 = 0$

$$\text{Il sistema di Lagrange è } \begin{cases} \nabla Q = \lambda \nabla g \\ g = 0 \end{cases}$$

$$\text{ovvero } \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

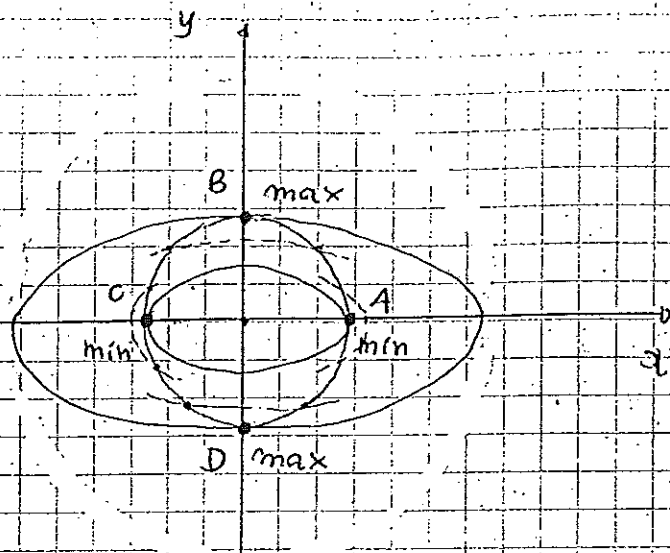
$$Av = \lambda v$$

⇒ ★ proprietà = autovettori (da norma 1)
moltiplicatori = autovalori

analisi locale ... già svolta

Interpretazione geometrica

1.



$$Q(x, y) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2$$

$$\lambda_2 > \lambda_1$$

)

curve di livello
(ellissi)

$$Q = c \geq 0$$

Q definita p

$$Q(A) = Q(C) = \lambda_1$$

$$Q(B) = Q(D) = \lambda_2$$

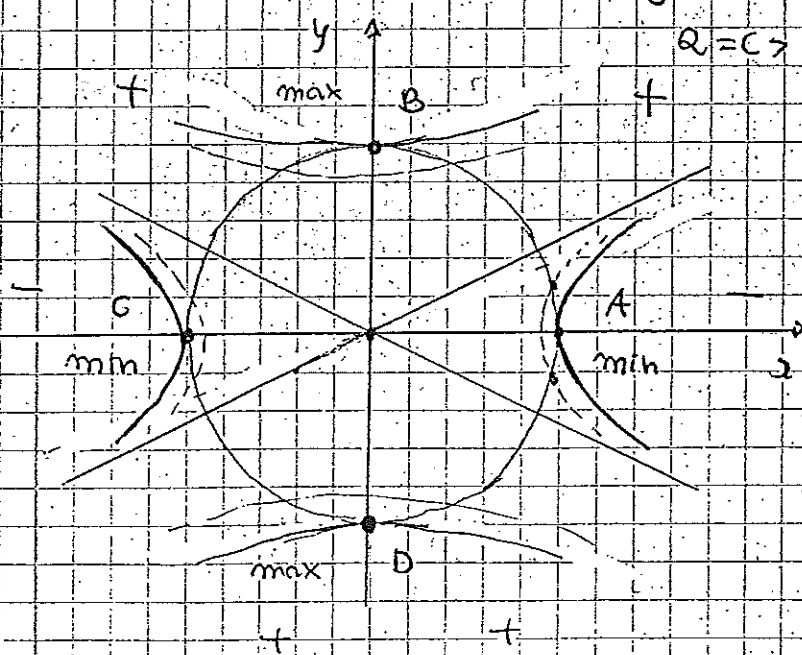
2.

$$Q = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2$$

$$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$$

$$Q = c > 0$$

curve finite



$$Q = c < 0$$

$$3. \quad Q = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2$$

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$$

$$\text{vincolo: } x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$Q = C \geq 0$ famiglia di ellissoidi.

sistema di Lagrange $\begin{cases} \text{pt critici autovettori} \\ \text{Dunque } \lambda \\ \text{moltiplicatore } \lambda = \text{autovalori} \end{cases}$

Verifichiamo che $P_{\pm} = (0, \pm 1, 0)$

★ sono pti della selezione vincolata

ragioniamo in P_{+} .

$$Q(x, y, z) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 (x^2 + y^2 + z^2) - \lambda_2 x^2 - \lambda_2 z^2 + \lambda_3 z^2$$

$$= \lambda_2 + \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{< 0} x^2 + \underbrace{(\lambda_3 - \lambda_2)}_{> 0} z^2$$

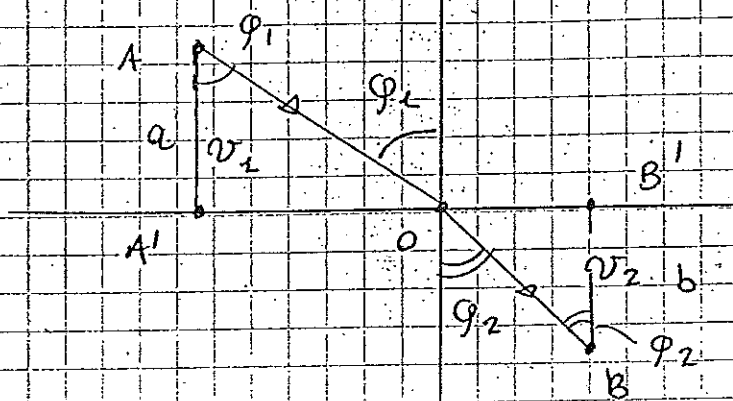
$$= \dots Q(x, z) \quad (\text{in un intorno di } (0, 0))$$

è massimo e unico.

★ Esercizio : Derivare la legge di Snell-

Contenuto sulla rifrazione della luce

trovate il principio di Fermat ("tempo minimo" o meglio "stationary")



v_1 = velocità della luce nel vuoto

) $C \equiv A'B' = a \operatorname{tg} \varphi_1 + b \operatorname{tg} \varphi_2$ (angolo)

$t = \frac{a}{v_1 \cos \varphi_1} + \frac{b}{v_2 \cos \varphi_2}$ (tempo)

si trova $\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = \frac{v_1}{v_2}$

$\left[\frac{a}{v_1} \frac{-\sin \varphi_1}{\cos^2 \varphi_1} = \lambda \frac{1}{\cos^2 \varphi_1} a \dots \right]$

★ ... Allora cosa si fa legge della riflessione della luce

★ Concetto di DIFFERENZIABILE SECONDO FRECHET

Sei $(V, \|\cdot\|_V)$ $(W, \|\cdot\|_W)$ due spazi vettoriali normati.

Sia $f: \mathcal{U} \subset V \rightarrow W$
aperto
(generalizzazione ovvia...)

★ f si dice differentiabile in $a \in \mathcal{U}$ se $\exists$

$T(a): V \rightarrow W$, lineare, tale che

(se dim $V = n$; dim $W = m$ T è rapp. da una matrice $m \times n$)

$$\boxed{f(a+h) = f(a) + T(a) \cdot h + o(h)}$$

($h \in V$ tale che $a+h \in \mathcal{U}$...)

$o(h) \in W$: tale scrittura significa:

$$\frac{\|o(h)\|_W}{\|h\|_V} \rightarrow 0 \quad \text{se} \quad \|h\|_V \rightarrow 0$$

★ $T(a)$ è univocamente determinata e viene chiamata Differenziale (simbolo Fréchet) di a e si denota spesso con $df|_a$

★ Si prova che f differentiabile in $a \Rightarrow$
 f continua in a

★ Teoremi su f e $T(a)$: con i concetti già discussi. Enunciati

① $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a $a+h$

$T(a) = df|_a = f'(a)$ (matrice 1×1) ...

(2.)

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$df|_a: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$df|_a(h) = \langle \nabla f(a) | h \rangle =$$

$\uparrow$
 $\mathbb{R}^2$

(homotrofo kuu
prod. solve...)

$$= (f_x(a) \quad f_y(a)) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

(... è un valore duale...)
= forma lineare

(3.)

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$df|_a = J_f(a) : \text{matrice jacobiana} \quad (2)$$

$$= \begin{pmatrix} x_u(a) & x_v(a) \\ y_u(a) & y_v(a) \end{pmatrix}$$

(4.)

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$df|_a = (r_u(a), r_v(a)) \quad (\text{mat. } 3 \times 2)$$

$$= \begin{pmatrix} x_u(a) & x_v(a) \\ y_u(a) & y_v(a) \\ z_u(a) & z_v(a) \end{pmatrix} \quad \text{matrice jacobiana}$$

(5.)

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$df|_a = \begin{pmatrix} x'(a) \\ y'(a) \\ z'(a) \end{pmatrix} \quad (\text{velocità...})$$



Attenzione

$$f: U \subset V \rightarrow W$$

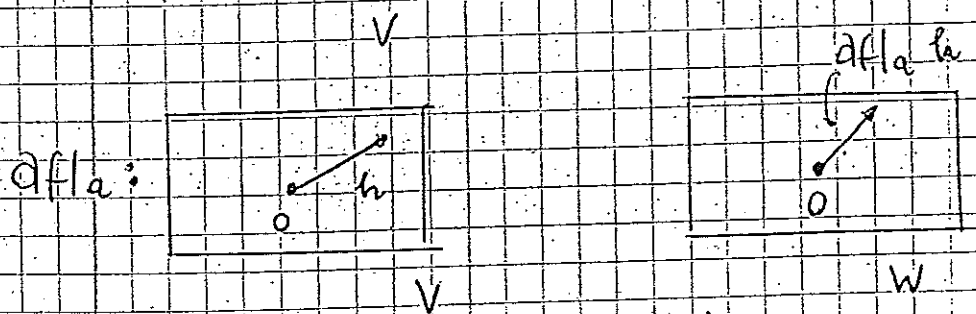
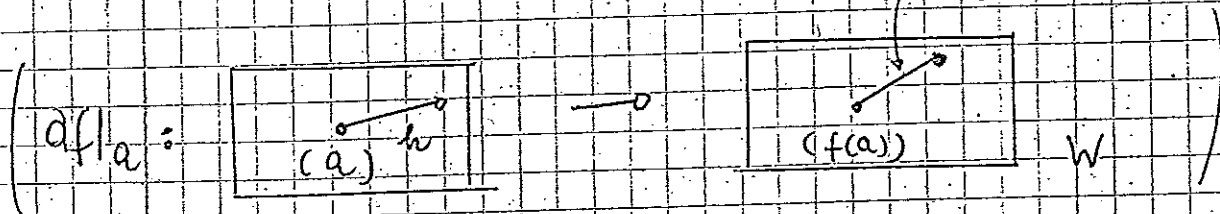
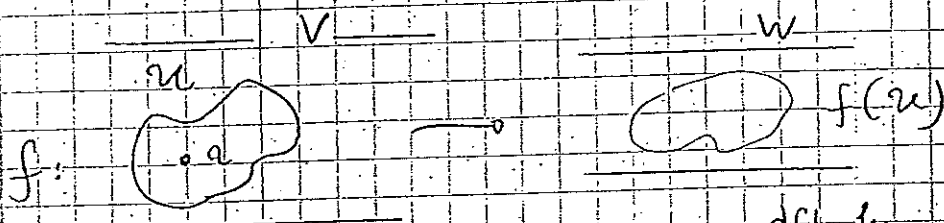
$$df|_a: V \rightarrow W \quad \text{lineare}$$

★ Valore tangente Distinti
concettualmente!

Nella mappa $df|_a$...

V è detto "spazio tangente a U in a "

W è detto "spazio tangente a W ($f(U)$ in $f(a)$)"



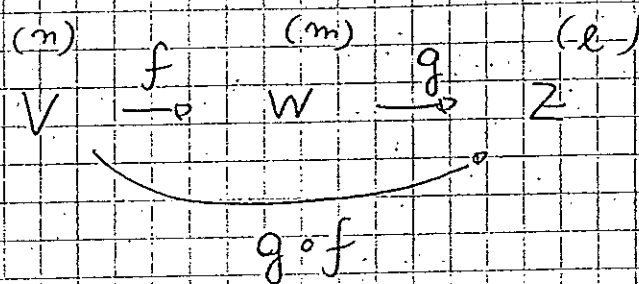
Alcra esempio

$$f: Z \rightarrow Z' \quad (\text{superficie})$$

$$df|_p: T_p Z \rightarrow T_{f(p)} Z' \quad \text{piani tangenti}$$

★ Z e $T_p Z$ sono qui effettivamente distinti !!

★ Teorema di derivazione delle funzioni composte generalizzato



$$\begin{array}{ccc}
 (l \times m) & & (l \times m) & & (m \times n)
 \end{array}$$

$$d(g \circ f)|_a = dg|_{f(a)} \cdot df|_a$$

↑
prodotto tra matrici

★ In particolare se $l = m = n$

si ha come

$$\det d(g \circ f)|_a = \det dg|_{f(a)} \cdot \det df|_a$$

(Jacobiano)

↑
prodotto tra
numeri reali

(se $l = m = n = 2$)

$$(u, v) \xrightarrow{f} (u', v') \xrightarrow{g} (x, y)$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u', v')} \cdot \frac{\partial(u', v')}{\partial(u, v)}$$