

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI VERONA

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Marco Squassina

Anno Accademico 2006-2007

Indice

1	Numeri reali	7
1	Breve premessa	7
2	Proprietà fondamentali	7
2.1	Proprietà algebriche	7
2.2	Proprietà di ordinamento	8
3	Insiemi e funzioni	10
3.1	Funzioni iniettive, suriettive	13
3.2	Reali e coordinate cartesiane	14
4	Estremo superiore e inferiore	15
5	Estensione di $\mathbb{R}$ ad $\overline{\mathbb{R}}$	17
6	Interi, razionali e irrazionali	20
7	Il binomio di Newton	24
8	Cenni sui numeri complessi	26
9	Esercizi	31
2	Limiti e continuità	40
1	Breve premessa	40
2	Funzioni continue	41
3	Topologia della retta reale	44
4	Limite di una funzione	48
4.1	Alcuni teoremi sui limiti	52
4.2	Limiti su restrizioni	54
4.3	Limiti e funzioni monotone	57
4.4	Massimo e minimo limite	58
5	Punti di discontinuità	60
6	Successioni	62
6.1	Limiti e successioni	64

6.2	Sottosuccessioni	65
7	Alcune funzioni elementari	68
7.1	La funzione esponenziale	68
7.2	Le funzioni trigonometriche	72
7.3	Forma trigonometrica dei complessi	73
8	Proprietà delle funzioni continue	75
8.1	Funzioni uniformemente continue	78
9	Altre funzioni elementari	81
10	Serie numeriche	85
10.1	Prime proprietà	85
10.2	Serie a termini positivi	89
10.3	Serie a termini di segno variabile	94
11	Esercizi	97
3	Calcolo differenziale	111
1	Breve premessa	111
2	La derivata	111
3	Punti di non derivabilità	120
4	Alcune proprietà delle funzioni derivabili	121
5	I teoremi di L'Hôpital	125
6	La formula di Taylor	128
7	Funzioni convesse	132
8	Esercizi	136
4	Calcolo integrale	143
1	Breve premessa	143
2	Integrale inferiore superiore	144
3	Funzioni integrabili	148
4	Il teorema fondamentale del calcolo integrale	153
5	Formule di integrazione	157
6	Integrali impropri	159
7	Esercizi	165

Premessa

Queste dispense, indirizzate agli studenti del primo anno di studi del corso di laurea in Informatica dell'Università di Verona, nascono da una rielaborazione del materiale didattico utilizzato dal Prof. Marco Degiovanni per il corso di Analisi Matematica uno, presso l'Università Cattolica del Sacro Cuore. La trattazione si limita ai capitoli dedicati ai numeri reali, ai limiti, al calcolo differenziale e, infine, al calcolo integrale. Verranno considerate acquisite le nozioni di base di logica e teoria degli insiemi. Allo scopo di adeguare i contenuti al nuovo target di studenti ed ammorbidire il rigore dell'esposizione, sono state aggiunte nuove sezioni e vari esempi, controesempi ed osservazioni dopo ogni risultato di un certo rilievo. Al termine di ognuno dei quattro capitoli, si possono trovare numerosi esercizi, alcuni dei quali includono anche una soluzione. I problemi sono stati sviluppati in collaborazione con i dott. Mauro Garavello e Alessandro Alippi durante i miei precedenti corsi di Analisi Matematica A tenuti presso il Politecnico di Milano. Per alcuni teoremi verrà omessa la dimostrazione; in alcuni altri casi la dimostrazione è presente ma non verrà svolta in dettaglio in aula durante le lezioni. Rispetto ad alcune trattazioni della materia post riforma tendenti a sacrificare gli aspetti formali ed assiomatici a favore di quelli concreti e geometrici, si è preferito mantenere comunque abbastanza alto il rigore espositivo. Durante le lezioni verranno svolti ulteriori esempi ed esercizi, complementari a quelli qui inclusi.

Verona, 20 ottobre 2006.

Capitolo 1

Numeri reali

1 Breve premessa

Assumeremo come postulato che esista il *sistema dei numeri reali*, ossia un insieme $\mathbb{R}$ di numeri, che chiameremo appunto numeri reali, su cui sia possibile eseguire almeno quattro operazioni elementari (somma, sottrazione, moltiplicazione e divisione) e in cui si possa dire quale tra due numeri reali dati sia più grande dell'altro (ordinamento).

2 Proprietà fondamentali

Cominciamo con le proprietà di base del sistema dei numeri reali.

2.1 Proprietà algebriche

Dati due numeri reali x, y , sono definiti il numero reale somma $x + y$ ed il numero reale prodotto xy . Per ogni numero reale x , si denota con $-x$ l'opposto di x e, se $x \neq 0$, con x^{-1} il reciproco di x . Esistono infine due numeri reali, denotati con i simboli 0 e 1 , che godono di particolari proprietà rispetto a somma e prodotto. Le proprietà algebriche fondamentali possono essere riassunte dicendo che, per ogni x, y, z in $\mathbb{R}$, si ha

$$(x + y) + z = x + (y + z), \quad x + y = y + x,$$

$$x + 0 = x, \quad x + (-x) = 0,$$

$$(xy)z = x(yz), \quad xy = yx,$$

$$x \cdot 1 = x, \quad x \neq 0 \implies xx^{-1} = 1,$$

$$(x + y)z = xz + yz,$$

$$0 \neq 1.$$

Dati $x, y \in \mathbb{R}$, si stabiliscono alcune ovvie notazioni:

$$x - y := x + (-y),$$

$$\frac{x}{y} := xy^{-1}.$$

2.2 Proprietà di ordinamento

Per ogni x, y in $\mathbb{R}$, è definita la relazione $x < y$, x minore di y . A partire da questa, sono anche definite, in modo ovvio, le relazioni

$$\begin{aligned} x > y & \text{ } x \text{ maggiore di } y, \text{ che significa} & y < x, \\ x \leq y & \text{ } x \text{ minore o uguale a } y, \text{ che significa} & x < y \text{ o } x = y, \\ x \geq y & \text{ } x \text{ maggiore o uguale a } y, \text{ che significa} & x > y \text{ o } x = y. \end{aligned}$$

Un secondo gruppo di proprietà fondamentali, dette di ordinamento, può essere compendiato dicendo che per ogni x, y, z in $\mathbb{R}$ si ha

$$\begin{aligned} x &\leq x, \\ (x \leq y \text{ e } y \leq x) &\implies x = y, \\ (x \leq y \text{ e } y \leq z) &\implies x \leq z, \\ (x \leq y) \text{ o } (y \leq x) &, \\ x \leq y &\implies x + z \leq y + z, \\ (x \leq y \text{ e } 0 \leq z) &\implies xz \leq yz. \end{aligned}$$

Proviamo alcune semplici conseguenze delle proprietà richiamate.

(2.1) Proposizione Per ogni x, y, u, z in $\mathbb{R}$ si ha:

$$\begin{aligned} x \leq y \text{ e } u \leq z &\implies x + u \leq y + z, \\ x + z = y + z &\implies x = y, \\ (xz = yz \text{ e } z \neq 0) &\implies x = y, \\ x \cdot 0 &= 0, \\ -(-x) &= x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x \neq 0 &\implies (x^{-1})^{-1} = x, \\
xy = 0 &\implies (x = 0 \text{ o } y = 0), \\
-(xy) &= (-x)y, \\
(x \leq y \text{ e } z \leq 0) &\implies yz \leq xz, \\
0 &\leq x \cdot x.
\end{aligned}$$

Dimostrazione. Se $x \leq y$ e $u \leq z$, risulta

$$x + u \leq y + u = u + y \leq z + y = y + z.$$

Se $x + z = y + z$, si ha

$$x = x + (z + (-z)) = (x + z) + (-z) = (y + z) + (-z) = y + (z + (-z)) = y.$$

In modo simile si prova la terza affermazione. Risulta

$$0 + x \cdot 0 = x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0,$$

da cui $x \cdot 0 = 0$. Poiché

$$-(-x) + (-x) = 0 = x + (-x),$$

si ha $-(-x) = x$. In modo simile si prova la sesta affermazione. Se $xy = 0$, si ha $xy = x \cdot 0$.

Ne segue $x = 0$ oppure $y = 0$. Si ha

$$-(xy) + xy = 0 = 0 \cdot y = ((-x) + x)y = (-x)y + xy,$$

da cui $-(xy) = (-x)y$. Se $x \leq y$ e $z \leq 0$, risulta anzitutto

$$0 = z + (-z) \leq 0 + (-z) = -z,$$

da cui

$$-xz = x(-z) \leq y(-z) = -yz.$$

Ne segue

$$yz = yz + xz + (-xz) \leq yz + xz + (-yz) = xz.$$

Si ha $0 \leq x$ oppure $x \leq 0$. In entrambi i casi ne segue

$$0 = 0 \cdot x \leq x \cdot x,$$

per cui la dimostrazione è completa. ■

Per ogni x in $\mathbb{R}$ si verifica una ed una sola delle seguenti eventualità:

$$x < 0, \quad x = 0, \quad x > 0.$$

(2.2) Definizione Un numero reale x si dice

- positivo, se $x \geq 0$;
- strettamente positivo, se $x > 0$;
- negativo, se $x \leq 0$;
- strettamente negativo, se $x < 0$.

Nel corso del seguito, porremo

$$\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}, \quad \mathbb{R}^- := \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\},$$

ossia gli insiemi dei numeri reali positivi e negativi.

3 Insiemi e funzioni

Richiamiamo ora l'ultima proprietà fondamentale del sistema dei numeri reali.

(Principio di Dedekind) *Se X ed Y sono due sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$ tali che $x \leq y$ per ogni $x \in X$ ed $y \in Y$, allora esiste $z \in \mathbb{R}$ tale che $x \leq z \leq y$ per ogni $x \in X$ ed $y \in Y$.*

Queste sono le proprietà fondamentali del sistema dei numeri reali. Tutto quanto dedurremo in seguito si baserà unicamente su queste affermazioni.

(3.1) Definizione *Per ogni $x \in \mathbb{R}$ poniamo*

$$|x| := \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0, \\ -x & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

Il numero reale positivo $|x|$ si chiama valore assoluto o modulo di x .

(3.2) Teorema *Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ si ha*

$$|x| \leq y \iff -y \leq x \leq y,$$

$$|x| < y \iff -y < x < y,$$

$$|x| = 0 \iff x = 0,$$

$$|-x| = |x|,$$

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$

$$||x| - |y|| \leq |x - y|,$$

$$x \neq 0 \implies |x^{-1}| = |x|^{-1},$$

$$|xy| = |x||y|.$$

Dimostrazione. Le prime quattro proprietà si verificano esaminando i due casi $x \geq 0$ e $x < 0$. Evidentemente si ha $-|x| \leq x \leq |x|$ e $-|y| \leq y \leq |y|$, per cui

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|.$$

Ne segue $|x + y| \leq |x| + |y|$. Risulta anche

$$|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|,$$

da cui

$$|x| - |y| \leq |x - y|.$$

Analogamente si ha

$$|y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|,$$

per cui

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|.$$

Ne segue

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

Infine le ultime due proprietà possono essere verificate per esercizio. ■

Possedendo degli insiemi, è possibile costruirne di nuovi con specifiche proprietà. Dati due insiemi X ed Y , esistono e sono univocamente determinati gli insiemi $X \cup Y$, $X \cap Y$ e $X \setminus Y$, caratterizzati dal fatto che

$$\forall x : x \in X \cup Y \iff (x \in X \text{ o } x \in Y),$$

$$\forall x : x \in X \cap Y \iff (x \in X \text{ e } x \in Y),$$

$$\forall x : x \in X \setminus Y \iff (x \in X \text{ e } x \notin Y).$$

$X \cup Y$ è l'unione insiemistica tra gli insiemi X e Y ; $X \cap Y$ è l'intersezione insiemistica tra gli insiemi X e Y ; $X \setminus Y$ è il complementare di Y in X . È anche possibile definire l'unione e l'intersezione di una quantità numerabile di insiemi $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ ponendo rispettivamente

$$\forall x : x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n \iff \forall n \in \mathbb{N} : x \in X_n,$$

e

$$\forall x : x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n \iff \exists n \in \mathbb{N} : x \in X_n.$$

(3.3) Osservazione Se $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ è una famiglia numerabile di sottoinsiemi di X , si verifica facilmente che valgono le seguenti proprietà

$$X \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X \setminus X_n, \quad X \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X \setminus X_n,$$

note anche come leggi di De Morgan.

Un'altra nozione fondamentale di carattere insiemistico è quella di *applicazione* o *funzione*. Se X ed Y sono due insiemi, un'applicazione f da X in Y può essere concepita come una “legge” che ad ogni elemento di X associa uno ed un solo elemento di Y . Per ogni $x \in X$, si denota con $f(x)$ l'elemento di Y associato a x da f . Per denotare che f è un'applicazione si adoperano le notazioni

$$f : X \rightarrow Y$$

o anche $\{x \mapsto f(x)\}$, a seconda che si voglia porre l'accento sugli insiemi X, Y o sul valore $f(x)$. L'insieme X si chiama *dominio di f* e si denota col simbolo $\text{dom}(f)$, mentre l'insieme Y si chiama *codominio di f* . Per ogni $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$ poniamo

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\} := \{y \in Y : (\exists x \in A : f(x) = y)\},$$

$$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

Se $y \in Y$, si usa anche la notazione abbreviata $f^{-1}(y)$ invece di $f^{-1}(\{y\})$.

(3.4) Osservazione Sia $f : X \rightarrow Y$ un'applicazione e siano $A, B \subseteq X$ e $C, D \subseteq Y$. Allora si verifica facilmente che valgono le seguenti proprietà insiemistiche:

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B),$$

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B),$$

$$f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D),$$

$$f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D),$$

$$f^{-1}(Y \setminus C) = X \setminus f^{-1}(C).$$

3.1 Funzioni iniettive, suriettive

Vediamo ora alcune importanti classi di funzioni.

(3.5) Definizione Un'applicazione $f : X \rightarrow Y$ si dice *iniettiva*, se per ogni $x_1, x_2 \in X$ con $x_1 \neq x_2$ si ha $f(x_1) \neq f(x_2)$.

(3.6) Esempio La funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^3$ è iniettiva, mentre la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$ non può essere iniettiva, visto che $f(-1) = f(1)$.

Se $f : X \rightarrow Y$ è un'applicazione iniettiva, esiste una ed una sola applicazione da $f(X)$ in X che ad ogni $y \in f(X)$ associa l'elemento $x \in X$ tale che $f(x) = y$. Tale applicazione si denota col simbolo f^{-1} e si chiama *applicazione inversa* di f .

(3.7) Definizione Un'applicazione $f : X \rightarrow Y$ si dice *suriettiva*, se $f(X) = Y$. Si dice *biiettiva*, se f è iniettiva e suriettiva.

(3.8) Esempio La funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo $f(x) = x^3$ è suriettiva, mentre la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$ non può essere suriettiva visto che, ad esempio, il numero reale -1 non appartiene all'immagine di f .

Siano $f : X \rightarrow Y$ e $g : B \rightarrow Z$ due applicazioni. Si può allora definire una nuova applicazione da

$$\text{dom}(g \circ f) := \{x \in X : f(x) \in B\}$$

in Z associando ad ogni $x \in \text{dom}(g \circ f)$ l'elemento $g(f(x)) \in Z$. Tale applicazione si denota col simbolo $g \circ f$ e si chiama *composizione* di f e g . Nel caso particolare in cui $B \subseteq Y$, risulta $\text{dom}(g \circ f) = f^{-1}(B)$. Osserviamo che, se $f : X \rightarrow Y$ è iniettiva, si ha

$$\forall x \in X : (f^{-1} \circ f)(x) = x,$$

$$\forall y \in f(X) : (f \circ f^{-1})(y) = y.$$

(3.9) Osservazione Siano $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ due applicazioni iniettive. Si verifica che $g \circ f : X \rightarrow Z$ è iniettiva. Siano $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ due applicazioni suriettive. Si verifica che $g \circ f : X \rightarrow Z$ è suriettiva. Se invece $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ sono tali che $g \circ f : X \rightarrow Z$ sia biiettiva, allora f è iniettiva e g è suriettiva.

Se $f : X \rightarrow Y$ è un'applicazione e $D \subseteq X$, si può definire una nuova applicazione da D in Y associando ad ogni $x \in D$ l'elemento $f(x) \in Y$. Tale applicazione si denota col simbolo $f|_D$ e si chiama *restrizione* di f a D . Ovviamente risulta $\text{dom}(f|_D) = D$.

(3.10) Esempio Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è definita da $f(x) = x^2$, f non è iniettiva, mentre $f|_{\mathbb{R}^+}$ lo è.

Se X, Y sono due insiemi e $x \in X, y \in Y$, denotiamo con (x, y) la *coppia ordinata* di componenti x ed y . La sua proprietà tipica è che:

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \iff x_1 = x_2, y_1 = y_2.$$

Esiste uno ed un solo insieme che ha per elementi esattamente le coppie ordinate (x, y) con $x \in X$ ed $y \in Y$. Esso si denota con $X \times Y$ e si chiama *insieme-prodotto* di X ed Y .

Chiudiamo la sezione con una importante definizione.

(3.11) Definizione Se $E \subseteq \mathbb{R}$ e $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione, il sottoinsieme

$$\mathcal{G} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in E \text{ e } y = f(x)\}$$

di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ si chiama *grafico della funzione* f .

3.2 Reali e coordinate cartesiane

Sia r una retta, che penseremo come l'insieme dei suoi punti, e fissiamo su di essa un punto O , detto *origine* ed un punto U detto *punto unità*. Il punto O divide la retta in due semirette, una detta positiva (quella contenente il punto U) e l'altra detta negativa. In tal modo, implicitamente, si stabilisce un *verso di percorrenza* sulla retta, che va dal punto O al punto U . Ad ogni punto geometrico $P \neq O$ della retta r si associa un numero reale $x \in \mathbb{R}$ ponendo $|x| = OP/OU$, ossia il rapporto tra le misure delle lunghezze dei segmenti che congiungono i punti O con P ed O con U rispettivamente. Avremo poi x positivo se P appartiene alla semiretta positiva ed x negativo se P appartiene alla semiretta negativa. Al punto geometrico O si associa il numero reale 0, al punto U si associa il numero reale 1. Dato un numero reale x , ad esso corrisponde uno ed un solo punto geometrico, e viceversa. Diremo allora che x è l'*ascissa* del punto P . Data questa corrispondenza biunivoca tra punti della retta e numeri reali, si parla anche di *retta reale*. Visto l'orientamento fissato sulla retta, dati due numeri reali x e y con $x < y$, essi corrispondono rispettivamente a due punti P e Q sulla retta tali che Q si trova alla destra di P . Consideriamo ora una seconda retta s nel piano, perpendicolare alla retta r e passante per il punto O , origine della retta r . Nuovamente, sulla retta s , si fissa un orientamento positivo e risulta stabilita una corrispondenza biunivoca tra punti di s e numeri reali. Se Q è un punto di s diremo che il corrispondente numero reale y è l'*ordinata* del punto Q . Risulta così naturale stabilire una corrispondenza biunivoca tra punti P del piano e l'insieme di tutte le coppie ordinate (x, y) di numeri reali, con x ascissa di P ed y ordinata di P . Infatti, dato un punto P del piano, conducendo per P la parallela ad s si incontra l'asse r in un punto P_1 e conducendo per P la parallela ad r si incontra l'asse s in un punto P_2 . Ora basta osservare

che, per quanto detto in precedenza, a P_1 e P_2 corrispondono univocamente due numeri reali x e y . L'insieme di tutte le possibili coppie di numeri reali (x, y) si denota con $\mathbb{R}^2$. Tale sistema introdotto nel piano viene detto *sistema di coordinate cartesiane* (e il piano stesso viene detto *piano cartesiano*, quando lo si pensa munito delle coordinate cartesiane). Durante il corso acquisiremo gli strumenti utili per effettuare lo studio di funzione, che consiste nel cercare di dare una rappresentazione grafica qualitativa dell'insieme $\mathcal{G}$ all'interno del piano cartesiano. I calcolatori consentono di rappresentare i grafici delle funzioni con un procedimento di interpolazione, ossia prima calcolando un numero finito, ma molto grande, di valori $f(x_j)$, con $x_j \in E$ accendendo quindi sullo schermo i pixels di coordinate $(x_j, f(x_j))$ e infine interpolando i valori ottenuti con una linea spezzata.

4 Estremo superiore e inferiore

(4.1) Definizione Sia $E \subseteq \mathbb{R}$. Diciamo che $M \in E$ è un massimo per E , se

$$\forall x \in E : x \leq M .$$

Diciamo che $m \in E$ è un minimo per E , se

$$\forall x \in E : x \geq m .$$

(4.2) Osservazione Il massimo, se esiste, è unico. Infatti, se M_1 e M_2 sono due massimi per E , si ha $M_1 \leq M_2$ e $M_2 \leq M_1$, da cui $M_1 = M_2$. Esso viene usualmente denotato col simbolo $\max E$. Anche il minimo, se esiste, è unico e viene denotato col simbolo $\min E$.

(4.3) Definizione Sia $E \subseteq \mathbb{R}$. Diciamo che $b \in \mathbb{R}$ è un maggiorante per E , se

$$\forall x \in E : x \leq b .$$

Diciamo che $a \in \mathbb{R}$ è un minorante per E , se

$$\forall x \in E : x \geq a .$$

(4.4) Osservazione Rispetto alle nozioni di massimo e di minimo, i maggioranti e minoranti per un'insieme non sono unici, in generale. Ad esempio, se $E = \{0 \leq x \leq 1\}$, l'insieme dei maggioranti di E è tutto $\{x \geq 1\}$, mentre l'insieme dei minoranti di E è tutto $\{x \leq 0\}$.

(4.5) Definizione Sia $E \subseteq \mathbb{R}$. Diciamo che E è

- (a) limitato superiormente, se E ammette un maggiorante $b \in \mathbb{R}$;
- (b) limitato inferiormente, se E ammette un minorante $a \in \mathbb{R}$;
- (c) limitato, se E è limitato sia superiormente che inferiormente.

(4.6) Teorema Sia E un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$. Denotiamo con Y l'insieme dei maggioranti per E e con X l'insieme dei minoranti per E . Valgono allora i seguenti fatti:

- (a) se E è limitato superiormente, allora Y è non vuoto ed ha minimo;
- (b) se E è limitato inferiormente, allora X è non vuoto ed ha massimo;
- (c) se E è limitato, risulta $\max X \leq \min Y$.

Dimostrazione.

- (a) L'ipotesi che E sia limitato superiormente equivale proprio a $Y \neq \emptyset$. Dal momento che

$$\forall x \in E, \forall y \in Y : x \leq y,$$

per il Principio di Dedekind esiste $z \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall x \in E, \forall y \in Y : x \leq z \leq y.$$

Ne segue $z \in Y$, per cui $z = \min Y$.

- (b) La dimostrazione è simile.
- (c) Sia $x_0 \in E$. Risulta allora

$$\max X \leq x_0 \leq \min Y,$$

da cui la tesi. ■

Veniamo ora alle importanti nozioni di estremo superiore ed estremo inferiore per un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$.

(4.7) Definizione Se E è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ non vuoto e limitato superiormente, denotiamo con $\sup E$ (estremo superiore di E) il minimo dei maggioranti per E . Se E è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ non vuoto e limitato inferiormente, denotiamo con $\inf E$ (estremo inferiore di E) il massimo dei minoranti per E .

(4.8) Esempio Consideriamo l'insieme $E = \{0 \leq x < 1\}$. Allora non esiste il massimo di E . D'altronde, poichè l'insieme dei maggioranti di E è $\{x \geq 1\}$ risulta subito $\sup E = 1$.

(4.9) Proposizione Se $E \subseteq \mathbb{R}$ ammette massimo, si ha $\max E = \sup E$. Se E ammette minimo, si ha $\min E = \inf E$.

Dimostrazione. Sia $M = \max E$. Per ogni $x \in E$ risulta $x \leq M$, per cui M è un maggiorante per E . D'altronde, se y è un maggiorante per E , deve essere $M \leq y$, dal momento che $M \in E$. Pertanto M è il minimo dei maggioranti. Il ragionamento per $\min E$ è simile. ■

(4.10) Esempio Calcoliamo gli estremi inferiore e superiore dell'insieme

$$A = \left\{ a_n = 1 - \frac{1}{n} : n \geq 1 \right\}.$$

Dato che

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

a_n è minimo quando $1/n$ è massimo quindi per $n = 1$. Dunque

$$\inf(A) = \min(A) = a_1 = 0.$$

Per determinare il $\sup(A)$, osserviamo che

$$a_n = 1 - \frac{1}{n} < 1, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Ne segue che 1 è un maggiorante per A . Per concludere che $\sup(A) = 1$, si deve mostrare che è il minimo dei maggioranti. Dalla definizione si deve quindi verificare che

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \bar{n} : 1 - \epsilon < a_{\bar{n}} < 1,$$

ossia $n > 1/\epsilon$. Scegliendo un $\bar{n}$ intero positivo maggiore di $1/\epsilon$, concludiamo che $\sup(A) = 1$, mentre il massimo di A non esiste.

5 Estensione di $\mathbb{R}$ ad $\overline{\mathbb{R}}$

Le nozioni di estremo superiore ed estremo inferiore giocano un ruolo importante in analisi matematica. Per questo, risulta utile estendere il più possibile la famiglia dei sottoinsiemi E per cui sono definiti $\sup E$ ed $\inf E$. Questa esigenza spinge ad introdurre un ampliamento dell'insieme $\mathbb{R}$.

(5.1) Definizione Denotiamo con $\overline{\mathbb{R}}$ l'insieme

$$\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\},$$

ottenuto aggiungendo a $\mathbb{R}$ due ulteriori elementi, denotati con $-\infty$ e $+\infty$ tali che $-\infty \neq +\infty$, $-\infty \neq x$ e $+\infty \neq x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Gli elementi di $\overline{\mathbb{R}}$ si chiamano numeri reali estesi.

Convenzionalmente porremo $-\infty < x < +\infty$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Inoltre, si estendono a $\overline{\mathbb{R}}$ le relazioni $x > y$, $x \leq y$ e $x \geq y$ nel modo ovvio. Si verifica allora facilmente che per ogni $x, y, z \in \overline{\mathbb{R}}$ si ha

$$\begin{aligned} x &\leq x, \\ (x \leq y \text{ e } y \leq x) &\implies x = y, \\ (x \leq y \text{ e } y \leq z) &\implies x \leq z, \\ (x \leq y) \text{ o } (y \leq x) &. \end{aligned}$$

Richiamiamo inoltre la versione estesa del principio di Dedekind.

(5.2) Teorema (Principio di Dedekind per $\overline{\mathbb{R}}$) Siano X ed Y due sottoinsiemi non vuoti di $\overline{\mathbb{R}}$ tali che

$$\forall x \in X, \forall y \in Y : x \leq y.$$

Allora esiste $z \in \overline{\mathbb{R}}$ tale che

$$\forall x \in X, \forall y \in Y : x \leq z \leq y.$$

Introduciamo ora alcuni importanti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, gli intervalli.

(5.3) Definizione Per ogni $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ poniamo

$$\begin{aligned} [a, b] &:= \{x \in \overline{\mathbb{R}} : a \leq x \leq b\}, \\ [a, b[&:= \{x \in \overline{\mathbb{R}} : a \leq x < b\}, \\]a, b] &:= \{x \in \overline{\mathbb{R}} : a < x \leq b\}, \\]a, b[&:= \{x \in \overline{\mathbb{R}} : a < x < b\}. \end{aligned}$$

Diciamo che un insieme $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ è un intervallo, se E può essere posto in una di queste quattro forme per un'opportuna scelta di a e b .

(5.4) Osservazione In generale l'unione di intervalli non è più un intervallo. Ad esempio $[0, 1] \cup [2, 3]$ non è un intervallo, essendo uguale a $[0, 3]$ privato dell'intervallo $]1, 2[$.

La struttura algebrica di $\mathbb{R}$ può essere parzialmente estesa a $\overline{\mathbb{R}}$ ponendo per definizione:

$$\forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{+\infty\} : -\infty + x = x + (-\infty) = -\infty,$$

$$\forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{-\infty\} : +\infty + x = x + \infty = +\infty ,$$

$$\forall x \in]0, +\infty] : -\infty \cdot x = x \cdot (-\infty) = -\infty ,$$

$$\forall x \in [-\infty, 0[: -\infty \cdot x = x \cdot (-\infty) = +\infty ,$$

$$\forall x \in]0, +\infty] : +\infty \cdot x = x \cdot (+\infty) = +\infty ,$$

$$\forall x \in [-\infty, 0[: +\infty \cdot x = x \cdot (+\infty) = -\infty .$$

In pratica non viene definita la somma di $-\infty$ e $+\infty$ ed il prodotto fra 0 e $+\infty$ o $-\infty$. Le proprietà associative e commutativa di somma e prodotto e la proprietà distributiva continuano a valere in $\overline{\mathbb{R}}$, a patto che tutte le espressioni coinvolte siano definite. Inoltre si ha $x + 0 = x$ e $x \cdot 1 = x$ per ogni $x \in \overline{\mathbb{R}}$.

Le nozioni di massimo, minimo, maggiorante e minorante si adattano in modo ovvio al nuovo ambiente $\overline{\mathbb{R}}$. Inoltre, se X è un insieme e $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ è una funzione, si usa scrivere

$$\max_X f, \quad \max_{x \in X} f(x)$$

invece di $\max f(X)$ e

$$\min_X f, \quad \min_{x \in X} f(x)$$

invece di $\min f(X)$. Vediamo ora uno dei risultati che giustificano l'introduzione di $\overline{\mathbb{R}}$.

(5.5) Teorema *Sia E un sottoinsieme non vuoto di $\overline{\mathbb{R}}$. Valgono allora i seguenti fatti:*

- (a) *l'insieme Y dei maggioranti per E è non vuoto ed ammette minimo;*
- (b) *l'insieme X dei minoranti per E è non vuoto ed ammette massimo;*
- (c) *risulta $\max X \leq \min Y$.*

Dimostrazione. Ovviamente $X \neq \emptyset$ ed $Y \neq \emptyset$, perché $-\infty \in X$ e $+\infty \in Y$. A questo punto è sufficiente ripetere la dimostrazione del Teorema (4.6). ■

(5.6) Definizione *Se E è un sottoinsieme non vuoto di $\overline{\mathbb{R}}$, denotiamo con $\sup E$ (estremo superiore di E) il minimo dei maggioranti per E e con $\inf E$ (estremo inferiore di E) il massimo dei minoranti per E . Se X è un insieme non vuoto e $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ è una funzione, si usa scrivere $\sup_X f$ o $\sup_{x \in X} f(x)$ invece di $\sup f(X)$ e, similmente, $\inf_X f$ o $\inf_{x \in X} f(x)$ invece di $\inf f(X)$.*

(5.7) Proposizione *Se $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ ammette massimo, si ha $\max E = \sup E$. Se E ammette minimo, si ha $\min E = \inf E$.*

Dimostrazione. È sufficiente ripetere la dimostrazione della Proposizione (4.9). ■

(5.8) Definizione Sia E un sottoinsieme di $\overline{\mathbb{R}}$. Diciamo che E è limitato superiormente, se $E = \emptyset$ o $\sup E < +\infty$. Diciamo che E è limitato inferiormente, se $E = \emptyset$ o $\inf E > -\infty$. Diciamo che E è limitato, se E è limitato sia superiormente che inferiormente. Siano X un insieme e $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una funzione. Diciamo che f è limitata (risp. limitata superiormente, limitata inferiormente), se l'insieme $f(X)$ è limitato (risp. limitato superiormente, limitato inferiormente).

(5.9) Esempio La funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo $f(x) = x^2$ è limitata inferiormente ma non superiormente. La funzione $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo $f(x) = x^2$ è limitata sia inferiormente che superiormente. La funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^3$ è illimitata sia inferiormente che superiormente.

(5.10) Definizione Siano X un insieme e $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ due funzioni. Se si ha

$$\forall x \in X : f(x) \leq g(x),$$

scriviamo $f \leq g$. In modo simile si definisce la scrittura $f \geq g$.

(5.11) Osservazione Siano X un insieme e $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ due funzioni. Se $f \leq g$ e g è limitata superiormente, allora anche f è limitata superiormente. Se $f \leq g$ e f è limitata inferiormente, allora anche g è limitata inferiormente. La semplice verifica è lasciata per esercizio.

6 Interi, razionali e irrazionali

In questa sezione consideriamo alcuni sottoinsiemi notevoli di $\mathbb{R}$. Il più importante è il sottoinsieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali $0, 1, 2, \dots$, le cui proprietà fondamentali sono elencate dal seguente risultato che riportiamo senza dimostrazione.

(6.1) Teorema Valgono i seguenti fatti:

- (a) $\sup \mathbb{N} = +\infty$;
- (b) ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{N}$ ammette minimo;
- (c) ogni sottoinsieme di $\mathbb{N}$ non vuoto e limitato superiormente ammette massimo;

(d) se $A \subseteq \mathbb{N}$ soddisfa

$$0 \in A,$$

$$\forall n : n \in A \implies (n + 1) \in A,$$

risulta $A = \mathbb{N}$;

(e) per ogni $m, n \in \mathbb{N}$ si ha $m + n \in \mathbb{N}$ e $mn \in \mathbb{N}$.

(6.2) Osservazione La proprietà (d) del teorema precedente sta alla base di un'importante tecnica dimostrativa. Data un'affermazione $\mathcal{P}(n)$ (che può dipendere anche da altri parametri, anche reali), supponiamo di sapere che le affermazioni seguenti sono vere:

$\mathcal{P}(0)$ (primo passo dell'induzione),

$$\forall n \in \mathbb{N} : \mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n + 1).$$

Allora si ha

$$\forall n \in \mathbb{N} : \mathcal{P}(n),$$

ossia l'affermazione $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni numero naturale n . In altre parole, se al primo passo l'affermazione è vera e se $\mathcal{P}(n)$ vera comporta che anche $\mathcal{P}(n+1)$ è vera, allora possediamo un marchingegno ricorsivo per garantire che $\mathcal{P}(n)$ sarà vera per un qualsivoglia numero naturale n . In effetti, formalmente

$$A = \{n \in \mathbb{N} : \mathcal{P}(n) \text{ è vera}\}$$

è un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ conforme alla (d), per cui $A = \mathbb{N}$, ossia l'affermazione desiderata. Questo tipo di argomentazione si chiama dimostrazione per induzione. Vediamo ora alcuni esempi di applicazione del metodo di induzione. Ragionando per induzione si dimostrano le seguenti proprietà (per lo svolgimento si rimanda al corso di esercitazioni):

(a) per ogni $x \in [-1, +\infty[$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \quad (\text{disuguaglianza di Bernoulli});$$

(b) per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n;$$

(c) per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2};$$

(d) per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$ si ha

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

(e) per ogni $x \in \mathbb{R}$ con $x \neq 1$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

Dall'affermazione (a) del Teorema (6.1) si deduce la seguente proprietà.

(6.3) Teorema (proprietà di Archimede) Siano $x, y \in \mathbb{R}$ con $x > 0$. Allora esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $nx > y$.

Dimostrazione. Poiché $\sup \mathbb{N} = +\infty$, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > y/x$. Ne segue $nx > y$. ■

Se $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, ricordiamo che la potenza a^n è definita da

$$a^n = \underbrace{a a \cdots a}_{n\text{-volte}}.$$

Poniamo inoltre per definizione $a^0 = 1$. Per il seguito, è importante osservare che

$$\forall n \in \mathbb{N} : a^{n+1} = a^n a.$$

Ricordiamo anche le proprietà principali delle potenze.

(6.4) Proposizione Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e per ogni $m, n \in \mathbb{N}$ si ha

$$a^{m+n} = a^m a^n,$$

$$a^{mn} = (a^m)^n,$$

$$(ab)^n = a^n b^n.$$

(6.5) Definizione Sia $x \in \mathbb{R}$. Diciamo che x è un numero intero, se esistono $m, n \in \mathbb{N}$ tali che $x = m - n$. Denotiamo con $\mathbb{Z}$ l'insieme dei numeri interi.

(6.6) Proposizione Valgono i seguenti fatti:

(a) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$;

(b) per ogni $x, y \in \mathbb{Z}$ si ha $x + y \in \mathbb{Z}$, $xy \in \mathbb{Z}$ e $-x \in \mathbb{Z}$.

Dimostrazione. Risulta $n = n - 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre da $x = m - n$ ed $y = p - q$ con $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ segue

$$\begin{aligned}x + y &= (m + p) - (n + q) , \\xy &= (mp + nq) - (mq + np) , \\-x &= n - m ,\end{aligned}$$

da cui la tesi. ■

(6.7) Definizione Sia $x \in \mathbb{R}$. Diciamo che x è un numero razionale, se esistono $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tali che $x = \frac{m}{n}$. Denotiamo con $\mathbb{Q}$ l'insieme dei numeri razionali. Diciamo che $x \in \mathbb{R}$ è irrazionale, se x non è razionale.

(6.8) Proposizione Valgono i seguenti fatti:

- (a) $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$;
- (b) per ogni $x, y \in \mathbb{Q}$ si ha $x + y \in \mathbb{Q}$, $xy \in \mathbb{Q}$ e $-x \in \mathbb{Q}$. Se poi $x \neq 0$, $x^{-1} \in \mathbb{Q}$.

Dimostrazione. Risulta $m = m/1$ per ogni $m \in \mathbb{Z}$. Inoltre da $x = m/n$ e $y = p/q$ con $m, p \in \mathbb{Z}$ e $n, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ segue

$$\begin{aligned}x + y &= \frac{mq + np}{nq} , \\xy &= \frac{mp}{nq} , \quad -x = \frac{-m}{n} .\end{aligned}$$

Se poi $x \neq 0$, si ha $m \neq 0$ e

$$x^{-1} = \frac{n}{m} ,$$

da cui la tesi. ■

Vediamo ora come tra due reali distinti si riesca sempre ad infilare un razionale.

(6.9) Teorema Siano $x, y \in \mathbb{R}$ tali che $x < y$. Allora esiste $q \in \mathbb{Q}$ tale che $x < q < y$.

Dimostrazione. Se $x < 0 < y$, è sufficiente porre $q = 0$. Se $x \geq 0$, per la proprietà di Archimede esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n(y - x) > 1$. Risulta $0 < ny$. Allora, per la (c) del Teorema (6.1), esiste

$$m = \max \{p \in \mathbb{N} : p < ny\} .$$

Risulta quindi $m < ny$ e $(m + 1) \geq ny$. Ne segue $m \geq ny - 1 > nx$, quindi $x < m/n < y$. Infine, se $y \leq 0$, risulta $-y < -x$ e $-y \geq 0$. Esiste quindi $q \in \mathbb{Q}$ tale che $-y < q < -x$. Ne segue $-q \in \mathbb{Q}$ e $x < -q < y$. ■

Come mostra il seguente risultato l'insieme degli irrazionali è non vuoto.

(6.10) Teorema *Non esiste nessun $q \in \mathbb{Q}$ tale che $q^2 = 2$.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che l'affermazione sia falsa. Allora esistono $n \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{N}$ tra loro primi e tali che $n^2 = 2m^2$. In particolare ne segue che n^2 è pari, per cui n stesso è pari, quindi della forma $n = 2k$. Allora si ha $2k^2 = m^2$, per cui m^2 è pari, da cui m stesso è pari, contro l'ipotesi che n e m siano primi tra loro. ■

7 Il binomio di Newton

(7.1) Definizione *Per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$ si chiama fattoriale di n il numero naturale $n!$ definito da*

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots n.$$

Si pone anche, per definizione, $0! = 1$.

Per il seguito, è importante osservare che

$$\forall n \in \mathbb{N} : (n + 1)! = n!(n + 1).$$

(7.2) Definizione *Per ogni $n, k \in \mathbb{N}$ con $k \leq n$ poniamo*

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n - k)!}.$$

I numeri della forma $\binom{n}{k}$ si chiamano coefficienti binomiali.

(7.3) Proposizione *Siano $n, k \in \mathbb{N}$ con $k \leq n$. Valgono allora i seguenti fatti:*

$$(a) \quad \binom{n}{k} \in \mathbb{N};$$

$$(b) \quad \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k};$$

(c) se $k \geq 1$, si ha

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

Dimostrazione. Per la (a) si ragiona per induzione. La (b) e la (c) sono immediate. ■

(7.4) Definizione Siano $m, n \in \mathbb{Z}$ con $m \leq n$ e siano $x_m, x_{m+1}, \dots, x_n$ dei numeri reali. Il numero reale

$$\sum_{k=m}^n x_k$$

detto sommatoria da m a n di x_k , è definito da

$$\sum_{k=m}^n x_k = x_m + x_{m+1} + \dots + x_n.$$

Enunciamo senza dimostrazione alcune semplici proprietà delle sommatorie.

(7.5) Proposizione Siano $m, n \in \mathbb{Z}$ con $m \leq n$, siano $x_m, \dots, x_n, y_m, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ e sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora si ha

$$\sum_{k=m}^n (x_k + y_k) = \sum_{k=m}^n x_k + \sum_{k=m}^n y_k,$$

$$\sum_{k=m}^n (\lambda x_k) = \lambda \sum_{k=m}^n x_k,$$

$$\sum_{k=m}^n x_k = \sum_{k=m+1}^{n+1} x_{k-1} = \sum_{k=m-1}^{n-1} x_{k+1}.$$

Veniamo ora ad una importante formula per il calcolo della potenza n -esima della somma di due numeri reali.

(7.6) Teorema (Formula del binomio di Newton) Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Dimostrazione. Ragioniamo per induzione su n . Risulta

$$(x + y)^0 = 1 = \binom{0}{0} x^0 y^0.$$

Supponiamo ora che la formula sia vera per un certo $n \in \mathbb{N}$. Si ha

$$\begin{aligned}
 (x + y)^{n+1} &= x(x + y)^n + y(x + y)^n = \\
 &= x \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} + y \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} = \\
 &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{n+1-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} = \\
 &= y^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] x^k y^{n+1-k} + x^{n+1} = \\
 &= \binom{n+1}{0} y^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1} x^{n+1} = \\
 &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k},
 \end{aligned}$$

per cui la formula è vera per $n + 1$. ■

8 Cenni sui numeri complessi

L'esigenza di estendere ulteriormente l'insieme dei numeri reali nasce in modo naturale in svariate situazioni, ad esempio quella di determinare le soluzioni delle equazioni algebriche di secondo grado quando il discriminante risulta negativo, come ad esempio l'equazione $x^2 + 1 = 0$.

Denotiamo anzitutto con $\mathbb{C}$ l'insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Poniamo

$$0 := (0, 0), \quad 1 := (1, 0), \quad i := (0, 1).$$

Gli elementi dell'insieme $\mathbb{C}$ si chiamano *numeri complessi*. Se $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ e $w = (u, v) \in \mathbb{C}$, definiamo

$$z + w := (x + u, y + v),$$

$$zw := (xu - yv, xv + yu),$$

$$-z := (-x, -y).$$

Si verifica facilmente che $i^2 = -1$. Se $z \neq 0$, poniamo anche

$$z^{-1} := \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right).$$

Si verifica facilmente che valgono le seguenti proprietà algebriche.

(8.1) Teorema Per ogni $z, w, t \in \mathbb{C}$ si ha

$$(z + w) + t = z + (w + t), \quad z + w = w + z,$$

$$z + 0 = z, \quad z + (-z) = 0,$$

$$(zw)t = z(wt), \quad zw = wz,$$

$$z \cdot 1 = z, \quad z \neq 0 \implies zz^{-1} = 1,$$

$$(z + w)t = zt + wt.$$

Ripetendo la dimostrazione della Proposizione (2.1) si ottiene la seguente

(8.2) Proposizione Per ogni $z, w, t \in \mathbb{C}$ si ha:

$$z + t = w + t \implies z = w,$$

$$(zt = wt \text{ e } t \neq 0) \implies z = w,$$

$$-(-z) = z,$$

$$z \neq 0 \implies (z^{-1})^{-1} = z,$$

$$z \cdot 0 = 0,$$

$$zw = 0 \implies (z = 0 \text{ o } w = 0),$$

$$-(zw) = (-z)w.$$

Le notazioni $z - w$ e z/w hanno in $\mathbb{C}$ lo stesso significato che avevano in $\mathbb{R}$. Se $n \in \mathbb{N}$, anche il numero complesso z^n viene definito come nel caso reale. Infine, se $m, n \in \mathbb{Z}$ con $m \leq n$ e $z_m, z_{m+1}, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, anche la sommatoria $\sum_{k=m}^n z_k$ viene definita come nel caso reale. Vale inoltre ancora la formula del binomio di Newton

$$(z + w)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k w^{n-k}$$

per ogni $z, w \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$. Denotiamo con

$$\operatorname{Re} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \operatorname{Im} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$$

le funzioni

$$\operatorname{Re}(x, y) = x, \quad \operatorname{Im}(x, y) = y.$$

Il numero reale $\operatorname{Re} z$ si chiama *parte reale* di z , mentre il numero reale $\operatorname{Im} z$ si chiama *parte immaginaria* di z . Evidentemente $z = (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$. I numeri complessi z con $\operatorname{Re} z = 0$ si chiamano *immaginari puri*. Si verifica facilmente che vale la seguente

(8.3) Proposizione *Se $x, y \in \mathbb{R}$, si ha*

$$(x + y, 0) = (x, 0) + (y, 0),$$

$$(xy, 0) = (x, 0) \cdot (y, 0),$$

$$(-x, 0) = -(x, 0),$$

$$x \neq 0 \implies (x^{-1}, 0) = (x, 0)^{-1},$$

$$(x, 0) = (y, 0) \implies x = y.$$

La proposizione precedente permette di identificare ogni reale x col numero complesso $(x, 0)$ in modo consistente rispetto a somma e prodotto. Evidentemente un numero complesso z è reale se e solo se $\operatorname{Im} z = 0$. Ad esempio, se $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, risulta

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = (x, 0) + i \cdot (y, 0) = x + iy.$$

Nel seguito adotteremo spesso la scrittura $x + iy$ invece di (x, y) per denotare un numero complesso z , e diremo che z è scritto in forma cartesiana. Un vantaggio di tale notazione è che la somma ed il prodotto di due numeri complessi e l'opposto ed il reciproco di un numero complesso possono essere calcolati applicando le usuali regole del calcolo, tenendo presente che $i^2 = -1$. Risulta infatti

$$(x + iy) + (u + iv) = (x + u) + i(y + v),$$

$$(x + iy)(u + iv) = xu + i(xv + yu) + i^2 yv = (xu - yv) + i(xv + yu),$$

$$-(x + iy) = -x + i(-y),$$

$$\frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x - iy}{x^2 - i^2 y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

(8.4) Definizione *Per ogni $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ poniamo*

$$\bar{z} := (x, -y).$$

Il numero complesso $\bar{z}$ si chiama coniugato di z . Se $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$, $\bar{z} = x - iy$.

(8.5) Teorema Per ogni $z, w \in \mathbb{C}$ valgono i seguenti fatti:

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{zw} = \bar{z}\bar{w}, \quad \overline{\bar{z}} = z,$$

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Dimostrazione. Verifichiamo solo che $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$. Posto $z = (x, y)$ e $w = (u, v)$, si ha

$$\overline{zw} = \overline{(xu - yv, xv + yu)} = (xu - yv, -xv - yu),$$

$$\bar{z}\bar{w} = (x, -y) \cdot (u, -v) = (xu - yv, -xv - yu),$$

da cui la tesi. Le rimanenti proprietà sono lasciate per esercizio. ■

(8.6) Definizione Per ogni $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ poniamo

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Il numero reale positivo $|z|$ si chiama modulo di z .

Se $x \in \mathbb{R}$, si verifica facilmente che $|(x, 0)| = |x|$. Pertanto l'identificazione fra $x \in \mathbb{R}$ e $(x, 0) \in \mathbb{C}$ è consistente anche rispetto alla nozione di modulo.

(8.7) Teorema Per ogni $z, w \in \mathbb{C}$ valgono i seguenti fatti:

$$|z| = 0 \iff z = 0,$$

$$|zw| = |z||w|,$$

$$|z + w| \leq |z| + |w|,$$

$$||z| - |w|| \leq |z - w|,$$

$$|\operatorname{Re} z| \leq |z|, \quad |\operatorname{Im} z| \leq |z|,$$

$$|\bar{z}| = |z|,$$

$$|z|^2 = z\bar{z},$$

$$z \neq 0 \implies z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

Dimostrazione. Scrivendo $z = (x, y)$, si verifica facilmente che

$$|z| = 0 \iff z = 0,$$

$$|\operatorname{Re} z| \leq |z|, \quad |\operatorname{Im} z| \leq |z|,$$

$$\overline{\overline{z}} = z,$$

$$|z|^2 = z\overline{z},$$

$$z \neq 0 \implies z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Risulta

$$|zw|^2 = zw(\overline{zw}) = zw\overline{z}\overline{w} = |z|^2|w|^2 = (|z||w|)^2,$$

da cui $|zw| = |z||w|$. Inoltre si ha

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)(\overline{z+w}) = (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) = z\overline{z} + z\overline{w} + \overline{z}w + w\overline{w} = \\ &= |z|^2 + z\overline{w} + \overline{z}w + |w|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) + |w|^2 \leq |z|^2 + 2|z\overline{w}| + |w|^2 = \\ &= |z|^2 + 2|z||\overline{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2, \end{aligned}$$

da cui $|z+w| \leq |z| + |w|$. Infine, la disuguaglianza $||z| - |w|| \leq |z-w|$ può essere dedotta come nel Teorema (3.2). ■

9 Esercizi

Diciamo che $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza se:

- $x\mathcal{R}x$ (x è in relazione con se stesso, proprietà riflessiva);
- $x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$ (proprietà simmetrica);
- $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}z \implies x\mathcal{R}z$ (proprietà transitiva).

Diciamo che $\mathcal{R}$ è una relazione d'ordine se:

- $x\mathcal{R}x$ (x è ordinato con se stesso, proprietà riflessiva);
- $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}x \implies x = y$ (proprietà antisimmetrica);
- $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}z \implies x\mathcal{R}z$ (proprietà transitiva).

Diciamo poi che $\mathcal{R}$ è una relazione d'ordine totale se, in aggiunta:

- $x\mathcal{R}y$ oppure $y\mathcal{R}x$, per ogni x, y (ordinamento totale).

(9.1) Esercizio Sia E l'insieme degli studenti di un liceo che studiano almeno una lingua straniera. Definiamo la seguente relazione: $x\mathcal{R}y$ significa che gli studenti x e y studiano almeno una stessa lingua straniera. Di quali proprietà gode tale relazione?

(9.2) Esercizio Verificare che le seguenti relazioni sono di equivalenza.

1. Essere nato lo stesso anno.
2. Abitare nella stessa regione.
3. Parallelismo tra rette.

(9.3) Esercizio Si consideri l'insieme $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Definiamo la relazione: $x\mathcal{R}y$ significa $xy > 0$. Verificare che è una relazione di equivalenza.

Cosa cambia se si considera l'insieme $\mathbb{Z}$ e la relazione: $x\mathcal{R}y$ significa $xy \geq 0$?

(9.4) Esercizio Si consideri l'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$ e si definisca la seguente relazione: $x\mathcal{R}y$ significa $x - y$ è un multiplo di 6. Verificare che $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza. Quante e quali sono le classi di equivalenza?

(9.5) Esercizio Si consideri l'insieme dei numeri naturali privato dello 0, cioè $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, e si definisca la seguente relazione: $x\mathcal{R}y$ significa x è divisibile per y . Verificare che $\mathcal{R}$ è una relazione d'ordine.

(9.6) Esercizio Consideriamo il sottoinsieme E di $\mathbb{R}^2$ così definito:

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, 0 \leq y \leq x\}.$$

Su $\mathbb{R}^2$ consideriamo la seguente relazione: $(a, b)\mathcal{R}(c, d)$ significa $(a - c, b - d) \in E$. Provare che $\mathcal{R}$ è una relazione d'ordine.

(9.7) Soluzione esercizio (9.6).

Proprietà riflessiva. $(a, b)\mathcal{R}(a, b)$ è vera, dato che $(a - a, b - b) = (0, 0) \in E$.

Proprietà antisimmetrica. Supponiamo che valgano $(a, b)\mathcal{R}(c, d)$ e $(c, d)\mathcal{R}(a, b)$. Questo significa che $(a - c, b - d) \in E$ e $(c - a, d - b) \in E$. Per prima cosa si deduce che $a = c$ e quindi che $(0, b - d) \in E$ e $(0, d - b) \in E$, da cui segue che $b = d$.

Proprietà transitiva. Supponiamo che valgano $(a, b)\mathcal{R}(c, d)$ e $(c, d)\mathcal{R}(e, f)$. Vogliamo provare che $(a, b)\mathcal{R}(e, f)$. Si ha:

$$a - e = (a - c) + (c - e) \geq 0$$

per le ipotesi. Inoltre

$$b - f = (b - d) + (d - f) \geq 0$$

e

$$b - f = (b - d) + (d - f) \leq (a - c) + (c - e) = a - e.$$

Quindi $(a - e, b - f) \in E$ e pertanto vale anche la proprietà transitiva.

(9.8) Esercizio Semplificare le scritture usando le proprietà degli insiemi.

1. $[A \cup (A \cap B)] \cap B$;
2. $A \cup \{[B \cap (A \cup B)] \cap [A \cup (A \cap B)]\}$;
3. $A \cap B \cap (B \cup C^c)$;
4. $\{[(A \cap A) \cap E] \cap \emptyset\} \cap A$;
5. $(A \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B^c)$.

(9.9) Esercizio Dati gli insiemi $A = \{1, 2\}$, $B = \{a\}$, $C = \{p, q, r\}$, verificare che:

1. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;
2. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;
3. $A \times B \neq B \times A$.

(9.10) Esercizio Sia, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n = \{x \in \mathbb{R} : x \leq n^2\}.$$

Mostrare che

$$\bigcup_{n \geq 1} A_n = \mathbb{R}.$$

(9.11) Esercizio Sia, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n = \left\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{n}\right\}.$$

Calcolare

$$\bigcap_{n=3}^6 A_n.$$

(9.12) Esercizio Sia, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2, -\frac{1}{n} \leq y \leq \frac{1}{n}\right\}.$$

Calcolare

$$\bigcap_{n \geq 1} A_n.$$

(9.13) Esercizio Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, e sia, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$B_n^\alpha = \left\{x \in \mathbb{R} : |x - \alpha| \leq \frac{1}{n}\right\}.$$

Mostrare che

$$\bigcap_{n \geq 1} B_n^\alpha = \{\alpha\}, \quad \bigcup_{n \geq 1} B_n^\alpha = B_1^\alpha, \quad \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} \bigcap_{n \geq 1} B_n^\alpha = \mathbb{R}.$$

(9.14) Soluzione esercizio (9.10).

Primo passo. Dimostriamo che

$$\bigcup_{n \geq 1} A_n \subseteq \mathbb{R}.$$

Sia $x \in \bigcup_{n \geq 1} A_n$. Allora $x \in A_{\bar{n}}$ per qualche $\bar{n} \geq 1$, da cui si deduce che $x \in \mathbb{R}$.

Secondo passo. Dimostriamo che

$$\mathbb{R} \subseteq \bigcup_{n \geq 1} A_n.$$

Sia $x \in \mathbb{R}$. La proprietà di Archimede assicura che esiste un numero naturale $\bar{n} \geq 1$ tale che $x < \bar{n}$. Dato che $\bar{n} \in \mathbb{N}$, si ha $\bar{n} \leq \bar{n}^2$; quindi $x < \bar{n}^2$. Pertanto

$$x \in A_{\bar{n}} \subseteq \bigcup_{n \geq 1} A_n.$$

(9.15) Soluzione esercizio (9.12). La disequazione $x^2 + y^2 \leq 2$ rappresenta un cerchio in $\mathbb{R}^2$ centrato nell'origine $(0, 0)$ e con raggio $\sqrt{2}$. L'insieme A_n è formato dai punti del cerchio con ordinata y compresa tra $-1/n$ e $1/n$. Consideriamo l'insieme

$$B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}, y = 0 \right\}.$$

Si vede facilmente che $B \subseteq A_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$; quindi

$$B \subseteq \bigcap_{n \geq 1} A_n.$$

Sia ora $(x, y) \in \bigcap_{n \geq 1} A_n$. Se fosse $y > 0$, allora la proprietà di Archimede ci assicura che esiste $\bar{n} \geq 1$ tale che

$$\frac{1}{y} < \bar{n}.$$

Quindi

$$y > \frac{1}{\bar{n}}$$

e pertanto $(x, y) \notin A_{\bar{n}}$ e $(x, y) \notin \bigcap_{n \geq 1} A_n$. Si ragiona allo stesso modo se fosse $y < 0$. Pertanto l'unica possibilità è che $y = 0$. Di conseguenza $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$, dato che $x^2 + y^2 \leq 2$. Quindi $(x, y) \in B$.

(9.16) Esercizio Determinare estremo inferiore e superiore dei seguenti insiemi.

$$1. E = \left\{ x : x = \frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

$$2. E = \left\{ x : x = \frac{n^2+1}{n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

$$3. E = \left\{ x : x = \frac{n-1}{n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

$$4. E = \left\{ x : x = 2 + (-1)^n + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\}.$$

$$5. E = \left\{ \frac{xy}{x+y} : x, y \in]0, 1[\right\}.$$

(9.17) Esercizio Trovare l'estremo inferiore e superiore di $\left\{ \frac{2x}{1+x^2} : x \in [-1, 1] \right\}$.

(9.18) Esercizio Siano A e B due sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$. Provare che

$$\sup(A \cup B) = \max \{ \sup A, \sup B \}, \quad \inf(A \cup B) = \min \{ \inf A, \inf B \}.$$

(9.19) Esercizio Trovare l'estremo inferiore e superiore di $\left\{ x > 0 : \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \right\}$.

(9.20) Esercizio Calcolare gli estremi inferiore e superiore dei seguenti insiemi:

$$1. A = \left\{ x : x = \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\}$$

$$2. B = \left\{ x : x = \frac{n-2}{n^2} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\}$$

$$3. C = \left\{ x : x = \frac{2n+3}{5} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

(9.21) Esercizio Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme A :

$$A = \left\{ a_n = \frac{3n^2 - (-1)^n n}{2n^2}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\}$$

e dimostrare che coincidono con il massimo e il minimo dell'insieme stesso.

(9.22) Esercizio Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme A così definito:

$$A = \{a_n | n \in \mathbb{N}, n \geq 1\} \quad \text{con} \quad a_n = \begin{cases} 2/n & \text{con } n \text{ pari} \\ 1/(n+1) & \text{con } n \text{ dispari} \end{cases}$$

(9.23) Esercizio Si consideri l'insieme $E = \{9^x + 3^{x+1} - 4 > 0\}$. Determinare l'estremo inferiore e superiore di E e dire se sono anche minimi e massimi di E .

(9.24) Esercizio Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ con $\inf A = 5$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere, false o non sono deducibili dalle ipotesi.

$$1. 5 \in A.$$

$$2. 5 \notin A.$$

$$3. 6 \in A.$$

4. $\forall x \in A, x > 5.$

5. $\forall x \in A, x \geq 5.$

6. $\forall x \in A, x \leq 5.$

7. $\exists x \in A : x > 4.$

8. $\exists x \in A : x > 5.$

9. $\exists x \in A : x \geq 5.$

10. $\max A$ esiste.

11. $\min A$ esiste.

(9.25) Esercizio Sia $I = \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x < 3\}$. Calcolare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dei seguenti insiemi:

1. $A = \{a \in \mathbb{R} : a = 2x - y \mid x, y \in I\}$

2. $B = \{b \in \mathbb{R} : b = |x|y \mid x, y \in I\}$

3. $C = \left\{c \in \mathbb{R} : c = 1 + \frac{x^2}{|y|} \mid x, y \in I \text{ } y \neq 0\right\}$

(9.26) Esercizio Mostrare che $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ non ammette estremo inferiore e superiore nell'ambito dei numeri razionali. Procedere per passi; come prima cosa mostrare che se M è l'estremo superiore esso è tale che M^2 non può essere nè maggiore nè minore di 2. Il passo successivo consiste nel mostrare che se $M^2 = 2$ allora M è irrazionale.

(9.27) Esercizio Sia dato l'insieme A :

$$A = \left\{a_n = \frac{7}{5} + \frac{3(-1)^n}{5n} - \frac{4}{5n^2}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$$

determinare l'estremo superiore e inferiore.

(9.28) Soluzione esercizio (9.16).

1. $\inf E = 0, \sup E = \max E = 1.$

2. $\inf E = \min E = 1, \sup E = +\infty.$

3. $\inf E = \min E = -1, \sup E = 1.$

4. $\inf E = \min E = 1, \sup E = \max E = \frac{7}{2}.$

5. $\inf E = 0, \sup E = \frac{1}{2}.$

(9.29) Soluzione esercizio (9.27). Scriviamo A come $A = A_1 \cup A_2$ con:

$$A_1 = \{a_n | n = 2k - 1; k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \quad A_2 = \{a_n | n = 2k; k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}.$$

Osservo che A_1 ammette come minimo zero, dato che la quantità $\frac{3}{5n} + \frac{4}{5n^2}$ decresce al crescere di n . Inoltre dato che il generico elemento di A_1 è

$$a_{2k-1} = \frac{7}{5} - \frac{3}{5(2k-1)} - \frac{4}{5(2k-1)^2} < \frac{7}{5}, \quad \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

A_1 ammette come maggiorante $7/5$ che risulta coincidere con il minore dei maggioranti quindi $\sup(A_1) = 7/5$ (la dimostrazione di questo fatto è simile all'esercizio precedente). Per quanto riguarda A_2 osservo che i primi due elementi sono $a_2 = 3/2$ e $a_4 = 3/2$ e inoltre:

$$a_{2k} = \frac{7}{5} + \frac{3}{5(2k)} - \frac{4}{5(2k)^2} < \frac{7}{5} + \frac{3}{10k} < \frac{7}{5} + \frac{3}{30} = \frac{3}{2} \quad \forall k > 2$$

quindi il $\sup(A_2) = 3/2$ mentre l'estremo inferiore è sicuramente maggiore di zero. Osserviamo che $\inf(A) = \inf(A_1) = 0$ mentre il $\sup(A) = \sup(A_2) = 3/2$.

(9.30) Esercizio Siano $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ tali che

$$\forall z \in \mathbb{R} : z > y \implies z \geq x.$$

Provare che si ha $x \leq y$.

(9.31) Esercizio Risolvere i seguenti prodotti di numeri complessi

1. $i(1-i)$

2. $(1+i)(1-i)$

3. $(1+i)^2(1-i)$

4. $(2-3i)(2+i)$

(9.32) Esercizio Scrivere in forma algebrica i seguenti numeri complessi

1. $\frac{1}{1-i}$
2. $\frac{1-i}{(1+i)^2}$
3. $\frac{1+4i}{2-3i}$
4. $\frac{2-3i}{2+i}$

(9.33) Esercizio Sia z un numero complesso avente parte immaginaria positiva. Dimostrare che

$$w = \frac{z-1}{z+1}$$

ha parte immaginaria positiva.

(9.34) Esercizio Considerare il seguente numero complesso

$$w = \frac{z-1+4i}{z-3-i}$$

1. Determinare il luogo dei punti z appartenenti al piano di Gauss per cui w è reale;
2. Determinare il luogo dei punti z appartenenti al piano di Gauss per cui w è immaginario;
3. Rappresentare graficamente le due soluzioni.

(9.35) Esercizio Trasformare in forma trigonometrica ed esponenziale i seguenti numeri complessi

1. $-\sqrt{2} + \sqrt{2}i$;
2. $2 - 2i$;
3. $-1 + \sqrt{3}i$;
4. $\sqrt{6} + \sqrt{2}i$.

(9.36) Esercizio Determinare la forma algebrica dei seguenti numeri complessi (può essere utile passare prima alla forma esponenziale e poi ricoverire il risultato in forma algebrica)

1. $(1-i)^6$;
2. $(1+i)^4$;

3. $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{12}$.

(9.37) Esercizio Dimostrare che se $z = 1/2 + \sqrt{3}i/2$ allora z^5 è il coniugato di z .

(9.38) Esercizio Ricordando la definizione di radici n -esime di un numero complesso determinare

1. le radici seste dell'unità;
2. le radici quarte di $z = -4$;
3. le radici quarte di $z = i$;
4. le radici quinte di $z = \frac{1-i}{1+i}$.

(9.39) Esercizio Risolvere le seguenti equazioni

1. $2iz + 1 = 0$;
2. $(2 + 3i)z - 3 + 2i = 0$;
3. $(z - 1)^3 = -2i$;
4. $5z^2 - 4z + 1 = 0$;
5. $z^4 + (1 - 2i)z^2 - 2i$.

(9.40) Esercizio Risolvere la seguente equazione frazionaria

$$\frac{z^3 + 1}{z^3 - 1} = \frac{1}{i}.$$

(9.41) Esercizio Risolvere la seguente equazione e rappresentare graficamente la soluzione

$$|z - 1| = |z + 1|.$$

Capitolo 2

Limiti e continuità

1 Breve premessa

Il concetto di limite è centrale in analisi matematica ed appare in modo naturale già nei problemi geometrici più elementari. Consideriamo ad esempio un cerchio di raggio unitario e supponiamo di volerne calcolare l'area, con un metodo simile a quello usato da Archimede nel III secolo a.C. Dato un numero naturale $n \geq 3$, inscriviamo allora nel cerchio un poligono regolare di n lati, ad esempio un triangolo equilatero per $n = 3$, un quadrato per $n = 4$ e così via. Agli n lati del poligono corrisponderanno n angoli al centro uguali tra di loro, la cui somma deve dare l'intero angolo giro, ossia 2π , in radianti. Quindi, ogni singolo angolo al centro che corrisponde ad un lato misura $\frac{2\pi}{n}$. Di conseguenza, ogni lato del poligono individua una coppia di triangoli rettangoli aventi l'ipotenusa di lunghezza unitaria (il raggio del cerchio) ed i cateti di lunghezza $\sin(\frac{\pi}{n})$ e $\cos(\frac{\pi}{n})$ per le formule trigonometriche elementari. Ne segue che l'area s_n di ogni settore del poligono corrispondente ad un singolo lato misura

$$s_n = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

per cui l'area complessiva del poligono inscritto di n lati è

$$A_n = \frac{n}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right),$$

dove si è tenuto conto delle formule di duplicazione. Ora, all'aumentare del numero n dei lati del poligono, l'area dello stesso approssima per difetto l'area del cerchio, con un errore sempre più piccolo (risulta evidente che un procedimento analogo si può sviluppare con una successione di poligono circoscritti, nel qual caso l'area del poligono fornisce una stima per eccesso dell'area del cerchio, con un errore via via sempre più piccolo). Appare così in modo naturale la necessità di ottenere, se esiste, un valore limite per le grandezza A_n per valori di n arbitrariamente grandi. Nelle sezioni successive ci occuperemo di rendere precisa questa affermazione.

2 Funzioni continue

Diamo subito la definizione di funzione continua in un punto del suo dominio di definizione.

(2.1) Definizione Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione e $x \in E$. Diciamo che f è continua in x , se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\forall \xi \in E : |\xi - x| < \delta \implies |f(\xi) - f(x)| < \varepsilon.$$

Diciamo che f è continua, se f è continua in ogni $x \in E$.

In modo informale possiamo dire che una funzione f è continua in un punto x del suo insieme E di definizione se valori arbitrariamente vicini a $f(x)$ provengono da punti arbitrariamente vicini a x , dove la nozione di 'vicino' è resa precisa nel senso indicato sopra o, più in generale, come vedremo nelle sezioni successive, con la nozione di intorno.

Vediamo subito alcuni esempi di funzioni continue.

(2.2) Teorema Sia $c \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = c$. Allora f è continua.

Dimostrazione. Sia $x \in \mathbb{R}$ e sia $\varepsilon > 0$. Scelto ad esempio $\delta = 1$, è evidente che si ha $|f(\xi) - f(x)| = 0 < \varepsilon$ per ogni $\xi \in \mathbb{R}$ con $|\xi - x| < \delta$. ■

(2.3) Teorema Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = x$. Allora f è continua.

Dimostrazione. Sia $x \in \mathbb{R}$ e sia $\varepsilon > 0$. Scelto $\delta = \varepsilon$, è evidente che si ha $|f(\xi) - f(x)| < \varepsilon$ per ogni $\xi \in \mathbb{R}$ con $|\xi - x| < \delta$. ■

(2.4) Teorema Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = |x|$. Allora f è continua.

Dimostrazione. Sia $x \in \mathbb{R}$ e sia $\varepsilon > 0$. Poniamo $\delta = \varepsilon$. Allora per ogni $\xi \in \mathbb{R}$ con $|\xi - x| < \delta$ si ha

$$||\xi| - |x|| \leq |\xi - x| < \delta = \varepsilon,$$

da cui la tesi. ■

(2.5) Teorema Sia $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = x^{-1}$. Allora f è continua.

Dimostrazione. Sia $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e sia $\varepsilon > 0$. Poniamo

$$\delta = \min \left\{ \frac{1}{2} |x|, \frac{\varepsilon}{2} x^2 \right\}.$$

Se $\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $|\xi - x| < \delta$, risulta anzitutto

$$|x| - |\xi| \leq |x - \xi| < \delta \leq \frac{1}{2} |x| ,$$

da cui $|\xi| > \frac{1}{2} |x|$. Ne segue

$$|\xi^{-1} - x^{-1}| = \frac{|x - \xi|}{|\xi||x|} < \frac{\delta}{\frac{1}{2} x^2} \leq \varepsilon ,$$

da cui la tesi. ■

Come vediamo del seguente importante risultato, componendo funzioni continue si ottiene ancora una funzione continua, ossia le funzioni continue sono stabili per composizione.

(2.6) Teorema *Siano $E, F \subseteq \mathbb{R}$, siano $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : F \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni e sia $x \in f^{-1}(F)$. Supponiamo che f sia continua in x e che g sia continua in $f(x)$. Allora $g \circ f$ è continua in x .*

Dimostrazione. Dato $\varepsilon > 0$, sia $\sigma > 0$ tale che

$$\forall \eta \in F : |\eta - f(x)| < \sigma \implies |g(\eta) - g(f(x))| < \varepsilon .$$

Sia quindi $\delta > 0$ tale che

$$\forall \xi \in E : |\xi - x| < \delta \implies |f(\xi) - f(x)| < \sigma .$$

Ne segue

$$\forall \xi \in f^{-1}(F) : |\xi - x| < \delta \implies |g(f(\xi)) - g(f(x))| < \varepsilon ,$$

da cui la tesi. ■

Introduzione ora alcune semplici operazioni algebriche tra funzioni.

(2.7) Definizione *Siano $E \subseteq \mathbb{R}$ e $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni. Si definiscono le funzioni*

$$f + g, f - g, fg : E \rightarrow \mathbb{R} ,$$

$$f/g : \{x \in E : g(x) \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R} ,$$

ponendo

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) ,$$

$$(f - g)(x) := f(x) - g(x) ,$$

$$(fg)(x) := f(x)g(x),$$

$$\frac{f}{g}(x) := \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Come vediamo del seguente risultato, le operazioni sopra definite (*somma, differenza, prodotto, quoziente*) risultano stabili rispetto alla continuità.

(2.8) Teorema *Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ e $x \in E$. Supponiamo che f e g siano continue in x . Allora le funzioni $f + g$, $f - g$ e fg sono continue in x . Inoltre, se $g(x) \neq 0$, allora la funzione f/g è continua in x .*

Dimostrazione. Dimostriamo la continuità di $f + g$. Dato $\varepsilon > 0$, esistono $\delta', \delta'' > 0$ con

$$\forall \xi \in E : |\xi - x| < \delta' \implies |f(\xi) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\forall \xi \in E : |\xi - x| < \delta'' \implies |g(\xi) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posto $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$, per ogni $\xi \in E$ con $|\xi - x| < \delta$ risulta quindi

$$\begin{aligned} |(f(\xi) + g(\xi)) - (f(x) + g(x))| &= |(f(\xi) - f(x)) + (g(\xi) - g(x))| \leq \\ &\leq |f(\xi) - f(x)| + |g(\xi) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

La continuità di $f - g$ può essere provata per esercizio, semplicemente imitando la dimostrazione precedente. Omettiamo la dimostrazione per fg . Proviamo ora l'ultima affermazione dell'enunciato. Se definiamo $\psi : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ponendo $\psi(\xi) = \xi^{-1}$, risulta $1/g = \psi \circ g$. Dai Teoremi (2.5) e (2.6) si deduce che $1/g$ è continua in x . Poiché f/g è il prodotto di f per $(1/g)$, ne segue la continuità di f/g in x . ■

Vediamo ora che le funzioni polinomiali sono sempre continue.

(2.9) Teorema *Supponiamo che se esistano $n \in \mathbb{N}$ ed $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tali che*

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k.$$

Allora f è continua.

Dimostrazione. Consideriamo anzitutto una funzione f del tipo $f(x) = x^k$ con $k \in \mathbb{N}$. Per $k = 0$ si ottiene la funzione costantemente uguale a 1, che è continua per il Teorema (2.2). D'altronde $x^{k+1} = x^k \cdot x$. Pertanto, se $\{x \mapsto x^k\}$ è continua, anche $\{x \mapsto x^{k+1}\}$ è continua per il Teorema (2.3) ed il teorema sulla continuità di un prodotto di funzioni. Per induzione

si ottiene la continuità di f per ogni $k \in \mathbb{N}$. Se f è del tipo $f(x) = a_k x^k$ con $k \in \mathbb{N}$ ed $a_k \in \mathbb{R}$, f è continua, perché prodotto della funzione costantemente uguale ad a_k per la funzione $\{x \mapsto x^k\}$. Dimostriamo ora la tesi per induzione su n . Se $n = 0$, la funzione f è costantemente uguale ad a_0 , quindi continua. Supponiamo la tesi vera per un certo $n \in \mathbb{N}$. Risulta

$$\sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k = \left(\sum_{k=0}^n a_k x^k \right) + a_{n+1} x^{n+1}.$$

Dal teorema sulla continuità di una somma di funzioni si deduce che la tesi è vera anche per $n + 1$. ■

(2.10) Teorema *Sia f una funzione razionale, ossia il quoziente di due funzioni polinomiali. Allora per ogni $x \in \text{dom}(f)$ la funzione f è continua in x .*

Dimostrazione. Sia $f = P/Q$ con P e Q funzioni polinomiali. Evidentemente si ha $x \in \text{dom}(f)$ se e solo se $Q(x) \neq 0$. Allora la continuità di f in x discende dal teorema precedente e dal teorema sul quoziente di funzioni continue. ■

3 Topologia della retta reale

Nella presente sezione introduciamo alcuni elementi di *topologia della retta reale*. Con tali nozioni è anche possibile formulare in modo unitario la definizione di limite.

(3.1) Definizione *Siano $U \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ e $x \in \overline{\mathbb{R}}$. Diciamo che U è un intorno di x , se si verifica uno dei seguenti fatti:*

- (a) $x \in \mathbb{R}$ ed esiste $r > 0$ tale che $]x - r, x + r[\subseteq U$;
- (b) $x = -\infty$ ed esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $[-\infty, M[\subseteq U$;
- (c) $x = +\infty$ ed esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $]M, +\infty] \subseteq U$.

(3.2) Esempio $] - 3, 2[$ è un intorno di 0, $] - 1, 0[$, $] - 1, 0]$, $]0, 1[$, $[0, 1[$ non sono intorni di 0.

Come vediamo nel seguente teorema, gli intorni di un punto sono stabili rispetto all'operazione di intersezione insiemistica. Inoltre, punti distinti ammettono sempre dei relativi intorni disgiunti (proprietà di separazione della topologia).

(3.3) Teorema *Valgono i seguenti fatti:*

- (a) se $U, V \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ sono intorno di un medesimo $x \in \overline{\mathbb{R}}$, allora anche $U \cap V$ è un intorno di x ;
- (b) se $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ e $x \neq y$, allora esistono un intorno U di x ed un intorno V di y tali che $U \cap V = \emptyset$;
- (c) se $U \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ è un intorno di $x \in \overline{\mathbb{R}}$, allora esiste un intorno V di x tale che $V \subseteq U$ e tale che V sia un intervallo.

Dimostrazione.

(a) Ci limitiamo a considerare in caso in cui $x \in \mathbb{R}$; in modo simile si può verificare l'affermazione per $x = +\infty$ o $x = -\infty$. Esistono dunque $r, s > 0$ tali che $]x - r, x + r[\subseteq U$ e $]x - s, x + s[\subseteq V$. Poniamo $t = \min\{r, s\}$. Risulta $t > 0$ e

$$]x - t, x + t[\subseteq]x - r, x + r[\subseteq U,$$

$$]x - t, x + t[\subseteq]x - s, x + s[\subseteq V,$$

per cui $]x - t, x + t[\subseteq U \cap V$. Pertanto $U \cap V$ è un intorno di x .

(b) A meno di scambiare x con y , possiamo supporre $x < y$. Anche questa volta proviamo l'affermazione solo per il caso $x \in \mathbb{R}$, omettendo la dimostrazione dei casi $x = +\infty$ e $x = -\infty$. Si ha $(y - x) > 0$. Poniamo $r = \frac{1}{2}(y - x)$, $U =]x - r, x + r[$ e $V =]y - r, y + r[$. Evidentemente U è un intorno di x e V è un intorno di y . Se per assurdo $z \in U \cap V$, risulta $x - r < z < x + r$ ed $y - r < z < y + r$. Ne segue

$$|y - x| = |(y - z) + (z - x)| \leq |y - z| + |z - x| < 2r = |y - x|,$$

il che è assurdo. Pertanto $U \cap V = \emptyset$.

(c) Se U è un intorno di x e $x \in \mathbb{R}$, esiste $r > 0$ tale che $]x - r, x + r[\subseteq U$. Allora $V =]x - r, x + r[$ è un intorno di x contenuto in U e V è un intervallo. Se U è un intorno di $-\infty$, esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $[-\infty, M[\subseteq U$. Allora $V = [-\infty, M[$ ha i requisiti richiesti. Se U è un intorno di $+\infty$, il ragionamento è simile. ■

(3.4) Definizione Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ e $x \in \overline{\mathbb{R}}$. Diciamo che x è aderente ad E , se per ogni intorno U di x si ha $U \cap E \neq \emptyset$.

(3.5) Esempio 0 e 1 sono punti aderenti all'insieme $E =]0, 1[$.

(3.6) Teorema Sia E un sottoinsieme non vuoto di $\overline{\mathbb{R}}$. Allora $\inf E$ e $\sup E$ sono aderenti ad E . In particolare, $-\infty$ e $+\infty$ sono aderenti a $\mathbb{R}$.

Dimostrazione. Poniamo $x = \sup E$. Se $x = -\infty$, si ha necessariamente $E = \{-\infty\}$. In tal caso è ovvio che x è aderente ad E . Se $x \in \mathbb{R}$, per ogni intorno U di x esiste $r > 0$ tale che $]x - r, x + r[\subseteq U$. Poiché $x - r$ non è un maggiorante per E , esiste $\xi \in E$ tale che $\xi > x - r$. D'altronde è ovvio che $\xi < x + r$, per cui $\xi \in]x - r, x + r[\cap E \subseteq U \cap E$. Pertanto $U \cap E \neq \emptyset$. Infine, se $x = +\infty$, per ogni intorno U di $+\infty$ esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $]M, +\infty] \subseteq U$. Dal momento che M non è un maggiorante per E , esiste $\xi \in E$ tale che $\xi > M$. Ne segue $\xi \in]M, +\infty] \cap E \subseteq U \cap E$, quindi $U \cap E \neq \emptyset$. La dimostrazione che anche $\inf E$ è aderente ad E può essere svolta per esercizio. ■

Poniamo

$$\overline{E} := \left\{ x \in \overline{\mathbb{R}} : x \text{ è aderente ad } E \right\}.$$

Osserviamo che per il teorema precedente la notazione $\overline{\mathbb{R}}$ non è ambigua. L'insieme $\overline{E}$ si chiama *chiusura* di E . Evidentemente per ogni $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ si ha $E \subseteq \overline{E}$.

(3.7) Esempio $[0, 1]$ è la chiusura dell'insieme $E =]0, 1[$.

(3.8) Definizione Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ e $x \in \overline{\mathbb{R}}$. Diciamo che x è *interno* ad E , se E è un intorno di x .

Poniamo

$$\text{int}(E) := \left\{ x \in \overline{\mathbb{R}} : x \text{ è interno ad } E \right\}.$$

L'insieme $\text{int}(E)$ si chiama *parte interna* di E . Evidentemente per ogni $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ si ha $\text{int}(E) \subseteq E$.

(3.9) Esempio $]0, 1[$ è la parte interna dell'insieme $E = [0, 1]$.

(3.10) Definizione Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Diciamo che E è *aperto* se

$$\text{int}(E) = E.$$

Diciamo che E è *chiuso* se

$$\overline{E} = E.$$

(3.11) Esempio L'insieme $E =]0, 1]$ non è né aperto né chiuso, essendo $\text{int}(E) =]0, 1[\neq E$ e $\overline{E} = [0, 1] \neq E$.

(3.12) Proposizione Sia $E \subseteq \mathbb{R}$. Allora E è chiuso in $\mathbb{R}$ se e solo se $\mathbb{R} \setminus E$ è aperto in $\mathbb{R}$.

(3.13) Proposizione Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme aperto. Allora E non ha né massimo né minimo assoluto.

(3.14) Definizione Siano $E \subseteq \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$. Diciamo che x è un punto di accumulazione per E , se x è aderente ad $E \setminus \{x\}$.

(3.15) Definizione Siano $E \subseteq F \subseteq \mathbb{R}$. Diciamo che E è denso in F , se $F \subseteq \overline{E}$.

Si verifica facilmente che valgono i seguenti fatti. La semplice dimostrazione può essere svolta per esercizio.

(3.16) Esempio Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Allora

$$\overline{[a, b]} = \overline{[a, b[} = \overline{]a, b]} = \overline{]a, b[} = [a, b].$$

(3.17) Esempio Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Allora

$$\text{int}([a, b]) = \text{int}([a, b]) = \text{int}(]a, b]) = \text{int}(]a, b]) =]a, b[.$$

(3.18) Esempio Ogni intervallo della forma $[a, b[$ o $]a, b]$ non è né chiuso né aperto in $\mathbb{R}$. Ogni singoletto $\{a\}$ è chiuso in $\mathbb{R}$.

(3.19) Esempio L'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali non è né chiuso né aperto in $\mathbb{R}$.

(3.20) Esempio L'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi è chiuso in $\mathbb{R}$.

(3.21) Esempio Si verifica facilmente che

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[= \{0\}$$

e che

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{n}, \frac{n}{n+1} \right] =]0, 1[.$$

Quindi, in generale, l'intersezione numerabile di insiemi aperti di $\mathbb{R}$ può essere un insieme chiuso di $\mathbb{R}$ e l'unione numerabile di insiemi chiusi di $\mathbb{R}$ può essere un insieme aperto di $\mathbb{R}$.

(3.22) Teorema L'insieme $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$.

Dimostrazione. Se $x \in \mathbb{R}$ ed U è un intorno di x , esiste $r > 0$ tale che $]x - r, x + r[\subseteq U$. Per il Teorema (6.9) esiste $q \in]x - r, x + r[\cap \mathbb{Q}$, per cui $U \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$. Pertanto $x \in \overline{\mathbb{Q}}$. Se $x = +\infty$ ed U è un intorno di x , esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $]M, +\infty] \subseteq U$. Per la proprietà di Archimede esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > M$. In particolare $n \in]M, +\infty] \cap \mathbb{Q}$, per cui $U \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$. Pertanto anche $+\infty$ è aderente a $\mathbb{Q}$. In modo simile si prova che $-\infty$ è aderente a $\mathbb{Q}$. ■

4 Limite di una funzione

La nozione di intorno consente anzitutto di fornire un'utile riformulazione della nozione di continuità.

(4.1) Proposizione Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ e $x \in E$. Allora f è continua in x se e solo se per ogni intorno V di $f(x)$ esiste un intorno U di x tale che $f(U \cap E) \subseteq V$.

Dimostrazione. Supponiamo che f sia continua in x . Sia V un intorno di $f(x)$. Sia $\varepsilon > 0$ tale che $]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[\subseteq V$ e sia $\delta > 0$ tale che

$$\forall \xi \in E : |\xi - x| < \delta \implies |f(\xi) - f(x)| < \varepsilon,$$

ossia $f(]x - \delta, x + \delta[\cap E) \subseteq]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[$. Allora $]x - \delta, x + \delta[$ è un intorno di x e $f(]x - \delta, x + \delta[\cap E) \subseteq V$. Per provare il viceversa, consideriamo $\varepsilon > 0$. Si ha che $]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[$ è un intorno di $f(x)$. Sia U un intorno di x tale che $f(U \cap E) \subseteq]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[$. Sia $\delta > 0$ tale che $]x - \delta, x + \delta[\subseteq U$. Allora risulta $f(]x - \delta, x + \delta[\cap E) \subseteq]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[$, ossia

$$\forall \xi \in E : |\xi - x| < \delta \implies |f(\xi) - f(x)| < \varepsilon,$$

da cui la tesi. ■

La nozione di continuità è in effetti un caso particolare di una nozione più generale, che ora introduciamo nell'ambiente $\overline{\mathbb{R}}$. La nozione di intorno ci consente di fornire una presentazione unitaria.

(4.2) Definizione Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una funzione, $x \in \overline{E}$ e $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Diciamo che ℓ è limite di f in x , se per ogni intorno V di ℓ esiste un intorno U di x tale che $f(U \cap E) \subseteq V$.¹

(4.3) Proposizione (Unicità del limite) Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $x \in \overline{E}$ e $\ell', \ell'' \in \overline{\mathbb{R}}$. Supponiamo che ℓ' e ℓ'' siano entrambi limiti di f in x . Allora $\ell' = \ell''$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo $\ell' \neq \ell''$. Per il Teorema (3.3) esistono un intorno V' di ℓ' ed un intorno V'' di ℓ'' tali che $V' \cap V'' = \emptyset$. Siano U' ed U'' due intorni di x tali che $f(U' \cap E) \subseteq V'$ e $f(U'' \cap E) \subseteq V''$. Per il Teorema (3.3) $U' \cap U''$ è un intorno di x . Essendo

¹Esiste in letteratura una diversa definizione di limite, più classica, secondo cui una funzione $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ammette limite ℓ in x se per ogni intorno V di ℓ esiste un intorno U di x tale che $f(U \cap E \setminus \{x\}) \subseteq V$, nell'ipotesi che il punto x sia di accumulazione per E . Ad esempio, la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uguale ad 1 in ogni $x \neq 0$ e che vale 0 in $x = 0$ non risulta avere limite secondo la definizione data, mentre ha limite rispetto alla definizione classica. Con la definizione di limite data (che venne originariamente divulgata da Ennio De Giorgi) il teorema di composizione si enuncia in maniera più pulita.

x aderente ad E , esiste $\xi \in (U' \cap U'') \cap E$. Ne segue $f(\xi) \in V' \cap V''$, quindi $V' \cap V'' \neq \emptyset$, il che è assurdo. ■

(4.4) Definizione Se f ammette limite ℓ in x , poniamo

$$\lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) := \ell$$

e diciamo che $f(\xi)$ tende a ℓ per ξ tendente a x (equivalentemente, $f(\xi) \rightarrow \ell$ per $\xi \rightarrow x$).

Se $\ell \in \mathbb{R}$, diciamo che f è convergente in x .

Se $\ell = +\infty$, diciamo che f è positivamente divergente in x .

Se $\ell = -\infty$, diciamo che f è negativamente divergente in x .

Come avevamo anticipato, la nozione di limite contiene come caso particolare quella di continuità.

(4.5) Proposizione Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ e $x \in E$. Allora f è continua in x se e solo se

$$\lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = f(x).$$

Dimostrazione. È sufficiente confrontare la Definizione (4.2) con la Proposizione (4.1). ■

Anche se la nozione di intorno consente una formulazione unitaria della nozione di limite, è utile possedere delle caratterizzazioni più dirette.

(4.6) Proposizione Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $x \in \overline{E}$ e $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora l'affermazione

$$\lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = \ell$$

può essere così caratterizzata:

(a) caso $x \in \mathbb{R}$ e $\ell \in \mathbb{R}$:

per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\forall \xi \in E : |\xi - x| < \delta \implies |f(\xi) - \ell| < \varepsilon;$$

(b) caso $x \in \mathbb{R}$ e $\ell = -\infty$:

per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\forall \xi \in E : |\xi - x| < \delta \implies f(\xi) < M;$$

(c) caso $x \in \mathbb{R}$ e $\ell = +\infty$:

per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\forall \xi \in E : |\xi - x| < \delta \implies f(\xi) > M ;$$

(d) caso $x = -\infty$ e $\ell \in \mathbb{R}$:

per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall \xi \in E : \xi < N \implies |f(\xi) - \ell| < \varepsilon ;$$

(e) caso $x = -\infty$ e $\ell = -\infty$:

per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste $N \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall \xi \in E : \xi < N \implies f(\xi) < M ;$$

(f) caso $x = -\infty$ e $\ell = +\infty$:

per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste $N \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall \xi \in E : \xi < N \implies f(\xi) > M ;$$

(g) caso $x = +\infty$ e $\ell \in \mathbb{R}$:

per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall \xi \in E : \xi > N \implies |f(\xi) - \ell| < \varepsilon ;$$

(h) caso $x = +\infty$ e $\ell = -\infty$:

per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste $N \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall \xi \in E : \xi > N \implies f(\xi) < M ;$$

(i) caso $x = +\infty$ e $\ell = +\infty$:

per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste $N \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall \xi \in E : \xi > N \implies f(\xi) > M .$$

Dimostrazione. Lasciamo l'utile verifica per esercizio. ■

(4.7) Proposizione Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $x \in \overline{E}$ e $\ell \in \mathbb{R}$. Allora sono fatti equivalenti:

$$(a) \lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = \ell;$$

$$(b) \lim_{\xi \rightarrow x} |f(\xi) - \ell| = 0.$$

Dimostrazione. La condizione

$$|f(\xi) - \ell| < \varepsilon$$

è chiaramente equivalente a

$$||f(\xi) - \ell| - 0| < \varepsilon.$$

La tesi discende allora dalla proposizione precedente. ■

Vediamo ora qualche esempio notevole di limite.

(4.8) Teorema *Risulta*

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} |\xi| = +\infty, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} |\xi| = +\infty.$$

Dimostrazione. Per ogni $M \in \mathbb{R}$ poniamo $N = -|M|$. Se $\xi < N$, si ha $\xi < 0$, quindi

$$|\xi| = -\xi > -N = |M| \geq M.$$

La seconda relazione di limite può essere dimostrata per esercizio. ■

(4.9) Teorema *Risulta*

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \frac{1}{\xi} = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{1}{\xi} = 0;$$

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \left| \frac{1}{\xi} \right| = +\infty.$$

Dimostrazione. Per ogni $\varepsilon > 0$ poniamo $N = -\varepsilon^{-1}$. Se $\xi < N$, si ha $\xi < 0$, quindi

$$-\varepsilon < \frac{1}{\xi} < \varepsilon,$$

per cui $|1/\xi| < \varepsilon$. Il limite a $+\infty$ può essere trattato per esercizio in maniera simile. Consideriamo ora il terzo limite. Per ogni $M \in \mathbb{R}$ sia $\delta = \frac{1}{|M|+1}$. Se $|\xi| < \delta$ e $\xi \neq 0$, risulta

$$\left| \frac{1}{\xi} \right| > \frac{1}{\delta} = |M| + 1 > M,$$

da cui la tesi. ■

4.1 Alcuni teoremi sui limiti

Dimostriamo ora qualche risultato generale riguardante la nozione di limite.

(4.10) Teorema (di locale limitatezza) Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $x \in \overline{E}$ e $\ell \in \mathbb{R}$. Supponiamo che

$$\lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = \ell.$$

Allora esiste un intorno U di x tale che $f(U \cap E)$ sia limitato.

Dimostrazione. $]\ell - 1, \ell + 1[$ è un intorno di ℓ , quindi esiste un intorno U di x tale che $f(U \cap E) \subseteq]\ell - 1, \ell + 1[$. Evidentemente $\sup f(U \cap E) \leq \ell + 1$ ed $\inf f(U \cap E) \geq \ell - 1$. ■

(4.11) Osservazione Nel teorema precedente è necessario che il limite ℓ sia finito. Se ad esempio $f(\xi) = \frac{1}{\xi}$ su $E =]0, 1[$, si ha

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} f(\xi) = +\infty$$

e l'insieme $f(U \cap]0, 1[)$ non è limitato, per nessun intorno U di 0.

(4.12) Teorema (di permanenza del segno) Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $x \in \overline{E}$ e $\ell \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$. Supponiamo che

$$\lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = \ell.$$

Allora esiste un intorno U di x tale che

$$\forall \xi \in U \cap E : f(\xi)\ell > 0.$$

Dimostrazione. Supponiamo ad esempio $\ell > 0$. L'insieme $]0, +\infty]$ è evidentemente un intorno di ℓ . Esiste quindi un intorno U di x tale che $f(U \cap E) \subseteq]0, +\infty]$, da cui la tesi. Il caso $\ell < 0$ è simile e può essere trattato per esercizio. ■

(4.13) Osservazione Nel teorema precedente è necessario che il limite ℓ sia diverso da zero. Se ad esempio $f(\xi) = \xi$ su $E =]-1, 1[$, si ha

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} f(\xi) = 0$$

e, per un qualunque intorno U di 0, si ha

$$\forall \xi \in U \cap]0, 1[: f(\xi) > 0, \quad \forall \xi \in U \cap]-1, 0[: f(\xi) < 0,$$

ossia il segno di f non permane in nessun intorno di 0.

(4.14) Teorema (del confronto o dei due carabinieri) Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $\varphi, f, \psi : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ tre funzioni, $x \in \overline{E}$ e $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Supponiamo che

$$\forall \xi \in E : \varphi(\xi) \leq f(\xi) \leq \psi(\xi) ,$$

$$\lim_{\xi \rightarrow x} \varphi(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow x} \psi(\xi) = \ell .$$

Allora si ha

$$\lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = \ell .$$

Dimostrazione. Per il Teorema (3.3), per ogni intorno W di ℓ esiste un intervallo $V \subseteq W$ tale che V sia un intorno di ℓ . Siano U' ed U'' due intorni di x tali che $\varphi(U' \cap E) \subseteq V$ e $\psi(U'' \cap E) \subseteq V$. Allora $U = U' \cap U''$ è un intorno di x per il Teorema (3.3). Inoltre per ogni $\xi \in U \cap E$ si ha $\varphi(\xi) \in V$ e $\psi(\xi) \in V$, quindi $f(\xi) \in V$, perché V è un intervallo. Ne segue $f(U \cap E) \subseteq V \subseteq W$. ■

(4.15) Teorema (di composizione) Siano $E, F \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, siano $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ e $g : F \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ due funzioni e siano $x \in \overline{f^{-1}(F)}$, $y \in \overline{F}$ e $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Supponiamo che

$$\lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = y , \quad \lim_{\eta \rightarrow y} g(\eta) = \ell .$$

Allora si ha

$$\lim_{\xi \rightarrow x} (g \circ f)(\xi) = \ell .$$

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

(4.16) Teorema Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f, g : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $x \in \overline{E}$ e $\ell', \ell'' \in \overline{\mathbb{R}}$. Supponiamo che

$$\lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = \ell' , \quad \lim_{\xi \rightarrow x} g(\xi) = \ell'' .$$

Valgono allora i seguenti fatti:

(a) se la somma $\ell' + \ell''$ è definita, si ha che x è aderente a $\text{dom}(f + g)$ e

$$\lim_{\xi \rightarrow x} (f + g)(\xi) = \ell' + \ell'' ;$$

(b) se il prodotto $\ell' \ell''$ è definito, si ha che x è aderente a $\text{dom}(fg)$ e

$$\lim_{\xi \rightarrow x} (fg)(\xi) = \ell' \ell''.$$

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

(4.17) Teorema Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $x \in \overline{E}$ e $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Supponiamo che

$$\lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = \ell.$$

Allora valgono i seguenti fatti:

(a) se $\ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, si ha che x è aderente a $\text{dom}(1/f)$ e

$$\lim_{\xi \rightarrow x} \frac{1}{f(\xi)} = \frac{1}{\ell};$$

(b) se $\ell = -\infty$ o $\ell = +\infty$, si ha che x è aderente a $\text{dom}(1/f)$ e

$$\lim_{\xi \rightarrow x} \frac{1}{f(\xi)} = 0;$$

(c) se $\ell = 0$ e se x è aderente a $\text{dom}(1/f)$, si ha

$$\lim_{\xi \rightarrow x} \left| \frac{1}{f(\xi)} \right| = +\infty.$$

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

4.2 Limiti su restrizioni

Vediamo ora come sia possibile definire il limite di una funzione quando questa viene ristretta ad un sottoinsieme dell'insieme su cui è definita.

(4.18) Definizione Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una funzione, $D \subseteq E$, $x \in \overline{D}$ e $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Diciamo che ℓ è limite di f in x sulla restrizione D e scriviamo

$$\lim_{\substack{\xi \rightarrow x \\ \xi \in D}} f(\xi) = \ell,$$

se

$$\lim_{\xi \rightarrow x} f|_D(\xi) = \ell,$$

ossia se per ogni intorno V di ℓ esiste un intorno U di x tale che $f(U \cap D) \subseteq V$.

In alcuni casi particolari si adottano delle notazioni più specifiche. Per esempio, se

$$D = E \setminus \{x\}$$

si usa la notazione

$$\lim_{\substack{\xi \rightarrow x \\ \xi \neq x}} f(\xi) = \ell.$$

Nel caso

$$D = E \cap [-\infty, x], \quad D = E \cap [x, +\infty],$$

si usano rispettivamente le notazioni

$$\lim_{\xi \rightarrow x^-} f(\xi) = \ell \quad (\text{limite da sinistra}), \quad \lim_{\xi \rightarrow x^+} f(\xi) = \ell \quad (\text{limite da destra}).$$

Come afferma il prossimo risultato, se esiste il limite di una funzione allora esiste anche il limite su una qualunque restrizione del dominio.

(4.19) Teorema Siano $D \subseteq E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $x \in \overline{D}$ e $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Supponiamo che

$$\lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = \ell.$$

Allora si ha

$$\lim_{\substack{\xi \rightarrow x \\ \xi \in D}} f(\xi) = \ell.$$

Dimostrazione. È sufficiente confrontare la Definizione (4.18) con la Definizione (4.2), tenendo presente che $f(U \cap D) \subseteq f(U \cap E)$. ■

Viceversa, il prossimo teorema afferma che se esistono e sono uguali i limiti della funzione lungo due restrizioni che ne partizionano il dominio, allora esiste il limite della funzione.

(4.20) Teorema Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $x \in \overline{E}$ e $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Siano D_1 e D_2 due sottoinsiemi di E tali che

$$E = D_1 \cup D_2$$

e tali che per ogni $j = 1, 2$ si abbia

$$\lim_{\substack{\xi \rightarrow x \\ \xi \in D_j}} f(\xi) = \ell ,$$

se x è aderente a D_j . Allora si ha

$$\lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = \ell .$$

Dimostrazione. Sia V un intorno di ℓ . Se x è aderente a D_1 , esiste un intorno U_1 di x tale che $f(U_1 \cap D_1) \subseteq V$. Se invece x non è aderente a D_1 , esiste un intorno U_1 di x tale che $U_1 \cap D_1 = \emptyset$, quindi a maggior ragione $f(U_1 \cap D_1) \subseteq V$. Analogamente si trova un intorno U_2 di x tale che $f(U_2 \cap D_2) \subseteq V$. Allora $U = U_1 \cap U_2$ è un intorno di x e si ha

$$\begin{aligned} f(U \cap E) &= f(U \cap (D_1 \cup D_2)) = f((U \cap D_1) \cup (U \cap D_2)) = \\ &= f(U \cap D_1) \cup f(U \cap D_2) \subseteq f(U_1 \cap D_1) \cup f(U_2 \cap D_2) \subseteq V , \end{aligned}$$

da cui la tesi. ■

Vediamo ora qualche esempio di limite di funzione su una restrizione.

(4.21) Esempio *Risulta*

$$\lim_{\xi \rightarrow 0^+} \frac{1}{\xi} = +\infty , \quad \lim_{\xi \rightarrow 0^-} \frac{1}{\xi} = -\infty .$$

La verifica può essere svolta per esercizio, imitando la dimostrazione del Teorema (4.9).

(4.22) Esempio *Se consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

allora, per ogni $a \in \mathbb{R}$, non esiste il limite di f per $\xi \rightarrow a$. Infatti, si verifica facilmente che

$$\lim_{\substack{\xi \rightarrow a \\ \xi \in \mathbb{Q}}} f(\xi) = 1 , \quad \lim_{\substack{\xi \rightarrow a \\ \xi \notin \mathbb{Q}}} f(\xi) = 0 ,$$

per cui la tesi segue dal teorema precedente.

4.3 Limiti e funzioni monotone

(4.23) Definizione Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ e $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una funzione. Diciamo che f è:

- crescente, se

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2) ;$$

- strettamente crescente, se

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2) ;$$

- decrescente, se

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2) ;$$

- strettamente decrescente, se

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2) .$$

- monotona, se f è crescente o decrescente;

- strettamente monotona, se f è strettamente crescente o strettamente decrescente.

(4.24) Teorema Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $E \neq \emptyset$, $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una funzione e

$$x_1 = \inf E, \quad x_2 = \sup E .$$

Allora, se f è crescente, si ha

$$x_1 \notin E \implies \lim_{\xi \rightarrow x_1} f(\xi) = \inf f(E) ,$$

$$x_2 \notin E \implies \lim_{\xi \rightarrow x_2} f(\xi) = \sup f(E) .$$

Se f è decrescente, si ha

$$x_1 \notin E \implies \lim_{\xi \rightarrow x_1} f(\xi) = \sup f(E) ,$$

$$x_2 \notin E \implies \lim_{\xi \rightarrow x_2} f(\xi) = \inf f(E) .$$

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

4.4 Massimo e minimo limite

(4.25) Definizione Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ e $x \in \overline{E}$. Diciamo che $M \in \overline{\mathbb{R}}$ è un maggiorante definitivo per f in x , se esiste un intorno U di x tale che M è un maggiorante per $f(U \cap E)$. Diciamo che $m \in \overline{\mathbb{R}}$ è un minorante definitivo per f in x , se esiste un intorno U di x tale che m è un minorante per $f(U \cap E)$.

Evidentemente risulta che $+\infty$ è sempre un maggiorante definitivo e che $-\infty$ è sempre un minorante definitivo.

(4.26) Definizione Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ e $x \in \overline{E}$. Poniamo

$$\limsup_{\xi \rightarrow x} f(\xi) := \inf \left\{ M \in \overline{\mathbb{R}} : M \text{ è un maggiorante definitivo per } f \text{ in } x \right\},$$

$$\liminf_{\xi \rightarrow x} f(\xi) := \sup \left\{ m \in \overline{\mathbb{R}} : m \text{ è un minorante definitivo per } f \text{ in } x \right\}.$$

La prima quantità si chiama massimo limite di f in x e si denota anche con i simboli

$$\max \lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi), \quad \overline{\lim}_{\xi \rightarrow x} f(\xi).$$

La seconda quantità si chiama minimo limite di f in x e si denota anche con i simboli

$$\min \lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi), \quad \underline{\lim}_{\xi \rightarrow x} f(\xi).$$

Il pregio delle nozioni di massimo e minimo limite è che tali numeri reali esistono sempre. Il seguente risultato stabilisce il collegamento tra le nozioni di massimo e minimo limite e la nozione di limite.

(4.27) Teorema Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ e $x \in \overline{E}$. Allora si ha

$$\liminf_{\xi \rightarrow x} f(\xi) \leq \limsup_{\xi \rightarrow x} f(\xi).$$

Inoltre l'uguaglianza sussiste se e solo se f ammette limite in x , nel qual caso

$$\liminf_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = \limsup_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi).$$

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

(4.28) Teorema Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f, g : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ e $x \in \overline{E}$. Supponiamo che $f(\xi) \leq g(\xi)$ per ogni $\xi \in E$. Allora si ha

$$\limsup_{\xi \rightarrow x} f(\xi) \leq \limsup_{\xi \rightarrow x} g(\xi),$$

$$\liminf_{\xi \rightarrow x} f(\xi) \leq \liminf_{\xi \rightarrow x} g(\xi) .$$

In particolare, se f e g ammettono limite in x , allora si ha

$$\lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) \leq \lim_{\xi \rightarrow x} g(\xi) .$$

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

(4.29) Osservazione Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ e $x \in \overline{E}$. Si verifica facilmente che

$$\limsup_{\xi \rightarrow x} (-f(\xi)) = -\liminf_{\xi \rightarrow x} f(\xi) ,$$

$$\liminf_{\xi \rightarrow x} (-f(\xi)) = -\limsup_{\xi \rightarrow x} f(\xi) .$$

Inoltre, se $f, g : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ e $x \in \overline{\text{dom}(f + g)}$, si verifica facilmente che

$$\limsup_{\xi \rightarrow x} (f(\xi) + g(\xi)) \leq \limsup_{\xi \rightarrow x} f(\xi) + \limsup_{\xi \rightarrow x} g(\xi) ,$$

$$\liminf_{\xi \rightarrow x} (f(\xi) + g(\xi)) \geq \liminf_{\xi \rightarrow x} f(\xi) + \liminf_{\xi \rightarrow x} g(\xi) ,$$

non appena le espressioni a secondo membro siano definite.

(4.30) Definizione Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $g : E \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ una funzione e $x \in \overline{E}$. Si denota col simbolo $o(g, x)$ (o piccolo di g in x) l'insieme delle funzioni $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$\lim_{\xi \rightarrow x} \frac{f(\xi)}{g(\xi)} = 0 .$$

Si denota col simbolo $O(g, x)$ (o grande di g in x) l'insieme delle funzioni $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$\limsup_{\xi \rightarrow x} \left| \frac{f(\xi)}{g(\xi)} \right| < +\infty .$$

Quando è chiaro dal contesto chi sia il punto x , si scrive semplicemente $o(g)$ e $O(g)$. Spesso si usa scrivere, impropriamente, $f = o(g)$ e $f = O(g)$ invece di $f \in o(g)$ e $f \in O(g)$.

5 Punti di discontinuità

Vediamo ora tre diverse situazioni di discontinuità per una funzione f in un punto: eliminabile, di prima e di seconda specie.

(5.1) Definizione Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una funzione e $x \in E$. Diciamo che x è una discontinuità eliminabile per f se esiste

$$\lim_{\substack{\xi \rightarrow x \\ \xi \neq x}} f(\xi) = \ell \neq f(x).$$

Esisterà in tal caso una estensione continua $g : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ di f , definita da

$$g(\xi) = \begin{cases} f(\xi) & \text{se } \xi \in E \setminus \{x\}, \\ \ell & \text{se } \xi = x, \end{cases}$$

e si dice che g è il prolungamento per continuità della funzione f .

Vediamo un esempio di funzione con un punto di discontinuità eliminabile.

(5.2) Esempio Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{se } x \neq 1 \\ 3 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Allora f non è continua in $x = 1$, non esistendo il limite di f per $\xi \rightarrow 1$. Inoltre, esiste il limite di f per $\xi \rightarrow 1$ con $\xi \neq 1$ e

$$\lim_{\substack{\xi \rightarrow 1 \\ \xi \neq 1}} f(\xi) = 2 \neq f(1),$$

per cui la funzione ha una discontinuità eliminabile in $x = 1$. Il prolungamento per continuità g della funzione è dato da

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{se } x \neq 1 \\ 2 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

(5.3) Definizione Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una funzione e $x \in E$. Diciamo che x è una discontinuità di prima specie per f se esistono i limiti sinistro e destro di f in x e

$$\lim_{\xi \rightarrow x^-} f(\xi) \neq \lim_{\xi \rightarrow x^+} f(\xi).$$

Diremo inoltre che

$$S = \left| \lim_{\xi \rightarrow x^+} f(\xi) - \lim_{\xi \rightarrow x^-} f(\xi) \right|$$

è il salto di f in x .

Vediamo ora un caso di funzione con un punto di discontinuità di prima specie.

(5.4) Esempio Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Allora f non è continua in $x = 0$. Infatti, si ha

$$\lim_{\xi \rightarrow 0^-} f(\xi) = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow 0^+} f(\xi) = 1,$$

per cui la funzione ha una discontinuità di prima specie di salto $S = 1$.

(5.5) Definizione Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una funzione e $x \in E$. Diciamo che x è una discontinuità di seconda specie per f se almeno uno dei due limiti

$$\lim_{\xi \rightarrow x^-} f(\xi), \quad \lim_{\xi \rightarrow x^+} f(\xi)$$

non esiste oppure è infinito.

Vediamo ora due esempi di funzioni con punti di discontinuità di seconda specie.

(5.6) Esempio Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Allora si ha

$$\lim_{\xi \rightarrow 0^-} f(\xi) = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow 0^+} f(\xi) = +\infty,$$

per cui 0 è una discontinuità di seconda specie per f .

(5.7) Esempio Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Allora, in ogni $a \in \mathbb{R}$, la funzione ammette una discontinuità di seconda specie non esistendo né il limite a destra né il limite a sinistra.

6 Successioni

(6.1) Definizione Si chiama *successione* in $\overline{\mathbb{R}}$ ogni applicazione $x : \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Si usa denotare con x_n il valore di x in n e si usa denotare col simbolo (x_n) o col simbolo $\{x_n\}$ la successione x .

(6.2) Osservazione Sia (x_n) una successione in $\overline{\mathbb{R}}$ e sia $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Poiché $\sup \mathbb{N} = +\infty$, si ha che $+\infty$ è aderente a $\mathbb{N}$. È quindi chiaro il significato delle scritture

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \ell, \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n = \ell, \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n = \ell.$$

Poiché per le successioni è interessante solo il limite a $+\infty$, si usano spesso le notazioni abbreviate

$$\lim_n x_n = \ell, \quad \limsup_n x_n = \ell, \quad \liminf_n x_n = \ell.$$

Diremo che *successione numerica* è convergente, positivamente divergente, negativamente divergente, se tale è il suo andamento a $+\infty$.

(6.3) Proposizione Sia (x_n) una successione in $\overline{\mathbb{R}}$ e sia $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora si ha

$$\lim_n x_n = \ell$$

se e solo se per ogni intorno V di ℓ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq \bar{n} \implies x_n \in V.$$

Dimostrazione. Supponiamo che ℓ sia limite di (x_n) . Per ogni intorno V di ℓ esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall n \in \mathbb{N} : n > M \implies x_n \in V.$$

È allora sufficiente scegliere $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\bar{n} > M$. Il viceversa è ovvio. ■

(6.4) Proposizione Sia (x_n) una successione in $\overline{\mathbb{R}}$. Allora l'affermazione

$$\lim_n x_n = \ell$$

può essere così caratterizzata:

(a) caso $\ell \in \mathbb{R}$: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq \bar{n} \implies |x_n - \ell| < \varepsilon;$$

(b) caso $\ell = -\infty$: per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq \bar{n} \implies x_n < M ;$$

(c) caso $\ell = +\infty$: per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq \bar{n} \implies x_n > M .$$

Dimostrazione. La verifica può essere svolta per esercizio. ■

(6.5) Esempio Sia $a \in]1, +\infty[$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta

$$a^n = ((a-1) + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a-1)^k \geq n(a-1) ,$$

per cui

$$\lim_n a^n = +\infty .$$

Se $-1 < a < 1$ ed $a \neq 0$, ne segue

$$\lim_n \frac{1}{|a^n|} = \lim_n \left| \frac{1}{a} \right|^n = +\infty ,$$

perché $|1/a| > 1$. Risulta quindi

$$\lim_n a^n = 0 .$$

Naturalmente quest'ultima relazione di limite è valida anche per $a = 0$, per cui si ha

$$-1 < a < 1 \implies \lim_n a^n = 0 .$$

Siano ora

$$D_1 = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ è dispari}\} , \quad D_2 = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ è pari}\} .$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, risulta

$$n \text{ dispari} \implies a^n = -|a|^n , \quad n \text{ pari} \implies a^n = |a|^n .$$

Per $a = -1$ ne segue

$$\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n \in D_1}} a^n = -1 , \quad \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n \in D_2}} a^n = 1 .$$

Per $a < -1$ risulta invece

$$\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n \in D_1}} a^n = -\infty , \quad \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n \in D_2}} a^n = +\infty .$$

In entrambi i casi si deduce che a^n non ammette limite per $n \rightarrow +\infty$

6.1 Limiti e successioni

Molte nozioni introdotte nelle precedenti sezioni possono essere caratterizzate per mezzo delle successioni.

(6.6) Teorema Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ e $x \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora sono fatti equivalenti:

- (a) x è aderente ad E ;
- (b) esiste una successione (ξ_n) a valori in E tale che

$$\lim_n \xi_n = x.$$

Dimostrazione.

(a) $\implies$ (b) Consideriamo il caso $x \in \mathbb{R}$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste

$$\xi_n \in \left] x - \frac{1}{n+1}, x + \frac{1}{n+1} \right[\cap E.$$

Risulta così definita una successione (ξ_n) a valori in E . Poiché

$$x - \frac{1}{n+1} \leq \xi_n \leq x + \frac{1}{n+1},$$

si deduce dal Teorema del confronto che

$$\lim_n \xi_n = x.$$

Consideriamo ora il caso $x = +\infty$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $\xi_n \in]n, +\infty] \cap E$. Risulta così definita una successione (ξ_n) a valori in E . Poiché $n \leq \xi_n$, si deduce dal Teorema del confronto che

$$\lim_n \xi_n = +\infty = x.$$

Il caso $x = -\infty$ può essere dimostrato per esercizio in modo simile al caso precedente.

(b) $\implies$ (a) Sia U un intorno di x e sia (ξ_n) una successione in E tendente a x . Sia poi $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\xi_n \in U$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq \bar{n}$. Per tali n risulta $\xi_n \in U \cap E$, per cui $U \cap E \neq \emptyset$. ■

(6.7) Teorema Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $x \in \overline{E}$ e $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora sono fatti equivalenti:

- (a) $\lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = \ell$;

(b) per ogni successione (ξ_n) a valori in E con

$$\lim_n \xi_n = x,$$

si ha

$$\lim_n f(\xi_n) = \ell.$$

Dimostrazione.

(a) $\implies$ (b) Si tratta di una conseguenza del Teorema di composizione.

(b) $\implies$ (a) Supponiamo per assurdo che la (a) sia falsa. In altre parole supponiamo che esista un intorno V di ℓ tale che non si abbia $f(U \cap E) \subseteq V$ per nessun intorno U di x . Questo significa che non si ha $U \cap E \subseteq f^{-1}(V)$, ossia che risulta $U \cap (E \setminus f^{-1}(V)) \neq \emptyset$ per ogni intorno U di x . Pertanto x è aderente ad $E \setminus f^{-1}(V)$. Per il teorema precedente esiste una successione (ξ_n) in $E \setminus f^{-1}(V)$ tendente a x . Poiché $f(\xi_n) \notin V$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, non si può avere $f(\xi_n) \rightarrow \ell$, e questo è in contraddizione con la (b). ■

(6.8) Osservazione Siano $E \subseteq F \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ e $f, g : F \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ due funzioni continue. Si supponga che E sia denso in F e che $f(x) = g(x)$ per ogni x in E . Allora, si verifica facilmente che $f(x) = g(x)$ per ogni x in F .

6.2 Sottosuccessioni

(6.9) Definizione Siano (x_n) e (y_n) due successioni in $\overline{\mathbb{R}}$. Diciamo che (y_n) è una sottosuccessione di (x_n) , se esiste una funzione strettamente crescente $v : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tale che $y_n = x_{v(n)}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(6.10) Proposizione Sia (x_n) una successione in $\overline{\mathbb{R}}$, sia $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ e sia (y_n) una sottosuccessione di (x_n) . Supponiamo che

$$\lim_n x_n = \ell.$$

Allora

$$\lim_n y_n = \ell.$$

Dimostrazione. Sia $v : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una funzione strettamente crescente tale che $y_n = x_{v(n)}$. Si verifica facilmente per induzione su n che $v(n) \geq n$, per cui

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v(n) = +\infty.$$

La tesi discende allora dal Teorema di composizione dei limiti. ■

La dimostrazione del seguente risultato, che ometteremo, non è affatto banale.

(6.11) Teorema Sia (x_n) una successione in $\overline{\mathbb{R}}$. Allora esistono due sottosuccessioni $(x_{\nu(n)})$ e $(x_{\lambda(n)})$ di (x_n) tali che

$$\lim_n x_{\nu(n)} = \limsup_n x_n ,$$

$$\lim_n x_{\lambda(n)} = \liminf_n x_n .$$

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

Il teorema precedente ha alcune conseguenze di fondamentale importanza.

(6.12) Corollario Supponiamo che (x_n) sia successione in $\overline{\mathbb{R}}$. Allora esistono $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ ed una sottosuccessione $(x_{\nu(n)})$ tali che

$$\lim_n x_{\nu(n)} = \ell .$$

Dimostrazione. Si tratta di un'ovvia conseguenza del teorema precedente. ■

Il seguente risultato è di notevole importanza in analisi matematica.

(6.13) Corollario (Teorema di Bolzano-Weierstrass) Ogni successione limitata in $\mathbb{R}$ ammette una sottosuccessione convergente.

Dimostrazione. Sia anzitutto (x_n) una successione limitata in $\mathbb{R}$. Per il Corollario (6.12) esiste $(x_{\nu(n)})$ con $\lim_n x_{\nu(n)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Poiché

$$-\infty < \inf \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \leq x_{\nu(n)} \leq \sup \{x_n : n \in \mathbb{N}\} < +\infty ,$$

risulta $-\infty < \ell < +\infty$. ■

(6.14) Definizione Sia (x_n) una successione in $\mathbb{R}$. Diciamo che (x_n) è di Cauchy, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall m, n \in \mathbb{N} : m, n \geq \bar{n} \implies |x_m - x_n| < \varepsilon .$$

(6.15) Teorema (Criterio di convergenza di Cauchy) Una successione (x_n) in $\mathbb{R}$ è convergente se e solo se è di Cauchy.

Dimostrazione. Supponiamo che (x_n) sia convergente a $\ell \in \mathbb{R}$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq \bar{n} \implies |x_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Allora per ogni $m, n \geq \bar{n}$ risulta

$$|x_m - x_n| \leq |x_m - \ell| + |\ell - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Supponiamo ora che (x_n) sia di Cauchy. Sia $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall m, n \in \mathbb{N} : m, n \geq \tilde{n} \implies |x_m - x_n| < 1.$$

Ne segue

$$\forall n \geq \tilde{n} : |x_n| \leq |x_n - x_{\tilde{n}}| + |x_{\tilde{n}}| < 1 + |x_{\tilde{n}}|,$$

per cui la successione (x_n) è limitata. Per il Teorema di Bolzano-Weierstrass esiste una sottosuccessione $(x_{v(n)})$ convergente a $\ell \in \mathbb{R}$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall m, n \in \mathbb{N} : m, n \geq \bar{n} \implies |x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sia $k \in \mathbb{N}$ tale che $v(k) \geq \bar{n}$ e $|x_{v(k)} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$. Allora per ogni $n \geq \bar{n}$ risulta

$$|x_n - \ell| \leq |x_n - x_{v(k)}| + |x_{v(k)} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Pertanto (x_n) è convergente a ℓ . ■

(6.16) Corollario (Criterio di Cauchy per le serie) Sia (x_n) una successione in $\mathbb{C}$. Allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ è convergente se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall n \geq \bar{n}, \forall k \in \mathbb{N} : \left| \sum_{h=n}^{n+k} x_h \right| < \varepsilon.$$

Dimostrazione. Poniamo

$$s_n = \sum_{h=0}^n x_h.$$

Se la serie è convergente, la successione (s_n) è di Cauchy per il criterio di Cauchy per le successioni. Pertanto per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|s_m - s_n| < \varepsilon$ per ogni $m, n \geq \tilde{n}$. Posto $\bar{n} = \tilde{n} + 1$, per ogni $n \geq \bar{n}$ e $k \in \mathbb{N}$ risulta

$$\left| \sum_{h=n}^{n+k} x_h \right| = |s_{n+k} - s_{n-1}| < \varepsilon.$$

Il viceversa può essere provato in modo simile per esercizio. ■

7 Alcune funzioni elementari

Nel corso di questa sezione introdurremo tre importanti funzioni elementari, la funzione esponenziale $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e le funzioni trigonometriche $\sin, \cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

7.1 La funzione esponenziale

Allo scopo di introdurre la funzione esponenziale, vediamo anzitutto una importante disuguaglianza elementare tra numeri reali, detta anche aritmetico-geometrica.

(7.1) Lemma Per ogni $n \geq 2$ e per ogni $x_1, \dots, x_n$ strettamente positivi

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

dove l'uguaglianza vale se e solo se tutti i numeri x_j sono uguali tra di loro.

Dimostrazione. Se $n = 2$ la dimostrazione è immediata, infatti

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}$$

equivale alla disequazione $(x_1 - x_2)^2 \geq 0$, chiaramente vera per ogni coppia di numeri reali x_1, x_2 . Inoltre il segno di uguaglianza vale solo se $x_1 = x_2$. La tesi è vera anche per $n = 4$, infatti, poichè per $n = 2$ la proprietà è già stata dimostrata, se $x_1, \dots, x_4$ sono quattro numeri reali positivi, si ha

$$x_1 x_2 \leq \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right)^2, \quad x_3 x_4 \leq \left(\frac{x_3 + x_4}{2} \right)^2,$$

da cui segue

$$x_1 x_2 x_3 x_4 \leq \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \cdot \frac{x_3 + x_4}{2} \right)^2.$$

D'altra parte, sempre la disuguaglianza per $n = 2$ applicata ai numeri reali

$$\frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \frac{x_3 + x_4}{2}$$

fornisce

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \cdot \frac{x_3 + x_4}{2} \leq \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \right)^2,$$

dove il segno di uguaglianza vale soltanto se $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$. Si conclude che

$$\sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 x_4} \leq \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4},$$

dove l'uguale vale se e solo se $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$. Reiterando il procedimento indicato sopra si può quindi dimostrare la disuguaglianza per ogni $n = 2, 4, 8, 16, \dots$, ossia per $n = 2^m$, con $m \in \mathbb{N}, m \geq 1$. Rimane quindi da provare l'asserto per i rimanenti numeri naturali. Procederemo dimostrando che se l'affermazione vale per un certo intero n , allora deve valere anche per l'intero precedente (si noti che *non* si deve confondere un tale procedimento *all'indietro* con il metodo di dimostrazione per induzione, *in avanti*). Supponiamo allora che la formula valga per $x_1, \dots, x_n$ e cerchiamo di dimostrare che

$$(7.2) \quad \sqrt[n-1]{x_1 \cdots x_{n-1}} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}.$$

Ponendo

$$\sigma := \frac{x_1 + \cdots + x_{n-1}}{n-1},$$

risulta allora per ipotesi

$$x_1 \cdots x_{n-1} \sigma \leq \left(\frac{x_1 + \cdots + x_{n-1} + \sigma}{n} \right)^n.$$

D'altra parte, essendo $x_1 + \cdots + x_{n-1} = (n-1)\sigma$, la quantità dentro parentesi vale σ e si ottiene quindi immediatamente la disuguaglianza (7.2). ■

(7.3) Lemma Per ogni $x \in \mathbb{R}$ la successione $(1 + \frac{x}{n})^n$ è convergente.

Dimostrazione. Fissato $x \neq 0$, basta osservare che per ogni $n > -x$ si ha

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Infatti, scegliendo nel Lemma (7.1)

$$x_1 = \cdots = x_n = 1 + \frac{x}{n}, \quad x_{n+1} = 1$$

essendo gli x_j positivi e non tutti uguali tra di loro,

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < \left(\frac{n+x+1}{n+1}\right)^{n+1},$$

da cui la tesi. Quindi, essendo la successione $(1 + \frac{x}{n})^n$ strettamente crescente, deve esistere il suo limite per $n \rightarrow +\infty$. Una volta provata la monotonia verifichiamo anche che la successione è limitata. Evidentemente, è sufficiente verificare la limitatezza della successione $\eta_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. Osserviamo che, si ha

$$\xi_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) > \eta_n.$$

D'altra parte ξ_n è strettamente decrescente, ossia

$$\xi_{n-1} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n > \xi_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

ossia

$$\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1 + \frac{1}{n}$$

che è proprio la disuguaglianza di Bernoulli. Ne segue allora che

$$\eta_1 \leq \eta_n < \xi_n < \xi_1$$

da cui si ricava subito la limitatezza di η_n . ■

Il lemma precedente consente ora di dare la seguente definizione.

(7.4) Definizione Definiamo la funzione esponenziale

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

ponendo, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$\exp(x) := \lim_n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Vediamo ora le proprietà fondamentali della funzione esponenziale.

(7.5) Teorema Valgono i seguenti fatti

- (a) $\exp$ è strettamente positiva;
- (b) si ha $\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$;
- (c) si ha $\exp(0) = 1$, $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$;
- (d) si ha $\exp(x) \geq 1 + x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
- (e) si ha $\exp(x) \leq \frac{1}{1-x}$ per ogni $x < 1$;
- (f) si ha $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$;
- (g) $\exp$ è strettamente crescente;
- (h) $\exp$ è continua.

Dimostrazione. Dato $x \in \mathbb{R}$, per ogni $n > -x$ si ha

$$\exp(x) \geq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n > 0,$$

da cui la (a). Risulta poi immediato constatare dalla definizione che risulta $\exp(0) = 1$. Allora $1 = \exp(0) = \exp(x - x) = \exp(x) \exp(-x)$, per cui la (c) è provata. Osserviamo ora che, essendo la successione $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ strettamente crescente, per la disuguaglianza di Bernoulli si ha

$$\exp(x) > \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + x$$

per ogni $x > -1$; per $x < -1$, si ha $1 + x < 0 < \exp(x)$. Osserviamo che scambiando x in $-x$ si ha

$$\frac{1}{\exp(x)} = \exp(-x) > 1 - x,$$

per cui anche le affermazioni (d)-(e) sono dimostrate. L'affermazione (f) segue subito dalle disuguaglianze (d)-(e), usando il teorema del confronto. Per la (g), osserviamo che, essendo $\exp(x) > 1$ per ogni $x > 0$, se $x_1 < x_2$, si ha $\exp(x_2 - x_1) > 1$, ossia $\exp(x_2) > \exp(x_1)$. Veniamo ora all'affermazione (b). Proviamo anzitutto che se $(\sigma_n) \subset \mathbb{R}$ con $\sigma_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$, allora

$$\lim_n \left(1 + \frac{\sigma_n}{n}\right)^n = 1.$$

Possiamo naturalmente supporre che $|\sigma_n| < 1$, almeno per n abbastanza grande. Pertanto, per le disuguaglianze (d)-(e), si ha

$$1 + \sigma_n \leq \left(1 + \frac{\sigma_n}{n}\right)^n \leq \frac{1}{1 - \sigma_n}$$

per n sufficientemente grande, per cui la proprietà desiderata segue dal teorema del confronto (dei due carabinieri) per le successioni. Evidentemente l'asserto equivale a provare che

$$\lim_n \xi_n = 1, \quad \xi_n := \left(\frac{1 + \frac{x+y}{n}}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)\left(1 + \frac{y}{n}\right)} \right)^n.$$

In effetti, se poniamo

$$\sigma_n := -\frac{\frac{xy}{n}}{\left(1 + \frac{x+y}{n} + \frac{xy}{n^2}\right)},$$

risulta $\sigma_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$ e

$$\xi_n = \left(1 + \frac{\sigma_n}{n}\right)^n,$$

per cui $\xi_n \rightarrow 1$ per $n \rightarrow \infty$, da cui segue la (b). Veniamo infine all'affermazione (h), ossia la continuità di $\exp$ in un punto x . Per la proprietà (b) ciò equivale a dimostrare la continuità in 0, che segue nuovamente dalle (d)-(e) e dal teorema del confronto. ■

7.2 Le funzioni trigonometriche

Per la definizione delle funzioni trigonometriche fondamentali, quali seno e coseno, procediamo nel seguente modo. Consideriamo l'insieme

$$\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

che, geometricamente, corrisponde al *cerchio unitario* in $\mathbb{R}^2$. Immaginiamo anche di fissare un verso di percorrenza che, convenzionalmente, sarà quello che va dal punto di coordinate cartesiane $(1, 0)$ al punto $(0, 1)$, sull'asse delle ordinate (verso antiorario). Consideriamo ora l'applicazione continua

$$\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}$$

tale che $\sigma(0) = (1, 0)$ e, per un $x \neq 0$, $\sigma(x)$ è il punto di $\mathbb{S}$ che corrisponde al un arco di lunghezza $|x|$ sul cerchio unitario, nel verso convenzionale per x positivo o nel verso opposto per x negativo. L'intera lunghezza del cerchio corrisponde al valore 2π e, infine, σ verifica $\sigma(x) = \sigma(x + 2\pi)$, per ogni x . Evidentemente, dato un qualunque $x \in \mathbb{R}$, si potrà scrivere

$$\sigma(x) = (\sigma_1(x), \sigma_2(x)), \quad \sigma_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \sigma_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

dove le componenti $\sigma_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\sigma_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di σ sono funzioni continue.

(7.6) Definizione Definiamo le funzioni seno e coseno

$$\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

ponendo, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin(x) := \sigma_2(x), \quad \cos(x) := \sigma_1(x).$$

In altre parole, dato $x \in \mathbb{R}$, il seno di x (rispettivamente il coseno di x) corrisponde alla proiezione del punto $\sigma(x)$ di $\mathbb{S}$ sull'asse delle ordinate (rispettivamente delle ascisse). Naturalmente, visto che per costruzione il cerchio è di raggio unitario, per il teorema di Pitagora deve valere $\sigma_1^2(x) + \sigma_2^2(x) = 1$, ossia la relazione fondamentale che lega seno e coseno

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1,$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. Naturalmente, per costruzione, le funzioni $\sin$ e $\cos$ sono periodiche di periodo 2π , ossia

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x), \quad \cos(x + 2\pi) = \cos(x)$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(7.7) Definizione Definiamo la funzione tangente

$$\tan : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R},$$

ponendo, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

7.3 Forma trigonometrica dei complessi

Viste le funzioni elementari introdotte nelle sezioni precedenti, possiamo ora introdurre la forma trigonometrica dei numeri complessi.

(7.8) Teorema Per ogni $z \in \mathbb{C}$ esistono $\rho \in [0, +\infty[$ e $\vartheta \in \mathbb{R}$ tali che

$$z = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta).$$

Inoltre, se $z' = \rho'(\cos \vartheta' + i \sin \vartheta')$ e $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$zz' = (\rho\rho')(\cos(\vartheta + \vartheta') + i \sin(\vartheta + \vartheta')) ,$$

$$\bar{z} = \rho(\cos(-\vartheta) + i \sin(-\vartheta)) ,$$

$$z \neq 0 \implies z^{-1} = \rho^{-1}(\cos(-\vartheta) + i \sin(-\vartheta)) ,$$

$$z^n = \rho^n(\cos(n\vartheta) + i \sin(n\vartheta)) .$$

Dimostrazione. Proviamo anzitutto che, per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = 1$, esiste uno ed un solo $\vartheta \in [0, 2\pi[$ tale che $z = \cos \vartheta + i \sin \vartheta$. Se $z = 1$ o $z = -1$, basta scegliere rispettivamente $\vartheta = 0$ o $\vartheta = \pi$. Se $\text{Im } z > 0$, risulta $-1 < \text{Re } z < 1$. Allora, esiste uno ed un solo $\vartheta \in]0, \pi[$ tale che $\cos \vartheta = \text{Re } z$. Tenuto conto che $\text{Im } z > 0$ e $\sin^2 \vartheta = (\text{Im } z)^2$, ne segue $\sin \vartheta = \text{Im } z$. Se $\text{Im } z < 0$, si dimostra in modo simile che esiste uno ed un solo $\vartheta \in]\pi, 2\pi[$ tale che $\text{Re } z = \cos \vartheta$ e $\text{Im } z = \sin \vartheta$. Veniamo ora al caso generale. Se $z = 0$, basta porre $\rho = 0$ e scegliere un qualunque $\vartheta \in \mathbb{R}$. Se $z \neq 0$, esiste per il caso precedente $\vartheta \in [0, 2\pi[$ tale che $\frac{z}{|z|} = (\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$. Posto $\rho = |z|$, risulta $z = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$. Le altre formule si possono dimostrare per esercizio. ■

(7.9) Osservazione Geometricamente, la forma trigonometrica e, come vedremo, la forma esponenziale corrispondono all'uso di un sistema di coordinate polari nel piano anzichè di un sistema di coordinate cartesiane.

Vediamo ora la formula che fornisce le radici n -esime di un numero complesso.

(7.10) Teorema Sia $w \in \mathbb{C}$ con $w \neq 0$ e sia $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$. Allora l'equazione $z^n = w$ ammette esattamente n soluzioni $z \in \mathbb{C}$ date dalla formula

$$z_j = \sqrt[n]{r} (\cos \vartheta_j + i \sin \vartheta_j), \quad \vartheta_j = \frac{\varphi}{n} + \frac{2j\pi}{n}$$

con $0 \leq j \leq n-1$.

Dimostrazione. Supponiamo di avere $w = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ con $r \in]0, +\infty[$ e $\varphi \in \mathbb{R}$. Posto $z = \rho (\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$, l'equazione $z^n = w$ equivale al sistema

$$\begin{cases} \rho^n = r, \\ \cos(n\vartheta) = \cos \varphi, \\ \sin(n\vartheta) = \sin \varphi. \end{cases}$$

Deve quindi essere $\rho = \sqrt[n]{r}$ e $n\vartheta = \varphi + 2j\pi$ con $j \in \mathbb{Z}$. Si ottengono tutte e sole le soluzioni z scegliendo $\rho = \sqrt[n]{r}$ e

$$\vartheta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2j\pi}{n}$$

con $0 \leq j \leq n-1$. ■

(7.11) Osservazione Esiste in realtà una terza rappresentazione dei numeri complessi, detta *rappresentazione in forma esponenziale*. Se $z \in \mathbb{C}$ ha la forma trigonometrica

$$z = r (\cos \vartheta + i \sin \vartheta),$$

allora è possibile scrivere z come $z = r e^{i\vartheta}$. Questa identificazione è possibile per la formula di Eulero, che qui richiamiamo senza dimostrazione

$$e^{i\vartheta} = \cos \vartheta + i \sin \vartheta.$$

Nella forma complessa potenza n -esima e radici n -esime di z sono dati rispettivamente dalle formule $z^n = r^n e^{in\vartheta}$ e

$$z_j = \sqrt[n]{r} e^{i\vartheta_j}, \quad \vartheta_j = \frac{\vartheta + 2j\pi}{n},$$

per ogni $0 \leq j \leq n-1$.

8 Proprietà delle funzioni continue

Vediamo ora un utile strumento per stabilire l'esistenza di una zero per una funzione continua su un intervallo.

(8.1) Teorema (di esistenza degli zeri) *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \leq b$ e sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Supponiamo che si abbia $f(a) < 0 < f(b)$ oppure $f(a) > 0 > f(b)$. Allora esiste $\xi \in]a, b[$ tale che $f(\xi) = 0$.*

Dimostrazione. Sia, ad esempio, $f(a) < 0 < f(b)$. Poniamo

$$E = \{x \in [a, b] : f(x) \leq 0\}, \quad \xi = \sup E.$$

Poiché $a \in E$ e b è un maggiorante per E , risulta $a \leq \xi \leq b$. Sia (x_n) una successione in E tendente a ξ . Per la continuità di f , da $f(x_n) \leq 0$ segue $f(\xi) \leq 0$. In particolare $\xi < b$. Poiché

$$\xi = \inf]\xi, b],$$

esiste una successione (y_n) in $]\xi, b]$ tendente a ξ . Da $y_n > \xi$ segue $y_n \notin E$, ossia $f(y_n) > 0$. Sempre per la continuità di f si deduce $f(\xi) \geq 0$, quindi $\xi > a$ e $f(\xi) = 0$. Il caso $f(a) > 0 > f(b)$ può essere trattato in maniera simile. ■

(8.2) Osservazione *Risulta necessaria l'ipotesi di continuità di f , come si vede da questo semplice esempio: consideriamo $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da*

$$f(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{se } \xi \geq 0 \\ -1 & \text{se } \xi < 0. \end{cases}$$

Allora si ha $f(-1) = -1 < 0$, $f(1) = 1 > 0$, ma $f(\xi) \neq 0$ per ogni $\xi \in [-1, 1]$.

(8.3) Osservazione *Il teorema di esistenza degli zeri fornisce solo una condizione sufficiente per l'esistenza di uno zero, come si vede da questo semplice esempio: consideriamo $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(\xi) = \xi^2$. Allora $f(0) = 0$, ma $f(-1) = f(1) > 0$.*

(8.4) Osservazione *Il teorema di esistenza degli zeri non garantisce l'unicità dello zero di f , come si vede da questo semplice esempio: consideriamo $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da*

$$f(\xi) = \xi^3 - \xi$$

Allora f è continua, si ha $f(-2) < 0$, $f(2) > 0$, ma $f(-1) = f(1) = 0$. Nelle ipotesi del teorema precedente, lo zero è unico sotto l'ipotesi aggiuntiva che la funzione sia strettamente

monotona nell'intervallo $[a, b]$. Supponiamo ad esempio che la funzione f sia strettamente crescente. Siano, per assurdo, $\xi_1, \xi_2 \in [a, b]$ tali che $\xi_1 < \xi_2$ e $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$. Ma allora $f(\xi_1) < f(\xi_2)$ per la stretta monotonia crescente: una contraddizione.

(8.5) Osservazione Il teorema di esistenza degli zeri è utile anche per determinare l'esistenza di zeri per funzioni definite su tutto $\mathbb{R}$; ad esempio se $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione polinomiale del tipo

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

con $a_n \neq 0$ e n dispari, allora esiste $\xi \in \mathbb{R}$ tale che $P(\xi) = 0$. Infatti

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \mp \infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \pm \infty,$$

per cui le ipotesi del teorema degli zeri sono soddisfatte su un opportuno intervallo $[-r, r]$, $r > 0$.

il teorema precedente ha anche una importante conseguenza.

(8.6) Corollario (teorema dei valori intermedi) Siano $E \subseteq \mathbb{R}$ e $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora per ogni intervallo $I \subseteq E$ l'immagine $f(I)$ è un intervallo.

Dimostrazione. Sia I un intervallo in E . Se $I = \emptyset$, la tesi è vera. Altrimenti poniamo

$$\alpha = \inf f(I), \quad \beta = \sup f(I).$$

Se $\alpha < y < \beta$, esistono $a, b \in I$ tali che $f(a) < y < f(b)$. Sia, ad esempio, $a < b$. Poiché I è un intervallo, risulta $[a, b] \subseteq I$. Si può quindi considerare la funzione continua $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(x) = f(x) - y$. Per il Teorema di esistenza degli zeri esiste $\xi \in]a, b[\subseteq I$ tale che $g(\xi) = 0$, ossia $f(\xi) = y$. Pertanto $y \in f(I)$. Alla stessa conclusione si perviene se $b < a$. Allora si ha $]\alpha, \beta[\subseteq f(I) \subseteq [\alpha, \beta]$, per cui $f(I)$ è necessariamente uno dei quattro intervalli di estremi α e β . ■

(8.7) Osservazione Per il teorema precedente risulta necessaria l'ipotesi di continuità di f . Considerando nuovamente la funzione $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dell'osservazione (8.2), sia ha

$$f([-1, 1]) = \{-1, 1\},$$

che non è un intervallo.

(8.8) Teorema (della funzione inversa) Siano I un intervallo in $\mathbb{R}$ e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione strettamente crescente (risp. decrescente). Allora f è iniettiva e $f^{-1} : f(I) \rightarrow \mathbb{R}$ è continua e strettamente crescente (risp. decrescente).

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

(8.9) Definizione Siano E un insieme, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione e $x \in E$. Diciamo che x è

– un punto di massimo (assoluto) per f , se

$$\forall \xi \in E : f(\xi) \leq f(x);$$

– un punto di minimo (assoluto) per f , se

$$\forall \xi \in E : f(\xi) \geq f(x).$$

(8.10) Teorema (di Weierstrass) Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \leq b$ e sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f ammette un punto di massimo ed un punto di minimo.

Dimostrazione. Poiché $\sup f$ è aderente a $f([a, b])$, esiste una successione (y_n) in $f([a, b])$ tendente a $\sup f$. Sarà $y_n = f(x_n)$ con $x_n \in [a, b]$. Per il Teorema di Bolzano-Weierstrass, esiste una sottosuccessione $(x_{v(n)})$ tendente a $\bar{x} \in \mathbb{R}$. Dal momento che $(f(x_{v(n)}))$ è una sottosuccessione di (y_n) , si ha

$$\lim_n f(x_{v(n)}) = \sup_{[a,b]} f.$$

Poiché $a \leq x_{v(n)} \leq b$, risulta $a \leq \bar{x} \leq b$. Per la continuità di f ne segue

$$f(\bar{x}) = \lim_n f(x_{v(n)}) = \sup_{[a,b]} f,$$

ossia $\bar{x}$ è un punto di massimo per f . Similmente si trova il punto di minimo. ■

(8.11) Osservazione Per il teorema di Weierstrass risulta necessaria l'ipotesi che la funzione sia continua. Consideriamo ad esempio la funzione $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(\xi) = \begin{cases} \xi & \text{se } \xi > 0 \\ 1 & \text{se } \xi = 0 \\ -\xi & \text{se } \xi < 0. \end{cases}$$

Allora f , discontinua in zero, non ammette minimo.

(8.12) Osservazione Per il teorema di Weierstrass risulta necessaria l'ipotesi che l'intervallo sia chiuso e limitato come si vede da questi semplici esempi: consideriamo $f :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(\xi) = \xi$. Allora f non ammette minimo (analogamente $f : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(\xi) = \xi$ non ammette massimo). Inoltre, se $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ è definita da $f(\xi) = \frac{1}{\xi}$ allora f non ammette minimo. Siano $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ e sia $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Si dimostra facilmente che:

(a) se

$$\limsup_{x \rightarrow a} f(x) < \sup_{]a, b[} f, \quad \limsup_{x \rightarrow b} f(x) < \sup_{]a, b[} f,$$

allora f ammette un punto di massimo;

(b) se

$$\liminf_{x \rightarrow a} f(x) > \inf_{]a, b[} f, \quad \liminf_{x \rightarrow b} f(x) > \inf_{]a, b[} f,$$

allora f ammette un punto di minimo.

8.1 Funzioni uniformemente continue

(8.13) Definizione Siano $E \subseteq \mathbb{R}$ e $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Diciamo che f è uniformemente continua, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\forall x_1, x_2 \in E : |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

In altre parole una funzione si dice uniformemente continua quando i valori di δ dipendono *esclusivamente* dai valori di ε e *non* dal punto fissato. Vediamo ora una utile condizione sufficiente per garantire l'uniforme continuità.

(8.14) Teorema (di Heine) Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \leq b$ e sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f è uniformemente continua.

Dimostrazione. Ragioniamo per assurdo, supponendo che esista $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $\delta > 0$ si abbia

$$\exists x, y \in [a, b] : |x - y| < \delta \text{ e } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon.$$

In particolare, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esistono $x_n, y_n \in [a, b]$ tali che

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n+1} \text{ e } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Per il Teorema di Bolzano-Weierstrass esiste una sottosuccessione $(x_{v(n)})$ convergente a $\xi \in \mathbb{R}$. Poiché

$$x_{v(n)} - \frac{1}{v(n) + 1} \leq y_{v(n)} \leq x_{v(n)} + \frac{1}{v(n) + 1},$$

dal Teorema del confronto si deduce che anche $(y_{v(n)})$ è convergente a ξ . Inoltre da $a \leq x_{v(n)} \leq b$ segue $a \leq \xi \leq b$. Per la continuità di f e del valore assoluto si ottiene

$$0 = |f(\xi) - f(\xi)| = \lim_n |f(x_{v(n)}) - f(y_{v(n)})| \geq \varepsilon,$$

il che è assurdo. ■

Vediamo ora una condizione necessaria per l'uniforme continuità di funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

(8.15) Teorema *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione uniformemente continua. Allora, esistono due costanti positive a, b tali che*

$$\forall x \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq a + b|x|.$$

Dimostrazione. Siano $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$ relativi alla definizione di uniforme continuità. Allora, essendo

$$\forall j \in \mathbb{N} : \left| (j+1)\frac{\delta}{2} - j\frac{\delta}{2} \right| < \delta,$$

risulta

$$\forall j \in \mathbb{N} : \left| f\left((j+1)\frac{\delta}{2}\right) - f\left(j\frac{\delta}{2}\right) \right| < \varepsilon.$$

Allora, dato $x \in \mathbb{R}^+$, se n_0 è la parte intera di $2x/\delta$, si ha $|x - \frac{n_0\delta}{2}| < \delta$ e $n_0 \leq 2x/\delta$, da cui

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| f(x) - f\left(\frac{n_0\delta}{2}\right) + \sum_{j=0}^{n_0-1} \left(f\left((j+1)\frac{\delta}{2}\right) - f\left(j\frac{\delta}{2}\right) \right) + f(0) \right| \\ &\leq \left| f(x) - f\left(\frac{n_0\delta}{2}\right) \right| + \sum_{j=0}^{n_0-1} \left| f\left((j+1)\frac{\delta}{2}\right) - f\left(j\frac{\delta}{2}\right) \right| + |f(0)| \\ &\leq \varepsilon + n_0\varepsilon + |f(0)| \leq (\varepsilon + |f(0)|) + \frac{2\varepsilon}{\delta}x. \end{aligned}$$

Naturalmente, se $x \in \mathbb{R}^-$ si ragiona in modo simile. ■

(8.16) Esempio *In base al teorema precedente, la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$ è continua, ma non uniformemente continua. Si noti inoltre che la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$*

definita da $f(x) = \sin(x^2)$ soddisfa la condizione di crescita del teorema precedente ma non è uniformemente continua.

Vediamo una condizione sufficiente per l'uniforme continuità di funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

(8.17) Teorema Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e tale che esistano $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ con

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell_1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell_2.$$

Allora f è uniformemente continua.

Dimostrazione. Per assurdo sia $\varepsilon > 0$ e siano $(x_j) \subset \mathbb{R}$ e $(y_j) \subset \mathbb{R}$ due successioni tali che

$$|x_j - y_j| < \frac{1}{j}, \quad |f(x_j) - f(y_j)| \geq \varepsilon.$$

Se la successione (x_j) è limitata, per il Teorema di Bolzano-Weierstrass, a meno di una sottosuccessione, risulta $x_j \rightarrow \xi$, e quindi anche $y_j \rightarrow \xi$. Allora, per la continuità di f risulta $0 = \lim_j |f(x_j) - f(y_j)| \geq \varepsilon$, assurdo. Se invece $|x_j| \rightarrow \infty$, ad esempio $x_j \rightarrow +\infty$, allora si ha anche $y_j \rightarrow +\infty$, ma allora, per l'ipotesi sui limiti all'infinito di f , $0 = \lim_j |f(x_j) - f(y_j)| \geq \varepsilon$, da cui si trae nuovamente una contraddizione. Se $x_j \rightarrow -\infty$, si ragiona in modo simile. ■

(8.18) Definizione Sia $E \subseteq \mathbb{R}$. Una funzione $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *lipschitziana*, se esiste $c \in [0, +\infty[$ tale che

$$\forall x_1, x_2 \in E : |f(x_1) - f(x_2)| \leq c |x_1 - x_2|.$$

Il seguente risultato è di facile dimostrazione.

(8.19) Teorema Valgono i seguenti fatti:

- (a) le funzioni costanti e le funzioni $\{x \mapsto x\}$ e $\{x \mapsto |x|\}$ sono lipschitziane;
- (b) ogni funzione lipschitziana è uniformemente continua;
- (c) una somma ed una composizione di funzioni lipschitziane è lipschitziana.

(8.20) Osservazione Consideriamo la funzione $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sqrt{x}$. Allora f è uniformemente continua per il teorema di Heine, essendo continua su $[0, 1]$. D'altra parte il suo rapporto incrementale in 0 è dato da $\{h \mapsto \frac{1}{\sqrt{h}}\}$, per cui f non può essere lipschitziana in un intorno di 0, altrimenti avrebbe rapporto incrementale limitato.

9 Altre funzioni elementari

Introduciamo ora altre importanti funzioni elementari.

(9.1) Teorema *Sia n un numero naturale dispari con $n \geq 3$. Allora la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^n$ è strettamente crescente e $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Pertanto $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, strettamente crescente e*

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} f^{-1}(y) = -\infty, \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} f^{-1}(y) = +\infty.$$

Sia ora n un numero naturale pari con $n \geq 2$. Allora la funzione $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo $f(x) = x^n$ è strettamente crescente e $f([0, +\infty[) = [0, +\infty[$. Pertanto $f^{-1} : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ è continua, strettamente crescente e

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} f^{-1}(y) = +\infty.$$

Dimostrazione. Consideriamo solo il caso in cui n è un numero dispari, essendo il caso ad n pari simile. Se $a > 1$, si verifica facilmente per induzione che

$$\forall m \in \mathbb{N} : m \geq 1 \implies a^m > 1.$$

Allora da $0 < x < \xi$ segue $\xi/x > 1$, quindi $(\xi/x)^n > 1$, ossia $x^n < \xi^n$. Se $x < \xi < 0$, si ha $0 < -\xi < -x$, quindi $(-\xi)^n < (-x)^n$ da cui $x^n < \xi^n$. Se poi $x \leq 0 < \xi$ oppure $x < 0 \leq \xi$, è evidente che $x^n < \xi^n$. Pertanto f è strettamente crescente. Inoltre per ogni $x \geq 1$ si ha

$$x^n \geq n(x-1),$$

per cui

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -f(-x) = -\infty. \end{aligned}$$

Ne segue $\sup f(\mathbb{R}) = +\infty$, $\inf f(\mathbb{R}) = -\infty$. Essendo polinomiale, la funzione f è continua. Poiché $f(\mathbb{R})$ è un intervallo, si ha $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Per il Teorema della funzione inversa, $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è continua e strettamente crescente. Inoltre

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} f^{-1}(y) = \inf f^{-1}(\mathbb{R}) = \inf \mathbb{R} = -\infty,$$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} f^{-1}(y) = \sup f^{-1}(\mathbb{R}) = \sup \mathbb{R} = +\infty,$$

da cui la tesi. ■

Le due funzioni inverse definite nei due teoremi precedenti vengono denotate col simbolo $\sqrt[n]{}$ (radice n -esima). Evidentemente si ha

$$\sqrt[n]{} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{se } n \text{ è dispari, } n \geq 3, \quad \sqrt[n]{} : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \quad \text{se } n \text{ è pari, } n \geq 2.$$

(9.2) Teorema *La funzione $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è strettamente crescente ed $\exp(\mathbb{R}) =]0, +\infty[$. Di conseguenza $\exp^{-1} :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ è continua, strettamente crescente e*

$$\lim_{y \rightarrow 0} \exp^{-1}(y) = -\infty, \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} \exp^{-1}(y) = +\infty.$$

Dimostrazione. Abbiamo già dimostrato nel Teorema (7.5) che la funzione $\exp$ è strettamente crescente e che $\exp(\mathbb{R}) \subseteq]0, +\infty[$. D'altronde $\exp(\mathbb{R})$ è un intervallo, perché $\exp$ è continua, con $\inf \exp(\mathbb{R}) = 0$ e $\sup \exp(\mathbb{R}) = +\infty$, dal momento che questi sono i limiti di $\exp$ a $-\infty$ e $+\infty$. Pertanto $\exp(\mathbb{R}) =]0, +\infty[$. Per il Teorema della funzione inversa, $\exp^{-1} :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ è continua e strettamente crescente. Inoltre

$$\lim_{y \rightarrow 0} \exp^{-1}(y) = \inf \mathbb{R} = -\infty, \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} \exp^{-1}(y) = \sup \mathbb{R} = +\infty,$$

da cui la tesi. ■

(9.3) Definizione *La funzione $\exp^{-1}$ si chiama logaritmo (naturale) e si denota col simbolo $\log$ (oppure $\ln$).*

(9.4) Teorema *Valgono i seguenti fatti:*

$$\log 1 = 0,$$

$$\forall x, y \in]0, +\infty[: \log(xy) = \log x + \log y,$$

$$\forall x \in]0, +\infty[: \log(x^{-1}) = -\log x,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x - 1} = 1.$$

Dimostrazione. Risulta

$$\frac{\log x}{x - 1} = \left(\frac{\exp(\log x) - 1}{\log x} \right)^{-1}.$$

Per composizione si deduce che

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x - 1} = 1.$$

Le altre proprietà possono essere dimostrate per esercizio. ■

(9.5) Proposizione *Sia $a \in]0, +\infty[$. Allora*

$$\forall n \in \mathbb{N} : \exp(n \log a) = a^n, \quad \exp(-\log a) = a^{-1}.$$

Dimostrazione. Per dimostrare la prima proprietà, ragioniamo per induzione su n . Per $n = 0$ il fatto è vero. Supponiamo che sia vero per un certo $n \in \mathbb{N}$. Allora si ha

$$\exp((n+1) \log a) = (\exp(n \log a))(\exp(\log a)) = a^n a = a^{n+1}.$$

Quanto alla seconda affermazione, risulta

$$\exp(-\log a) = (\exp(\log a))^{-1} = a^{-1},$$

da cui la tesi. ■

(9.6) Definizione *Per ogni $a \in]0, +\infty[$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$ poniamo*

$$a^x := \exp(x \log a).$$

La funzione $\{x \mapsto a^x\}$ si chiama esponenziale con base a . Poniamo anche $e := \exp 1$ che si dice numero di Nepero.

In virtù della proposizione precedente, la notazione introdotta è consistente con quella di potenza. In particolare risulta $e^x = \exp x$.

(9.7) Teorema *Per ogni $a, b \in]0, +\infty[$ e $x, y \in \mathbb{R}$ si ha*

$$(ab)^x = a^x b^x, \quad (a^x)^y = a^{xy},$$

$$b \neq 0 \implies \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x},$$

$$a^{x+y} = a^x a^y, \quad a^0 = 1, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x},$$

$$\log(a^x) = x \log a.$$

Inoltre risulta $e > 1$ ed anche $\log e = 1$.

Dimostrazione. Le verifiche possono essere svolte per esercizio. ■

Tenuto conto della definizione di $\sin$ e $\cos$ usando il teorema di inversione, si possono facilmente dimostrare i seguenti risultati.

(9.8) Teorema La funzione $\cos$ è strettamente decrescente su $[0, \pi]$ con

$$\cos([0, \pi]) = [-1, 1].$$

Di conseguenza $\cos^{-1} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua e strettamente decrescente.

(9.9) Definizione La funzione $\cos^{-1}$ si chiama arcocoseno e si denota col simbolo $\arccos$.

(9.10) Teorema La funzione $\sin$ è strettamente crescente su $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ con

$$\sin\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [-1, 1].$$

Di conseguenza $\sin^{-1} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua e strettamente crescente.

(9.11) Definizione La funzione $\sin^{-1}$ si chiama arcseno e si denota col simbolo $\arcsin$.

(9.12) Teorema La funzione $\tan$ è strettamente crescente su $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ con

$$\tan\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) = \mathbb{R}.$$

Di conseguenza $\tan^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è continua e strettamente crescente con

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \tan^{-1}(y) = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} \tan^{-1}(y) = \frac{\pi}{2}.$$

Dimostrazione. Si verifica facilmente che $\tan$ è strettamente crescente su $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Per la continuità di $\tan$ l'insieme $\tan\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$ è un intervallo che ammette $-\infty$ e $+\infty$ come punti aderenti. Pertanto $\tan\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) = \mathbb{R}$. ■

(9.13) Definizione La funzione $\tan^{-1}$ si chiama arcotangente e si denota col simbolo $\arctan$.

(9.14) Osservazione Per costruzione si ha

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, \pi] : \arccos(\cos x) &= x, & \forall x \in [-1, 1] : \cos(\arccos x) &= x, \\ \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] : \arcsin(\sin x) &= x, & \forall x \in [-1, 1] : \sin(\arcsin x) &= x, \\ \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[: \arctan(\tan x) &= x, & \forall x \in \mathbb{R} : \tan(\arctan x) &= x. \end{aligned}$$

Si noti che se $x \in \mathbb{R} \setminus [0, \pi]$, l'espressione $\arccos(\cos x)$ è ancora definita, ma il suo valore non è affatto x . La stessa considerazione vale per $\arcsin(\sin x)$ ed $\arctan(\tan x)$.

10 Serie numeriche

10.1 Prime proprietà

(10.1) Definizione Siano (x_n) una successione in $\mathbb{R}$ e $S \in \overline{\mathbb{R}}$. Diciamo che S è somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

e scriviamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = S,$$

se

$$\lim_n \left(\sum_{h=0}^n x_h \right) = S.$$

Nel caso si abbia $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = S$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ si dice

- convergente, se $S \in \mathbb{R}$,
- positivamente divergente, se $S = +\infty$,
- negativamente divergente, se $S = -\infty$.

Se la successione, detta anche successione delle somme parziali,

$$\left\{ n \mapsto \sum_{h=0}^n x_h \right\}$$

non ammette limite, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ si dice indeterminata. Si dice che si studia il carattere di una data serie quando si vuole determinare se la serie è convergente, divergente oppure indeterminata.

In generale, è anche opportuno considerare serie del tipo

$$\sum_{n=k}^{\infty} x_n.$$

per $k \in \mathbb{N}$. Le definizioni sono semplici varianti di quelle date.

(10.2) Esempio Consideriamo la serie, detta anche serie di Mengoli,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Allora si verifica facilmente ragionando per induzione su n , che la successione s_n delle somme parziali è data da

$$s_n = \sum_{h=1}^n \frac{1}{h(h+1)} = \frac{n}{n+1}, \quad \text{per ogni } n \geq 1.$$

Infatti

$$s_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{1(1+1)}.$$

Inoltre supponendo vera la formula della n -esima somma parziale, si ha

$$s_{n+1} = s_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2},$$

per cui la formula desiderata vale per ogni $n \geq 1$ per il principio di induzione. Ne segue allora che la somma S della serie di Mengoli è

$$S = \lim_n s_n = \lim_n \frac{n}{n+1} = 1.$$

In generale la somma di una serie (da non confondere con il carattere della serie) è piuttosto difficile da calcolare esplicitamente con strumenti elementari, tranne in alcuni casi particolari come la serie di questo esempio.

(10.3) Teorema Siano (x_n) e (y_n) due successioni in $\mathbb{R}$, $S, T \in \overline{\mathbb{R}}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Supponiamo che

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = S, \quad \sum_{n=0}^{\infty} y_n = T.$$

Allora:

(a) se la somma $S + T$ è definita, si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x_n + y_n) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n \right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n \right);$$

(b) se il prodotto λS è definito, si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda x_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} x_n;$$

(c) se $x_n \leq y_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} y_n.$$

Dimostrazione. Si tratta di una semplice verifica. ■

Vediamo ora una condizione necessaria affinché una serie sia convergente.

(10.4) Teorema Sia $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ una serie convergente. Allora si ha

$$\lim_n x_n = 0 .$$

Dimostrazione. Se $S \in \mathbb{R}$ è la somma della serie, si ha per composizione

$$\lim_n \left(\sum_{h=0}^{n-1} x_h \right) = S .$$

Ne segue

$$\lim_n x_n = \lim_n \left(\sum_{h=0}^n x_h - \sum_{h=0}^{n-1} x_h \right) = S - S = 0 ,$$

da cui la tesi. ■

(10.5) Osservazione Il risultato precedente fornisce solo una condizione necessaria per la convergenza, come si evince dal seguente esempio: consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} .$$

Allora si verifica facilmente ragionando per induzione su n , che la successione s_n delle somme parziali è data da $s_n = \sqrt{n+1} - 1$ per ogni $n \geq 1$, per cui la serie risulta positivamente divergente nonostante il suo termine generale tenda a zero per $n \rightarrow +\infty$.

(10.6) Teorema Sia

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

una serie convergente. Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ la serie

$$\sum_{h=n}^{\infty} x_h$$

è convergente e si ha

$$\lim_n \left(\sum_{h=n}^{\infty} x_h \right) = 0 .$$

Dimostrazione. Fissiamo $n \in \mathbb{N}$. Per ogni $k \geq n$ si ha

$$\sum_{h=n}^k x_h = \sum_{h=0}^k x_h - \sum_{h=0}^{n-1} x_h .$$

Ne segue che $\sum_{h=n}^{\infty} x_h$ è convergente e che

$$\sum_{h=n}^{\infty} x_h = \sum_{h=0}^{\infty} x_h - \sum_{h=0}^{n-1} x_h .$$

Passando al limite per $n \rightarrow +\infty$, si ottiene

$$\lim_n \left(\sum_{h=n}^{\infty} x_h \right) = \sum_{h=0}^{\infty} x_h - \lim_n \left(\sum_{h=0}^{n-1} x_h \right) = 0 ,$$

da cui la tesi. ■

Vediamo ora una serie numerica notevole, detta serie geometrica di ragione $x \in \mathbb{R}$, per la quale è possibile stabilire il carattere e la somma esplicita al variare di x .

(10.7) Teorema *Sia $x \in \mathbb{R}$. Allora*

(a) *per $-1 < x < 1$ si ha*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} ;$$

(b) *per $x \geq 1$ si ha*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = +\infty ;$$

(c) *per $x \leq -1$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ è indeterminata.*

Dimostrazione. Se $x = 1$, si ha

$$\sum_{h=0}^n x^h = n + 1 ,$$

per cui la serie è positivamente divergente. Se $x \neq 1$, si dimostra facilmente ragionando per induzione su n che

$$\sum_{h=0}^n x^h = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} .$$

Pertanto la serie è convergente per $-1 < x < 1$ e positivamente divergente per $x > 1$. Per $x \leq -1$ si ha

$$\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \geq 1 \quad \text{se } n \text{ è pari,}$$

$$\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \leq 0 \quad \text{se } n \text{ è dispari,}$$

per cui la serie è indeterminata. ■

10.2 Serie a termini positivi

(10.8) Definizione Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ si dice a termini positivi, se $x_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si dice a termini strettamente positivi, se $x_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(10.9) Teorema Una serie a termini positivi può essere solo convergente o positivamente divergente.

Dimostrazione. La successione di numeri reali

$$\left\{ n \mapsto \sum_{h=0}^n x_h \right\}$$

è evidentemente crescente. La tesi discende allora dal Teorema (4.24). ■

(10.10) Osservazione Proviamo ora (in modo elementare) che la serie a termini positivi, detta serie armonica,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

è positivamente divergente. Ricordiamo che la successione

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

è crescente e convergente ad e ; in particolare, si ha

$$e \geq \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n, \quad \text{per ogni } n \geq 1$$

da cui

$$\frac{1}{n} \geq \log \frac{n+1}{n} = \log(n+1) - \log n, \quad \text{per ogni } n \geq 1$$

che implica che

$$s_n \geq \log(n+1), \quad \text{per ogni } n \geq 1,$$

da cui $s_n \rightarrow +\infty$ per $n \rightarrow +\infty$, ossia la serie è positivamente divergente. Più in generale, come vedremo negli esempi (10.20) e (6.9) utilizzando strumenti di calcolo integrale, se $\lambda > 0$, la serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\lambda}$$

è convergente se $\lambda > 1$ mentre è positivamente divergente se $\lambda \leq 1$. Questa serie viene solitamente detta serie armonica generalizzata e risulta particolarmente utile per lo studio del carattere delle serie a termini positivi tramite il criterio del confronto che vedremo ora.

(10.11) Teorema (del confronto) Siano $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ una serie a termini positivi e $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ una serie a termini strettamente positivi convergente. Supponiamo che si abbia

$$\limsup_n \frac{x_n}{y_n} < +\infty.$$

Allora anche la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ è convergente.

Dimostrazione. Sia $M \in \mathbb{R}$ un maggiorante definitivo per $\frac{x_n}{y_n}$ e sia $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{x_n}{y_n} \leq M$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Allora per ogni $n \geq \bar{n}$ risulta

$$\sum_{h=0}^n x_h = \sum_{h=0}^{\bar{n}-1} x_h + \sum_{h=\bar{n}}^n x_h \leq \sum_{h=0}^{\bar{n}-1} x_h + M \sum_{h=\bar{n}}^n y_h \leq \sum_{h=0}^{\bar{n}-1} x_h + M \sum_{h=0}^{\infty} y_h.$$

Passando al limite per $n \rightarrow +\infty$, si deduce che $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ è convergente. ■

(10.12) Esempio Per il criterio del confronto, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \quad x_n = \frac{n+1}{n^3}$$

è convergente, poichè la serie armonica generalizzata

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n, \quad y_n = \frac{1}{n^2}$$

è convergente e

$$\limsup_n \frac{x_n}{y_n} = \lim_n \frac{n+1}{n} = 1.$$

(10.13) Osservazione Il criterio del confronto viene spesso utilizzato nella seguente forma: sia $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ una serie a termini positivi e sia $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ una serie a termini positivi convergente. Supponiamo inoltre che esistano una costante $c > 0$ ed $n_0 \in \mathbb{N}$ tali che

$$x_n \leq c y_n \quad \text{per ogni } n \geq n_0.$$

Allora anche la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

è convergente. Inoltre, molto spesso, si utilizza $y_n = \frac{1}{n^\lambda}$ per qualche $\lambda > 1$ come termine generale della serie convergente da confrontare con la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$.

(10.14) Teorema (Criterio della radice) Sia

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

una serie a termini positivi. Allora

- (a) se $\limsup_n \sqrt[n]{x_n} < 1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ è convergente;
- (b) se $\limsup_n \sqrt[n]{x_n} > 1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ è positivamente divergente.

Dimostrazione.

(a) Sia $M \in]0, 1[$ un maggiorante definitivo per $\sqrt[n]{x_n}$ e sia $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\sqrt[n]{x_n} \leq M$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Ne segue $x_n \leq M^n$ per ogni $n \geq \bar{n}$, quindi

$$\limsup_n \frac{x_n}{M^n} \leq 1.$$

Combinando il criterio del confronto col Teorema (10.7), si ottiene la tesi.

(b) Evidentemente risulta

$$\limsup_n x_n \geq 1,$$

per cui la serie non può essere convergente. La tesi discende allora dal Teorema (10.9). ■

(10.15) Esempio Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^n}.$$

Poichè

$$\limsup_n \sqrt[n]{x_n} = \lim_n \frac{e}{n} < 1 ,$$

la serie è convergente per il criterio della radice.

(10.16) Teorema (Criterio del rapporto) Sia

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

una serie a termini strettamente positivi. Allora

(a) se

$$\limsup_n \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1 ,$$

la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ è convergente;

(b) se

$$\liminf_n \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1 ,$$

la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ è positivamente divergente.

Dimostrazione.

(a) Sia $M \in]0, 1[$ un maggiorante definitivo per $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ e sia $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq M$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Si verifica facilmente per induzione su n che

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq \bar{n} \implies x_n \leq x_{\bar{n}} M^{n-\bar{n}} ,$$

per cui

$$\limsup_n \frac{x_n}{M^n} < +\infty .$$

Combinando il criterio del confronto col Teorema (10.7), si ottiene la tesi.

(b) Sia $M \in]1, +\infty[$ un minorante definitivo per $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ e sia $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq M$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Si verifica facilmente per induzione su n che

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq \bar{n} \implies x_n \geq x_{\bar{n}} M^{n-\bar{n}} ,$$

per cui

$$\lim_n x_n = +\infty .$$

Pertanto la serie non può essere convergente. ■

(10.17) Esempio Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \quad x_n = \frac{n^5}{2^n}.$$

Poichè

$$\limsup_n \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_n \frac{(n+1)^5}{2n^5} < 1,$$

la serie è convergente per il criterio del rapporto.

(10.18) Osservazione Sia per il criterio del rapporto che per il criterio della radice i casi limite il cui risulta

$$\limsup_n \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$$

o, rispettivamente,

$$\limsup_n \sqrt[n]{x_n} = 1$$

sono casi dubbi in cui nulla può dirsi circa il carattere della serie. Ad esempio, per la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\lambda}$$

si verifica facilmente che i limiti sopra sono uguali ad 1 per ogni valore di $\lambda > 0$. D'altra parte, come osservato in precedenza nell'osservazione (10.10), la serie è convergente per $\lambda > 1$ mentre è divergente per $\lambda < 1$.

Come abbiamo appena visto i criteri della radice e del rapporto sono applicabili solo a serie il cui termine generale abbia un decadimento a zero di tipo esponenziale. Il criterio seguente, che menzioniamo senza dimostrazione, si applica invece anche alle serie il cui termine generale è una funzione razionale.

(10.19) Teorema (Criterio di condensazione) Una serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

a termini positivi, con (x_n) decrescente, è convergente se e solo se la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x_{2^n}$$

è convergente.

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

(10.20) Esempio Si verifica immediatamente con il criterio di condensazione che le serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda}}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^{\lambda} n}$$

sono convergenti se e solo se $\lambda > 1$.

10.3 Serie a termini di segno variabile

(10.21) Definizione Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ si dice assolutamente convergente, se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ è convergente.

(10.22) Teorema Ogni serie assolutamente convergente è convergente.

Dimostrazione. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} (|x_n| + x_n)$ è evidentemente a termini positivi. Poiché

$$\forall n \in \mathbb{N} : |x_n| + x_n \leq 2|x_n|,$$

risulta

$$\sum_{n=0}^{\infty} (|x_n| + x_n) \leq 2 \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| < +\infty.$$

Dal momento che $x_n = (|x_n| + x_n) - |x_n|$, la tesi discende dal Teorema (10.3). ■

(10.23) Osservazione Combinando il teorema precedente con uno dei criteri di convergenza per le serie a termini positivi visti in precedenza, si ottengono criteri utili per lo studio del carattere delle serie a termini di segno variabile. Le condizioni di convergenza saranno quindi

$$\limsup_n \frac{|x_n|}{y_n} < +\infty$$

per il criterio del confronto,

$$\limsup_n \sqrt[n]{|x_n|} < 1$$

per il criterio della radice e

$$\limsup_n \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| < 1$$

per il criterio del rapporto.

(10.24) Teorema (Criterio di Leibniz) Sia (x_n) una successione decrescente a termini positivi tale che

$$\lim_n x_n = 0 .$$

Allora la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x_n$$

è convergente. Inoltre, se S indica la somma della serie, si ha

$$|s_n - S| \leq x_{n+1}, \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N},$$

ossia l'errore che si commette sostituendo l' n -esimo termine della somma parziale s_n della serie con la sua somma S è stimabile con l' $(n+1)$ -esimo termine x_{n+1} della serie.

Dimostrazione. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sum_{h=0}^{2k+2} (-1)^h x_h = \sum_{h=0}^{2k} (-1)^h x_h - x_{2k+1} + x_{2k+2} \leq \sum_{h=0}^{2k} (-1)^h x_h .$$

Allora esiste $S \in [-\infty, +\infty[$ tale che

$$\lim_k \left(\sum_{h=0}^{2k} (-1)^h x_h \right) = S .$$

Poiché

$$\sum_{h=0}^{2k+1} (-1)^h x_h = \sum_{h=0}^{2k} (-1)^h x_h - x_{2k+1} ,$$

risulta anche

$$\lim_k \left(\sum_{h=0}^{2k+1} (-1)^h x_h \right) = S ,$$

quindi

$$\lim_n \left(\sum_{h=0}^n (-1)^h x_h \right) = S .$$

D'altronde per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sum_{h=0}^{2k+3} (-1)^h x_h = \sum_{h=0}^{2k+1} (-1)^h x_h + x_{2k+2} - x_{2k+3} \geq \sum_{h=0}^{2k+1} (-1)^h x_h ,$$

per cui non può essere $S = -\infty$. Per quanto riguarda l'ultima affermazione, osserviamo anzitutto che la successione delle somme parziali dispari (s_{2n+1}) decresce verso S , mentre la successione delle somme parziali pari (s_{2n}) cresce verso S , per cui risulta

$$0 \leq S - s_{2n} \leq s_{2n+1} - s_{2n} = x_{2n+1}, \quad 0 \leq s_{2n+1} - S \leq s_{2n+1} - s_{2n+2} = x_{2n+2},$$

da cui si ottiene la stima desiderata. ■

(10.25) Osservazione *Il criterio di convergenza assoluta fornisce soltanto una condizione sufficiente per la convergenza. Infatti, mentre la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

risulta convergente per il criterio di Leibniz, la serie dei moduli è la serie armonica, quindi positivamente divergente. Più in generale, per ogni $\lambda > 0$, la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\lambda}$$

è convergente per il criterio di Leibniz, essendo $\frac{1}{n^\lambda}$ una successione a termini positivi decrescente che tende a zero per $n \rightarrow \infty$, mentre come abbiamo visto la serie dei moduli converge solo se $\lambda > 1$.

11 Esercizi

(11.1) Esercizio Verificare mediante la definizione di limite i seguenti limiti di successioni:

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2;$
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0 \quad (\text{con } \alpha > 0);$
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = 0 \quad (\text{con } \alpha > 0);$
4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin^2 n}{n} = 0;$
5. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2+5}{2n^2+3} = \frac{3}{2};$
6. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n-2}{n^2+5n-2} = 0.$

(11.2) Esercizio Siano dati due polinomi $P(n)$, $Q(n)$. Determinare, mediante opportuni passaggi algebrici, il seguente limite:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{P(n)}{Q(n)}.$$

(11.3) Esercizio Utilizzare i risultati precedenti e le proprietà riguardanti le operazioni con i limiti per calcolare i seguenti limiti:

$$\begin{array}{lll} \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n^2 - \sqrt{n} + 1), & \lim_{n \rightarrow +\infty} \log_{1/3} \frac{n^2+n}{2n^2+1}, & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{3^{\frac{n+1}{2}}}, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2n^2-n}{3n^2-\sqrt{n}}}, & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{3^{\frac{n^2-1}{2}}}, & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 \ln^2 n - \ln n^3}{\ln^2 n + \ln n^2}, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{-1}+2n^{-2}}{3n^{-2}+n^{-4}}, & \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \right), & \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n}, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{n^3+5n-1}{3n^3+5n^2-27}}, & \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin \left(\frac{n\pi+3}{2n+2} \right), & \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin \left(\sin \left(\frac{1}{n} \right) \right). \end{array}$$

(11.4) Esercizio Utilizzando il simbolo di uguaglianza asintotica $\sim$ determinare i risultati dei seguenti limiti:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{\log n} - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}}{\frac{1}{n} - 2^n}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n - \log n + (-1)^n + \frac{1}{n}}{n^2 + 10 \sin n - \frac{1}{\log n}}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(1 + e^n)}{n - \log^3 n + 1}.$$

(11.5) Esercizio Dimostrare $\forall \alpha, \beta > 0, \forall A > 1$ parametri reali, che il limite delle seguenti successioni vale zero:

1. $a_n = \frac{n^\alpha}{A^n}$;
2. $b_n = \frac{A^n}{n!}$;
3. $c_n = \frac{n!}{n^n}$;
4. $d_n = \frac{\log^\beta n}{n^\alpha}$.

(11.6) Esercizio Utilizzare i limiti notevoli per risolvere i seguenti limiti:

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n$;
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}}$;
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$;
4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n+3}\right)^n$;
5. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n n^2 \sin^2\left(\frac{1}{n}\right)$.

(11.7) Esercizio Discutere per ogni $\alpha > 0$, la convergenza delle seguenti successioni:

$$a_n = \frac{\left(e + \frac{1}{n^\alpha}\right)^{n^2}}{e^{n^2}}, \quad b_n = \left((n+1)^{\frac{-1}{\log n}} + e^{-1}\right) n^\alpha.$$

(11.8) Esercizio (Successione di Fibonacci). Sia $a_1 = a_2 = 1$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, si definisce induttivamente

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n.$$

Trovare i primi elementi della successione così definita. Provare che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty.$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, si ponga

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

e si calcoli

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n.$$

(11.9) Esercizio Sia $x_0 \in (0, \pi)$ e si consideri la successione definita da

$$x_{k+1} = x_k + \sin x_k.$$

Provare che:

1. $x_k \in (0, \pi)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$;

2. $(x_k)_k$ è crescente.

Infine calcolare il limite di (x_k) per $k \rightarrow +\infty$.

(11.10) Esercizio Data la successione (x_k) definita da

$$x_0 = a, \quad x_{k+1} = \max \left\{ \frac{1}{4}, x_k^2 \right\}$$

dire se esiste, al variare di $a \in \mathbb{R}$, il limite di (x_k) per $k \rightarrow +\infty$.

(11.11) Esercizio Si consideri l'equazione

$$x^k = \cos \frac{x}{k}.$$

1. Provare che esiste un'unica soluzione x_k .

2. Provare che (x_k) rimane limitata.

3. Calcolare il limite di (x_k) per $k \rightarrow +\infty$.

(11.12) Esercizio Si consideri la successione definita da

$$x_1 = \lambda, \quad x_{k+1} = \frac{x_k}{1 + x_k},$$

con $\lambda \geq 0$. Calcolare il limite di (x_k) per $k \rightarrow +\infty$.

(11.13) Esercizio Sia $\lambda > 0$. Si studi la successione definita da

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \lambda, \quad x_{k+1} = x_k + x_{k-1}^2.$$

(11.14) Esercizio Sia $\lambda > 0$. Si studi la successione definita da

$$x_1 = \lambda, \quad x_{k+1} = \log(1 + x_k).$$

(11.15) Soluzione esercizio (11.1).

Limite 1: Devo mostrare che $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n > n_0 \implies \left| \frac{2n+1}{n+1} - 2 \right| < \varepsilon$.

Fissiamo $\varepsilon > 0$, e determiniamo quale condizione deve soddisfare n in modo tale che sia soddisfatta la disuguaglianza:

$$\left| \frac{2n+1}{n+1} - 2 \right| < \varepsilon.$$

Svolgiamo i conti:

$$\left| \frac{2n+1-2n-2}{n+1} \right| < \varepsilon \quad \text{quindi} \quad \frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

Quindi basta scegliere $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right]$.

Limite 4:

Devo mostrare che $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq n_0$ vale

$$\left| \frac{\sin^2(n)}{n} \right| < \varepsilon.$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Si ha:

$$\left| \frac{\sin^2(n)}{n} \right| \leq \frac{1}{n}.$$

Basta pertanto prendere $n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon}$.

(11.16) Soluzione esercizio (11.5). Supponiamo in un primo momento che α sia un numero intero e supponiamo:

$$\sqrt[2\alpha]{A} = 1 + h.$$

Tenendo conto della disuguaglianza di Bernoulli possiamo affermare che:

$$(\sqrt[2\alpha]{A})^n = (1+h)^n \geq 1 + nh > nh.$$

Quindi dato che $A^n > (nh)^{2\alpha}$ ottengo:

$$\frac{n^\alpha}{A^n} < \frac{n^\alpha}{n^{2\alpha} h^{2\alpha}} \longrightarrow 0 \quad \text{se} \quad n \rightarrow +\infty.$$

Infine se $\alpha \in \mathbb{R}$, basta osservare che:

$$n^{[\alpha]} \leq n^\alpha \leq n^{[\alpha]+1},$$

quindi per il teorema dei due carabinieri si ha la tesi.

(11.17) Soluzione esercizio (11.8). I termini della successione a_n per $n \geq 3$ sono dati dalla somma dei due precedenti. Quindi i primi termini sono:

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_3 = 2, \quad a_4 = 3, \quad a_5 = 5, \quad a_6 = 8, \dots$$

Inoltre, se $n \geq 2$, si ha dalla definizione

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \geq a_n,$$

dato che ciascun termine è positivo. Quindi la successione è monotona crescente e pertanto esiste il limite per $n \rightarrow +\infty$. Si può facilmente dimostrare per induzione che $a_n \geq n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 5$, il che permette di concludere che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty.$$

Il limite precedente si può dimostrare anche nel modo seguente. Supponiamo per assurdo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$$

con $a \in \mathbb{R}$ e $a \geq 0$. Passando al limite in

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1},$$

si ottiene che $a = a + a$, cioè che $a = 2a$, da cui si deduce che $a = 0$, il che ovviamente è falso, dato che la successione è strettamente crescente e tutti i termini sono positivi. Consideriamo ora

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Si noti che $b_n \geq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, dato che il numeratore è più grande del denominatore. Inoltre, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, si ha:

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{b_{n-1}},$$

che implica che $b_n \leq 2$. Supponiamo per un momento che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$$

esista e sia uguale a b . Allora $b \in [1, 2]$ e passando al limite nell'uguaglianza

$$b_n = 1 + \frac{1}{b_{n-1}},$$

si deduce che b soddisfa

$$b^2 - b - 1 = 0.$$

Pertanto l'unica possibilità è che

$$b = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Resta pertanto da dimostrare che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$$

esiste. Si ha la seguente uguaglianza per ogni $n \geq 3$:

$$b_{n+2} = 1 + \frac{1}{b_{n+1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{b_n}} = 1 + \frac{b_n}{b_n + 1}.$$

Studiamo quando accade che $b_{n+2} \geq b_n$, cioè quando

$$1 + \frac{b_n}{b_n + 1} \geq b_n.$$

Si vede facilmente che questo è vero se

$$b_n \leq \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

I primi termini della successione b_n sono dati da

$$b_1 = 1, \quad b_2 = 2, \quad b_3 = \frac{3}{2}, \quad b_4 = \frac{5}{3}, \quad b_5 = \frac{8}{5}, \quad \dots$$

Si noti che i primi termini della successione b_n con n dispari sono più piccoli di $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Inoltre si dimostra che, per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, se $b_n < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ allora $b_{n+1} > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e viceversa. Pertanto la successione dei b_n con n dispari è monotona crescente e quindi tende a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Invece la successione dei b_n con n pari è monotona decrescente e quindi tende a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(11.18) Soluzione esercizio (11.10). Consideriamo vari casi.

1. $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$. In questo caso si vede facilmente che $x_n = \frac{1}{4}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.
2. $\frac{1}{2} < a < 1$, $-1 < a < -\frac{1}{2}$. Da un certo indice $\bar{k}$ in poi, tutti gli x_k sono uguali a $\frac{1}{4}$.
3. $a = 1$, $a = -1$. Risulta che $x_n = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.
4. $a > 1$, $a < -1$. Provare che

$$x_n = (a^2)^n$$

per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Quindi si conclude che il limite della successione è uguale a $+\infty$.

(11.19) Esercizio Utilizzare la definizione per dimostrare i risultati dei seguenti limiti:

1. $\lim_{x \rightarrow a} x = a$;

2. $\lim_{x \rightarrow a} k = k;$
3. $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4;$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0;$
5. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{(x-1)^2} = +\infty.$

(11.20) Esercizio Calcolare i seguenti limiti:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+3x-4}{x-1} & [5]; & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} & [2]; & \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x^2+1} \cdot \frac{2}{x^2-4x+3} & [3/5]; \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{[x]} & [1]; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3-3x^2+4x}{x^5-x} & [-4]; & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3-3x^2+4x}{x^5-x} & [0]; \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x+\sqrt{3}x} & [0]; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+3\sqrt{x}}{2x-5\sqrt{x}} & [-3/5]; & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+\sin(e^x)}{2x} & [-\infty]; \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) & [0]; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos(x)}{(\sin(x))^2} & [1/2]; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+e^x)}{\sin(x)} & [no]. \end{aligned}$$

(11.21) Esercizio Utilizzare i limiti notevoli per risolvere i seguenti limiti:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \sin(x-1)}{x^2-1} \cdot \frac{e^{x^2-1}-1}{x-1} & [2]; & \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1-\cos(x+1)}{x+1} \cdot \frac{3(x-1)}{e^{x^2-1}-1} & [3/2]; \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^x-2^x}{\sin(\sin(\sin \sqrt{x}))^2} & [\log(7/2)]; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(2^x-3^x)}{1-\cos(3x)} & [\frac{-2 \log(3/2)}{9}]; \\ \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sin x-1}{x-\pi/2} & [0]; & \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{|\log(\cos x)|} & [0]; \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(ex+e)-\cos x}{\sin x} & [1]; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+2x)}{\sin x} & [2]; \\ \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x)-\sin(a)}{x-a} & [\cos(a)]; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sqrt{(1+x^2)-1})}{x} & [0]. \end{aligned}$$

(11.22) Esercizio Determinare l'ordine di infinitesimo per $x \rightarrow 1^+$, rispetto all'infinitesimo campione $(x-1)$, delle funzioni $f(x) = \log(2-x)$ e $g(x) = \log(x)(x^3-3x+2)$.

(11.23) Esercizio Sia data la funzione $g(x) = \lambda \sqrt{x^3+2x^2} + (1-\lambda) \tan(\sqrt{x}) \sqrt{\sin(x)}$. Determinare per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{x} = 0.$$

(11.24) Esercizio Calcolare, se esistono i seguenti limiti o i limiti destro e sinistro:

$$\begin{array}{ll}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x-1|-|x+1|} & [-1/2]; \\
 \lim_{x \rightarrow 64} \frac{x^{1/3}-4}{x^{1/2}-8} & [16]; \\
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(x)}{|x|} & [0]; \\
 \lim_{x \rightarrow 4} [x] \cdot (x - [x]) & [no]; \\
 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{|x-1|} & [no]; \\
 \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{x^2 + \sqrt{1+x^4}} - |x|\sqrt{2} \right) & [0]; \\
 \lim_{x \rightarrow 0} |x|^{1/x} & [no]; \\
 \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\frac{1}{\cos(x)-1}} & [+ \infty]; \\
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{(x^3 - x^2)} - x & [-1/3]; \\
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4} & [1/8]; \\
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos 2x}}{\tan^2(x/2)} & [6]; \\
 \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|5-2x|-|x-2|}{|x-5|-|3x-7|} & [-1/4]; \\
 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+x-2}}{\sqrt[3]{7+x-2}} & [3]; \\
 \lim_{x \rightarrow 0} 2^{-1/x} & [no]; \\
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - \sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2} & [1/2]; \\
 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{1-x-\log(x)} & [-1/2]; \\
 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin(1/x)} & [no]; \\
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log\left(1+\frac{a}{x}\right)}{e^{a/x} - e^{b/x}} & [a/a - b]; \\
 \lim_{x \rightarrow \pi^+} (\tan x)^{\frac{1}{\pi-x}} & [+ \infty]; \\
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + 2 \sin \frac{1}{x}\right)^x & [e^2]; \\
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \log(\cos x)}{x \sin x} & [1]; \\
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+3}{x^2+2}\right)^x & [1].
 \end{array}$$

(11.25) Esercizio Dimostrare che il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} \cos(x^2)$$

non esiste, determinando due successioni $\{a_n\}, \{b_n\} \rightarrow +\infty$ tali che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n).$$

(11.26) Esercizio Determinare una funzione reale $f(x)$ con le seguenti caratteristiche:

1. dominio $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$;
2. la retta $x = -1$ come suo unico asintoto verticale;
3. la retta $y = 0$ come suo unico asintoto orizzontale;
4. interseca l'asse delle ordinate in $(0; 1)$.

(11.27) Esercizio *Mostrare che con le usuali tecniche non è possibile determinare il seguente limite:*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{\log(1 + x^2)}$$

(11.28) Esercizio *Discutere al variare di a il risultato del seguente limite:*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^a - \log x}{\sqrt{x} + x^{2a}}.$$

(11.29) Esercizio *Scrivere una funzione reale $f(x)$ che abbia le seguenti caratteristiche:*

1. *Ha come dominio $\mathbb{R} \setminus \{1\}$;*
2. *interseca l'asse delle ordinate in $(0; -1)$;*
3. *è un infinitesimo per $x \rightarrow \infty$;*
4. *non interseca l'asse delle x ;*
5. *è un infinito per $x \rightarrow 1$;*
6. *è negativa per $x < 1$, positiva per $x > 1$.*

(11.30) Esercizio *Dire se esistono soluzioni delle seguenti equazioni:*

1. $\ln x + x = 0$;
2. $e^x = x + 3$;
3. $\tan x = x^2 + 1$;
4. $x^6 + x - 3 = 0$ nell'intervallo $[0, 2]$.

(11.31) Esercizio *Studiare la continuità delle seguenti funzioni:*

1. $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leq 3, \\ 2x, & \text{se } x > 3; \end{cases}$
2. $f(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{1-x}}}$;
3. $f(x) = \frac{|\cos(x)|}{\cos(x)}$.

(11.32) Esercizio Qual è l'unica risposta esatta?

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funzione continua tale che $f(0) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Allora:

1. f assume il valore -3 ;
2. f assume tutti i valori compresi tra -2 e 2 ;
3. f assume il valore 1 ;
4. f assume tutti i valori compresi tra $-\infty$ e 0 .

(11.33) Esercizio Calcolare

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sin(n) \cos(n), \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} 2(-1)^n \sin(n),$$

(11.34) Esercizio Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \sqrt{x}.$$

Su $[0, 1]$ f è uniformemente continua? è Lipschitziana? è derivabile? e su $(0, 1)$? e su $[1, \infty)$?

(11.35) Esercizio Si determini il numero delle soluzioni dell'equazione $x^2(1 - x^2)^2 = \alpha$, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. $[2, 4, 6, 3, 0]$ a seconda del valore di α .

(11.36) Soluzione esercizio (11.30). Applicare il teorema di esistenza degli zeri negli intervalli:

1. $[\frac{1}{3}, 2]$;
2. $[0, 3]$;
3. $[0, \frac{49\pi}{100}]$;
4. $[0, 2]$.

(11.37) Esercizio Determinare la somma delle seguenti serie o mostrare che la serie diverge:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$;
2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^n}$;

3. $\sum_{n=1}^{\infty} 3\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1};$
4. $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(2+\pi)^{2n}};$
5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{10^{3n}};$
6. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-5)^n}{8^{2n}};$
7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+3}}{e^{n-3}};$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+2^n}{2^{n+2}};$
9. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3+2^n}{3^{n+2}};$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} (\pi)^{n/2} \cos(n\pi).$

(11.38) Esercizio *Determinare la somma delle seguenti serie telescopiche:*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)};$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)};$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)};$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+2)};$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$

(11.39) Esercizio *Una palla elastica lasciata cadere rimbalza in alto fino a un'altezza pari a $3/4$ dell'altezza iniziale. Se la palla è lasciata cadere da un'altezza di 2 metri e poi continua a rimbalzare indefinitamente, qual è la distanza totale percorsa della palla di fermarsi?*

(11.40) Esercizio *Determinare il carattere delle seguenti serie:*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{99^n}{n!};$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n};$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n};$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2};$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{n^2(2n)!};$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2};$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n^n};$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^n}{n^{n+2}};$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n^{1/n})};$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\cos(n\pi)}{n}\right)^{n^2} \cos \frac{1}{n}.$

(11.41) Esercizio Determinare il carattere delle seguenti serie a termini alterni.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n!)^2}{(2n)!}. \quad [Convergenza assoluta]$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{1+n^2}. \quad [Convergenza assoluta]$
3. $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n}. \quad [Non converge]$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2 + \ln n}. \quad [Convergenza assoluta]$
5. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{(n+1) \ln(n+1)}. \quad [Convergenza semplice]$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln^2(n)}. \quad [Convergenza semplice]$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin(e^{-n}). \quad [Convergenza assoluta]$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right). \quad [Convergenza semplice]$

(11.42) Esercizio Determinare l'intero più piccolo n tale che la somma parziale s_n della serie

$$s = \sum_{j=1}^{+\infty} (-1)^j \frac{j}{j^2 + 1}$$

approssimi s con un errore (in valore assoluto) minore o uguale a 10^{-3} .

(11.43) Esercizio Determinare il carattere delle seguenti serie:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n) + (-1)^n + 1/n}{n^2 + \log n};$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin n) \log(1 + (\sin(1/n))^{1/3})}{n^{2/3} (\log n)^2 + \sqrt{n}};$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n + \sqrt{\log n}}{n+5}\right)^n;$

4. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n - \log(\log n)}$;
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$;
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{n^2+n+1}$;
7. $\sum_{n=1}^{\infty} 1 + e^{1/n} - 2e^{1/2n}$;
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \log \left(\frac{2n^2+3}{2n^2+2} \right)$;
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n+1) - \log n}{\sqrt{n} + \log n}$;
10. $\sum_{n=1}^{\infty} (e^{1/\sqrt{n}} - 1) \log(1 + \frac{1}{\sqrt{n}})$.

(11.44) Esercizio Determinare al variare di $a \in \mathbb{R}$ il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(\frac{a^2 - a + 3}{4a^2 - 1} \right)^n.$$

(11.45) Esercizio Determinare al variare di $x \in \mathbb{R}$ il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} x^n.$$

(11.46) Esercizio Sia $a_1 = 1/10$ e si consideri la successione definita per ricorsione come segue:

$$a_{n+1} = \frac{2a_n}{1 + a_n}.$$

Provare che:

1. $a_n \in (0, 1)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
2. $\{a_n\}$ è crescente;
3. il limite di a_n per $n \rightarrow +\infty$ vale 1.

Infine determinare il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - a_n).$$

(11.47) Esercizio Determinare per quali a converge la seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n + \sin n) \left(\frac{1}{n^a} - \sin \frac{1}{n^a} \right).$$

(11.48) Esercizio Determinare per quali a converge la seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{1/n} - 1 - \frac{1}{n^a}.$$

(11.49) Esercizio Sia assegnata la seguente funzione:

$$f(x) = x - \arctan x;$$

allora:

1. mostrare che $f(x) \geq 0$ quando $x \geq 0$;
2. scrivere lo sviluppo asintotico di $f(x)$ in un intorno di $x = 0$ fino al terzo ordine.

Infine determinare al variare di a il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^a \left(\frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{n} \right).$$

(11.50) Soluzione esercizio (11.42). Dato che la serie s verifica il criterio di Leibniz, allora vale la stima dell'errore

$$|s - s_n| \leq |a_{n+1}| = \frac{n+1}{(n+1)^2 + 1}.$$

Basta pertanto scegliere il più piccolo n tale che

$$\frac{n+1}{(n+1)^2 + 1} \leq 10^{-3}.$$

Capitolo 3

Calcolo differenziale

1 Breve premessa

Per studiare come cambiano i valori di una data funzione f al variare della variabile indipendente x una nozione di fondamentale importanza è quella di rapporto incrementale e di limite del rapporto incrementale. Tali nozioni appaiono in modo naturale sia in questioni geometriche elementari, come ad esempio la determinazione dell'equazione della retta tangente al grafico di una funzione in un dato punto, sia in questioni fisiche di base, come il calcolo della velocità media ed istantanea di un punto materiale che si muove su una retta.

2 La derivata

Vediamo subito la definizione di derivata di una funzione in un punto.

(2.1) Definizione Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione e $x \in E$ un punto di accumulazione per E . Diciamo che f è derivabile in x , se esiste finito

$$\lim_{\xi \rightarrow x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}.$$

Se f è derivabile in x , il valore di tale limite si chiama derivata di f in x e si denota col simbolo $Df(x)$ o $f'(x)$. La funzione $\{x \mapsto f'(x)\}$ si chiama funzione derivata di f ed ha per dominio l'insieme degli x in cui f è derivabile. Essa si denota col simbolo Df o f' . Una funzione si dice derivabile, se è derivabile in ogni $x \in E$.

La funzione

$$\left\{ \xi \mapsto \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \right\}$$

si chiama *rapporto incrementale* di f relativo al punto x . Geometricamente, il rapporto incrementale in un punto ξ rappresenta il coefficiente angolare della retta che congiunge i due punti

$(x, f(x))$ e $(\xi, f(\xi))$ del grafico di f . La derivata di una funzione f in un punto x , quando esiste, rappresenta invece il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f nel punto x (come limite dei coefficienti angolari delle rette secanti il grafico nei due punti x e ξ arbitrariamente vicini). La retta tangente al grafico di f nel punto $(a, f(a))$ è data dall'equazione $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. Da un punto di vista fisico, se ad esempio la funzione s rappresenta lo spazio percorso da un punto materiale P posizionato sulla retta reale in funzione del tempo t , allora

$$\left\{ \tau \mapsto \frac{s(t + \tau) - s(t)}{\tau} \right\}$$

indica la velocità media del punto materiale sull'intervallo di tempo $[t, t + \tau]$ mentre il suo limite per $\tau \rightarrow 0$, ossia la derivata di s , esprime la velocità istantanea di P .

Veniamo ora all'importante relazione che sussiste tra le funzioni derivabili e le funzioni continue.

(2.2) Teorema *Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ e $x \in E$ di accumulazione per E . Supponiamo che f sia derivabile in x . Allora f è continua in x .*

Dimostrazione. Risulta

$$\lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow x} \left(f(x) + \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} (\xi - x) \right) = f(x),$$

da cui la tesi. ■

(2.3) Osservazione *La funzione valore assoluto $f(x) = |x|$ è continua in $x = 0$ ma non è derivabile in tale punto. Infatti, si ha*

$$\lim_{\xi \rightarrow 0^-} \frac{f(\xi) - f(0)}{\xi - 0} = \lim_{\xi \rightarrow 0^-} \frac{|\xi|}{\xi} = -1,$$

mentre

$$\lim_{\xi \rightarrow 0^+} \frac{f(\xi) - f(0)}{\xi - 0} = \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \frac{|\xi|}{\xi} = 1,$$

per cui f non è derivabile in 0.

Vediamo ora alcuni esempi di funzioni derivabili.

(2.4) Teorema *Sia $c \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = c$. Allora f è derivabile e*

$$\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = 0.$$

Dimostrazione. Si ha

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} = 0,$$

da cui la tesi. ■

(2.5) Teorema Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = x$. Allora f è derivabile e

$$\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = 1.$$

Dimostrazione. Si ha

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} = 1,$$

da cui la tesi. ■

(2.6) Teorema La funzione $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile e

$$\forall x \in \mathbb{R} : (\exp)'(x) = \exp x.$$

Dimostrazione. Si ha

$$\lim_{\xi \rightarrow x} \frac{\exp \xi - \exp x}{\xi - x} = \lim_{\xi \rightarrow x} \left(\exp x \frac{\exp(\xi - x) - 1}{\xi - x} \right) = \exp x,$$

da cui la tesi. ■

(2.7) Teorema La funzione $\log :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile e

$$\forall x \in]0, +\infty[: (\log)'(x) = \frac{1}{x}.$$

Dimostrazione. Risulta

$$\frac{\log \xi - \log x}{\xi - x} = \frac{1}{x} \frac{\log(\xi/x)}{(\xi/x) - 1},$$

da cui la tesi. ■

(2.8) Teorema Le funzioni $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sono derivabili e

$$\forall x \in \mathbb{R} : (\cos)'(x) = -\sin x,$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : (\sin)'(x) = \cos x .$$

Dimostrazione. Per le formule di addizione si ha

$$\begin{aligned} \frac{\cos \xi - \cos x}{\xi - x} &= \frac{\cos(x + (\xi - x)) - \cos x}{\xi - x} = \frac{\cos(\xi - x) - 1}{\xi - x} \cos x - \frac{\sin(\xi - x)}{\xi - x} \sin x , \\ \frac{\sin \xi - \sin x}{\xi - x} &= \frac{\sin(x + (\xi - x)) - \sin x}{\xi - x} = \frac{\cos(\xi - x) - 1}{\xi - x} \sin x + \frac{\sin(\xi - x)}{\xi - x} \cos x . \end{aligned}$$

Passando al limite per $\xi \rightarrow x$, si ottiene facilmente la tesi. ■

(2.9) Teorema Siano $E, F \subseteq \mathbb{R}$, siano $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : F \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni e sia $x \in f^{-1}(F)$ di accumulazione per $f^{-1}(F)$ con $f(x)$ di accumulazione per F . Supponiamo che f sia derivabile in x e che g sia derivabile in $f(x)$. Allora $(g \circ f)$ è derivabile in x e

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) f'(x) .$$

Dimostrazione. Per ogni $y \in F$ poniamo

$$\omega(y) = \begin{cases} \frac{g(y) - g(f(x))}{y - f(x)} - g'(f(x)) & \text{se } y \neq f(x) , \\ 0 & \text{se } y = f(x) . \end{cases}$$

Per definizione di derivata la funzione ω è continua in $f(x)$. Inoltre si ha

$$\forall y \in F : g(y) - g(f(x)) = g'(f(x))(y - f(x)) + \omega(y)(y - f(x)) .$$

Ne segue per ogni $\xi \in E \setminus \{x\}$

$$\frac{g(f(\xi)) - g(f(x))}{\xi - x} = g'(f(x)) \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} + \omega(f(\xi)) \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} .$$

Passando al limite per $\xi \rightarrow x$, si ottiene la tesi. ■

(2.10) Teorema Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni e $x \in E$ di accumulazione per E . Supponiamo che f e g siano derivabili in x . Allora le funzioni $(f + g)$, $(f - g)$ e (fg) sono derivabili in x e

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x) ,$$

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) ,$$

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Dimostrazione. La formula sulla derivata di una somma si ottiene passando al limite nell'espressione

$$\frac{(f+g)(\xi) - (f+g)(x)}{\xi - x} = \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} + \frac{g(\xi) - g(x)}{\xi - x}.$$

Partendo dalla formula

$$\begin{aligned} \frac{(fg)(\xi) - (fg)(x)}{\xi - x} &= \frac{f(\xi)g(\xi) - f(x)g(\xi) + f(x)g(\xi) - f(x)g(x)}{\xi - x} = \\ &= \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} g(\xi) + f(x) \frac{g(\xi) - g(x)}{\xi - x} \end{aligned}$$

e ricordando che g è continua in x , si deduce la derivabilità del prodotto. Poiché $f - g = f + (-1)g$, la differenza è riconducibile a prodotto e somma. ■

(2.11) Teorema Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni e $x \in E$ di accumulazione per E . Supponiamo che f e g siano derivabili in x e che $g(x) \neq 0$. Allora la funzione (f/g) è derivabile in x e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Dimostrazione. Partendo dalla formula

$$\frac{(1/g)(\xi) - (1/g)(x)}{\xi - x} = -\frac{g(\xi) - g(x)}{\xi - x} \frac{1}{g(\xi)g(x)}$$

e ricordando che g è continua in x , si deduce che $(1/g)$ è derivabile in x e

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Dal teorema precedente ne segue che

$$\left(f \frac{1}{g}\right)'(x) = f'(x) \frac{1}{g(x)} - f(x) \frac{g'(x)}{[g(x)]^2} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2},$$

da cui la tesi. ■

(2.12) Teorema Sia $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$ e sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = x^n$. Allora f è derivabile e

$$\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = nx^{n-1}.$$

Dimostrazione. Ragioniamo per induzione su n . Se $n = 1$, la proprietà è già stata provata. Supponiamo che il fatto sia vero per un certo $n \geq 1$. Poiché $x^{n+1} = x^n x$, si deduce che $\{x \mapsto x^{n+1}\}$ è derivabile con derivata

$$n x^{n-1} x + x^n = (n+1)x^n ,$$

da cui la tesi. ■

(2.13) Teorema Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = x^\alpha$. Allora f è derivabile e

$$\forall x \in]0, +\infty[: f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} .$$

Dimostrazione. Poiché

$$x^\alpha = \exp(\alpha \log x) ,$$

si deduce per composizione che f è derivabile e

$$f'(x) = \exp(\alpha \log x) \frac{\alpha}{x} = \alpha \exp(\alpha \log x) \exp(-\log x) = \alpha \exp((\alpha - 1) \log x) = \alpha x^{\alpha-1} ,$$

da cui la tesi. ■

(2.14) Teorema Sia $a \in]0, +\infty[$ e sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = a^x$. Allora f è derivabile e

$$\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = (\log a) a^x .$$

Dimostrazione. Poiché $a^x = \exp(x \log a)$, risulta

$$f'(x) = (\log a) \exp(x \log a) = (\log a) a^x ,$$

da cui la tesi. ■

(2.15) Teorema La funzione $\tan$ è derivabile e

$$\forall x \in \text{dom}(\tan) : (\tan)'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} .$$

Dimostrazione. Per il teorema sulla derivata di un quoziente risulta

$$(\tan)'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} ,$$

da cui la tesi. ■

(2.16) Teorema Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione polinomiale. Allora f è derivabile.

Dimostrazione. Si tratta di una conseguenza dei Teoremi (2.4) e (2.12) e della derivabilità di somma e prodotto. ■

(2.17) Teorema Sia f una funzione razionale. Allora f è derivabile.

Dimostrazione. Si tratta di una conseguenza del teorema precedente e della derivabilità di un quoziente. ■

(2.18) Teorema Siano I un intervallo in $\mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione strettamente monotona e $x \in I$. Supponiamo che f sia derivabile in x e che $f'(x) \neq 0$. Allora $f(x)$ è di accumulazione per $f(I)$ e $f^{-1} : f(I) \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile in $f(x)$ con

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Dimostrazione. La funzione f è continua in x . Allora per ogni intorno V di $f(x)$ esiste un intorno U di x tale che $f(U \cap I) \subseteq V$. Essendo f iniettiva, ne segue

$$f(U \cap (I \setminus \{x\})) \subseteq V \cap (f(I) \setminus \{f(x)\}).$$

Poiché x è di accumulazione per I , si deduce che $f(x)$ è di accumulazione per $f(I)$.

Per ogni $y \in f(I) \setminus \{f(x)\}$ risulta

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(x))}{y - f(x)} = \left(\frac{f(f^{-1}(y)) - f(x)}{f^{-1}(y) - x} \right)^{-1}.$$

Passando al limite per $y \rightarrow f(x)$ e tenendo presente la continuità di f^{-1} , si ha la tesi. ■

(2.19) Teorema Sia $n \in \mathbb{N}$, n dispari, $n \geq 3$, e sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \sqrt[n]{x}$. Allora f è derivabile in ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : f'(x) = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

Dimostrazione. La funzione f è derivabile in ogni $x \neq 0$ per il teorema precedente. Inoltre risulta $x = [f(x)]^n$. Derivando membro a membro, si ottiene per ogni $x \neq 0$

$$1 = n[f(x)]^{n-1} f'(x) ,$$

quindi

$$f'(x) = \frac{1}{n[f(x)]^{n-1}} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} ,$$

da cui la tesi. ■

(2.20) Teorema Sia $n \in \mathbb{N}$, n pari, $n \geq 2$, e sia $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \sqrt[n]{x}$. Allora f è derivabile in ogni $x \in]0, +\infty[$ e

$$\forall x \in]0, +\infty[: f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} .$$

Dimostrazione. Si ragiona come nel teorema precedente. ■

(2.21) Teorema Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = |x|$. Allora f è derivabile in ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : f'(x) = \frac{x}{|x|} .$$

Dimostrazione. Poiché $|x| = \sqrt{x^2}$, risulta per composizione

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2}} = \frac{x}{|x|} ,$$

da cui la tesi. ■

(2.22) Teorema Sia $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \log |x|$. Allora f è derivabile e

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : f'(x) = \frac{1}{x} .$$

Dimostrazione. Si ha per composizione

$$f'(x) = \frac{1}{|x|} \frac{x}{|x|} = \frac{1}{x} ,$$

da cui la tesi. ■

(2.23) Teorema La funzione $\arccos : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile in ogni $x \in]-1, 1[$ e

$$\forall x \in]-1, 1[: (\arccos)'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Dimostrazione. Posto $f(x) = \arccos x$, si ha che f è derivabile in $] -1, 1[$ per il Teorema (2.18). Inoltre per ogni $x \in [-1, 1]$ risulta $x = \cos(f(x))$. Derivando membro a membro, si ottiene per ogni $x \in]-1, 1[$

$$1 = -\sin(f(x)) f'(x),$$

da cui

$$f'(x) = -\frac{1}{\sin(f(x))}.$$

Tenuto conto che $f(x) \in]0, \pi[$, ne segue

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-[\cos(f(x))]^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

da cui la tesi. ■

(2.24) Teorema La funzione $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile in ogni $x \in]-1, 1[$ e

$$\forall x \in]-1, 1[: (\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Dimostrazione. Si ragiona in modo simile al teorema precedente. In questo caso, posto $f(x) = \arcsin x$, si ha $x = \sin(f(x))$, quindi

$$1 = \cos(f(x)) f'(x).$$

Tenuto conto che $f(x) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, ne segue

$$f'(x) = \frac{1}{\cos(f(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-[\sin(f(x))]^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

da cui la tesi. ■

(2.25) Teorema La funzione $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile e

$$\forall x \in \mathbb{R} : (\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Dimostrazione. Posto $f(x) = \arctan x$, si ha che f è derivabile per il Teorema (2.18). Inoltre da $x = \tan(f(x))$ segue

$$1 = (1 + [\tan(f(x))]^2) f'(x) = (1 + x^2) f'(x),$$

da cui la tesi. ■

3 Punti di non derivabilità

Come nel caso dei punti di discontinuità, vogliamo fare una sorta di classificazione dei punti di *non derivabilità* per una funzione $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Vediamo ora almeno tre diverse situazioni di non derivabilità per una funzione f in un punto: punti angolosi, flessi a tangente verticale e cuspidi. Per ogni $x \in E$ di accumulazione per E poniamo

$$f'_-(x) := \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad f'_+(x) := \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Diciamo che $f'_-(x)$ e $f'_+(x)$ sono rispettivamente la derivata sinistra e destra di f in x .

(3.1) Definizione Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione e $x \in E$ di accumulazione per E . Diciamo che x è un punto angoloso per f se esistono

$$-\infty < f'_-(x) < +\infty \quad \text{oppure} \quad -\infty < f'_+(x) < +\infty \quad \text{e} \quad f'_-(x) \neq f'_+(x).$$

(3.2) Esempio Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione modulo, $f(x) = |x|$. Allora 0 è un punto angoloso per f , poichè è immediato verificare che $-1 = f'_-(0) \neq f'_+(0) = 1$.

(3.3) Definizione Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione e $x \in E$ di accumulazione per E . Diciamo che x è un flesso a tangente verticale per f , se esiste

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -\infty$$

oppure

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = +\infty,$$

ossia se il rapporto incrementale non ha limite finito.

(3.4) Esempio Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Allora 0 è un punto di flesso a tangente verticale per f , essendo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = +\infty.$$

(3.5) Definizione Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione e $x \in E$ di accumulazione per E . Diciamo che x è un punto di cuspide per f se esistono

$$f'_-(x) = -\infty, \quad f'_+(x) = +\infty,$$

oppure

$$f'_-(x) = +\infty, \quad f'_+(x) = -\infty,$$

ossia se esistono entrambe infinite le derivate sinistre e destre e di segno opposto.

(3.6) Esempio Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \sqrt[3]{|x|}$. Allora 0 è un punto di cuspide per f , essendo immediato verificare che

$$f'_-(0) = -\infty, \quad f'_+(0) = +\infty.$$

Come si vede da queste definizioni, in tutti e tre i tipi di non derivabilità, le derivate destre e sinistre esistono, finite o infinite. Si può pensare anche a situazioni in cui le derivate sinistre e destre non esistono, come ad esempio la funzione $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ per $x \neq 0$ che vale 0 in $x = 0$. Evidentemente $f'_-(0)$ e $f'_+(0)$ non esistono.

4 Alcune proprietà delle funzioni derivabili

In questa sezione vedremo alcune classiche proprietà delle funzioni derivabili.

(4.1) Definizione Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione e $x \in E$. Diciamo che x è:

– un punto di massimo locale (o relativo) per f , se esiste un intorno U di x tale che

$$\forall \xi \in U \cap E : f(\xi) \leq f(x);$$

– un punto di minimo locale (o relativo) per f , se esiste un intorno U di x tale che

$$\forall \xi \in U \cap E : f(\xi) \geq f(x).$$

(4.2) Teorema Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione e $x \in \text{int}(E)$. Supponiamo che x sia un massimo o un minimo locale per f e che f sia derivabile in x . Allora $f'(x) = 0$.

Dimostrazione. Supponiamo che x sia un massimo locale per f . Sia U un intorno di x tale che

$$\forall \xi \in U \cap E : f(\xi) \leq f(x)$$

e sia $r > 0$ tale che $[x - r, x + r] \subseteq U \cap E$. Se poniamo $y_n = x + \frac{r}{n+1}$, evidentemente $y_n \rightarrow x$. Inoltre

$$\frac{f(y_n) - f(x)}{y_n - x} \leq 0.$$

Passando al limite per $n \rightarrow +\infty$, si deduce che $f'(x) \leq 0$. Ponendo $z_n = x - \frac{r}{n+1}$, si ottiene in modo simile $f'(x) \geq 0$, da cui $f'(x) = 0$. Se x è un minimo locale, il ragionamento è simile. ■

(4.3) Osservazione *Geometricamente il risultato precedente afferma che la retta tangente al grafico di una funzione f in un punto di massimo o di minimo locale deve necessariamente essere una retta parallela all'asse x , nel riferimento cartesiano xy .*

(4.4) Teorema (di Rolle) *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Supponiamo che $f(a) = f(b)$ e che f sia derivabile su $]a, b[$. Allora esiste $\xi \in]a, b[$ tale che $f'(\xi) = 0$.*

Dimostrazione. Per il Teorema di Weierstrass esistono $x_1, x_2 \in [a, b]$ tali che

$$\forall \xi \in [a, b] : f(x_1) \leq f(\xi) \leq f(x_2).$$

Se $x_1, x_2 \in \{a, b\}$, si ha $f(x_1) = f(x_2)$, per cui f è costante. In tal caso risulta $f'(\xi) = 0$ per ogni $\xi \in]a, b[$. Altrimenti si ha $x_1 \in]a, b[$ oppure $x_2 \in]a, b[$. Per il teorema precedente ne segue rispettivamente $f'(x_1) = 0$ oppure $f'(x_2) = 0$. ■

(4.5) Osservazione *Geometricamente il teorema di Rolle afferma che, per una funzione derivabile, se agli estremi dell'intervallo $[a, b]$ la funzione f assume valori uguali, allora necessariamente esiste all'interno dell'intervallo un punto a tangente orizzontale.*

(4.6) Teorema (di Cauchy) *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni continue. Supponiamo che f e g siano derivabili su $]a, b[$. Allora esiste $\xi \in]a, b[$ tale che*

$$g'(\xi)(f(b) - f(a)) = f'(\xi)(g(b) - g(a)).$$

Se poi $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in]a, b[$, risulta $g(a) \neq g(b)$, per cui

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Dimostrazione. Definiamo $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ponendo

$$\varphi(x) = g(x)(f(b) - f(a)) - f(x)(g(b) - g(a)).$$

Evidentemente φ è continua su $[a, b]$ e derivabile su $]a, b[$ con

$$\varphi'(x) = g'(x)(f(b) - f(a)) - f'(x)(g(b) - g(a)).$$

Inoltre si ha

$$\varphi(a) = g(a)f(b) - f(a)g(b), \quad \varphi(b) = -g(b)f(a) + f(b)g(a).$$

Per il Teorema di Rolle esiste $\xi \in]a, b[$ tale che $\varphi'(\xi) = 0$, ossia

$$g'(\xi)(f(b) - f(a)) = f'(\xi)(g(b) - g(a)).$$

Se poi $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in]a, b[$, dal Teorema di Rolle applicato a g si ha $g(a) \neq g(b)$. ■

Il risultato precedente ha la seguente importante implicazione.

(4.7) Teorema (di Lagrange o del valor medio) Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Supponiamo che f sia derivabile su $]a, b[$. Allora esiste $\xi \in]a, b[$ tale che

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

Dimostrazione. Si tratta del Teorema di Cauchy nel caso particolare in cui $g(x) = x$. ■

(4.8) Osservazione Geometricamente il teorema di Lagrange afferma che, per una funzione derivabile, deve necessariamente esistere all'interno dell'intervallo $[a, b]$ un punto in cui la retta tangente al grafico risulta parallela alla retta che congiunge i punti estremi $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

(4.9) Teorema Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione crescente (risp. decrescente) e $x \in E$ un punto di accumulazione per E . Supponiamo che f sia derivabile in x . Allora si ha $f'(x) \geq 0$ (risp. $f'(x) \leq 0$).

Dimostrazione. Supponiamo che f sia crescente, altrimenti il ragionamento è simile. Per ogni $\xi \in E \setminus \{x\}$ risulta

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \geq 0,$$

da cui, passando al limite per $\xi \rightarrow x$, si ottiene $f'(x) \geq 0$. ■

(4.10) Teorema Siano I un intervallo in $\mathbb{R}$ e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Supponiamo che f sia derivabile in ogni $x \in \text{int}(I)$. Valgono allora i seguenti fatti:

- (a) se $f'(x) = 0$ per ogni $x \in \text{int}(I)$, la funzione f è costante;
- (b) se $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in \text{int}(I)$, la funzione f è crescente;
- (c) se $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \text{int}(I)$, la funzione f è strettamente crescente;
- (d) se $f'(x) \leq 0$ per ogni $x \in \text{int}(I)$, la funzione f è decrescente;
- (e) se $f'(x) < 0$ per ogni $x \in \text{int}(I)$, la funzione f è strettamente decrescente.

Dimostrazione.

(a) Siano $x', x'' \in I$ con $x' < x''$. Per il Teorema di Lagrange applicato all'intervallo $[x', x'']$, esiste $\xi \in]x', x''[$ tale che

$$f(x'') - f(x') = f'(\xi)(x'' - x') = 0.$$

Ne segue $f(x') = f(x'')$, per cui f è costante.

(b) Siano di nuovo $x', x'' \in I$ con $x' < x''$. Ragionando come in precedenza, si trova

$$f(x'') - f(x') = f'(\xi)(x'' - x') \geq 0,$$

per cui f è crescente. Le affermazioni (c), (d) ed (e) si dimostrano in modo simile. ■

(4.11) Osservazione Per la validità dell'affermazione (a) è indispensabile che la funzione f sia definita su un intervallo, come si vede dal seguente esempio: sia $f : [0, 1] \cup [2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo $f(x) = 1$ su $[0, 1]$ e $f(x) = -1$ su $[2, 3]$. Allora f è derivabile, $f'(x) = 0$ per ogni $x \in]0, 1[\cup]2, 3[$ ma f non è costante.

(4.12) Osservazione L'affermazione (c) costituisce solo una condizione sufficiente affinché la funzione sia strettamente crescente. Infatti, ad esempio $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^3$ è strettamente crescente, anche se $f'(0) = 0$.

Siano I un intervallo in $\mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile e $x \in I$. Si verifica facilmente che, se f' è continua in x e $f'(x) > 0$, allora esiste un intorno U di x tale che f è strettamente crescente su $U \cap I$. L'ipotesi di continuità di f' è necessaria, come si vede dal seguente esempio: si consideri $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tale che f' non è continua in 0, definita da

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Allora f è derivabile con $f'(0) = 1$, ma f non è crescente in nessun intorno di 0.

5 I teoremi di L'Hôpital

Vediamo ora alcuni utili strumenti per il calcolo dei limiti di quozienti, nel caso delle forme indeterminate $0/0$ e $?\infty$.

(5.1) Teorema (Forma 0/0) Siano $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ e siano $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni derivabili tali che

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0, \quad \forall x \in]a, b[: g'(x) \neq 0.$$

Allora si ha $g(x) \neq 0$ per ogni $x \in]a, b[$ e

$$\liminf_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \leq \liminf_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

In particolare, se esiste

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

esiste anche

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

e risulta

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dimostrazione. Trattiamo soltanto il caso $a \in \mathbb{R}$. Definiamo $F, G : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ ponendo

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x > a, \\ 0 & \text{se } x = a, \end{cases}$$

$$G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x > a, \\ 0 & \text{se } x = a. \end{cases}$$

Evidentemente F e G sono continue su $[a, b[$ e derivabili su $]a, b[$ con $F'(x) = f'(x)$ e $G'(x) = g'(x)$. Per ogni $x \in]a, b[$, $g(x) = G(x)$ non può annullarsi, altrimenti dal Teorema di Rolle seguirebbe $g'(\xi) = G'(\xi) = 0$ per qualche $\xi \in]a, x[$. Se

$$\limsup_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty,$$

è ovvio che

$$\limsup_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Altrimenti sia $M > \limsup_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Esiste un intorno U di a tale che

$$\forall \xi \in U \cap]a, b[: \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \leq M.$$

Possiamo supporre che U sia un intervallo. Per ogni $x \in U \cap]a, b[$ applichiamo il Teorema di Cauchy a F e G sull'intervallo $[a, x]$. Sia $\xi \in]a, x[$ tale che

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Tenuto conto che $\xi \in U$, risulta

$$\forall x \in U \cap]a, b[: \frac{f(x)}{g(x)} \leq M.$$

Ne segue $M \geq \limsup_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$, quindi

$$\limsup_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

per l'arbitrarietà di M . Il ragionamento per il minimo limite è simile. ■

(5.2) Osservazione Si considerino $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definite da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

$$g(x) = x.$$

Si verifica che f e g sono derivabili e $f(x) \rightarrow 0$, $g(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0$. Osserviamo anche che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

ma

$$\limsup_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \limsup_{x \rightarrow 0} \left\{ 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right\} = 1, \quad \liminf_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -1.$$

Pertanto il teorema di L'Hôpital fornisce soltanto una condizione sufficiente per l'esistenza del limite del quoziente f/g .

(5.3) Esempio Siano $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile e $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ tali che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \ell.$$

Allora, come conseguenza del teorema di L'Hôpital, si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell.$$

(5.4) Teorema (Forma $\frac{?}{\infty}$) Siano $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ e siano $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni derivabili tali che

$$\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = +\infty, \\ \forall x \in]a, b[: g'(x) \neq 0.$$

Allora

$$\liminf_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \leq \liminf_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

In particolare, se esiste

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

esiste anche $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ e risulta

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

(5.5) Osservazione Naturalmente i risultati precedenti ammettono una semplice variante nel caso in cui sia del tipo $0/0$ o $\frac{?}{\infty}$ il limite nell'estremo destro dell'intervallo $]a, b[$, ossia quando

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \lim_{x \rightarrow b} g(x) = 0$$

oppure

$$\lim_{x \rightarrow b} |g(x)| = +\infty.$$

(5.6) Corollario Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $x \in [a, b]$ e $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Supponiamo che f sia derivabile in ogni punto di $[a, b] \setminus \{x\}$ e che esista finito

$$\lim_{\xi \rightarrow x} f'(\xi).$$

Allora f è derivabile in x e

$$f'(x) = \lim_{\xi \rightarrow x} f'(\xi).$$

Dimostrazione. Si calcolino i limiti

$$\lim_{\xi \rightarrow x^+} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x},$$

$$\lim_{\xi \rightarrow x^-} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}$$

utilizzando i Teoremi precedenti. ■

6 La formula di Taylor

La nozione di derivata di ordine superiore al primo può essere introdotta con una definizione ricorsiva. Conveniamo che *derivabile una volta* sia sinonimo di derivabile.

(6.1) Definizione Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione, $x \in E$ un punto di accumulazione per E e $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq 2$. Diciamo che f è derivabile k -volte in x , se

(a) f è derivabile;

(b) la funzione $f' : E \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile $(k - 1)$ -volte in x .

Diciamo che f è derivabile k -volte, se è derivabile k -volte in ogni $x \in E$. Infine, diciamo che f è indefinitamente derivabile, se f è derivabile k -volte per ogni $k \geq 1$. Poniamo ricorsivamente

$$D^k f(x) = f^{(k)}(x) := D^{k-1}(Df)(x).$$

Poniamo anche $D^0 f(x) = f^{(0)}(x) := f(x)$.

(6.2) Esempio Si verifica che la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right) & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases}$$

è indefinitamente derivabile.

(6.3) Definizione Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione, $x \in [a, b]$ e $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$. Supponiamo che f sia derivabile n -volte in x . La funzione polinomiale $P_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$P_n(\xi) := \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) (\xi - x)^k$$

si chiama polinomio di Taylor di f di ordine n relativo al punto x . La funzione $R_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$R_n(\xi) := f(\xi) - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) (\xi - x)^k$$

si chiama resto di Taylor di f di ordine n relativo al punto x . Evidentemente risulta $f = P_n + R_n$.

(6.4) Proposizione Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $x \in [a, b]$, $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$ e $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile n -volte in x . Sia P_n il polinomio di Taylor di f di ordine n relativo al punto x . Allora

$$\forall k \in \mathbb{N} : 0 \leq k \leq n \implies P_n^{(k)}(x) = f^{(k)}(x).$$

Dimostrazione. Data una qualunque funzione polinomiale della forma

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^n a_j (\xi - x)^j,$$

dimostriamo che per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$P^{(k)}(x) = \begin{cases} k! a_k & \text{se } k \leq n, \\ 0 & \text{se } k \geq n + 1. \end{cases}$$

Ragioniamo per induzione su k . Ovviamente $P^{(0)}(x) = P(x) = a_0$. Supponiamo ora che la proprietà sia vera per un certo k . Risulta

$$P'(\xi) = \sum_{j=1}^n j a_j (\xi - x)^{j-1} = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) a_{j+1} (\xi - x)^j.$$

Per l'ipotesi induttiva ne segue

$$\begin{aligned} P^{(k+1)}(x) &= D^k(P')(x) = \begin{cases} k!(k+1) a_{k+1} & \text{se } k \leq n-1 \\ 0 & \text{se } k \geq n \end{cases} = \\ &= \begin{cases} (k+1)! a_{k+1} & \text{se } k+1 \leq n \\ 0 & \text{se } k+1 \geq n+1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Nel nostro caso si ha dunque

$$P_n^{(k)}(x) = k! \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) = f^{(k)}(x)$$

se $0 \leq k \leq n$. ■

(6.5) Osservazione Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione, $x \in [a, b]$ e $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$. Supponiamo che f sia derivabile n -volte in x . Allora il polinomio di Taylor di f di ordine n in x è l'unico polinomio P di grado al più n tale che $P^{(k)}(x) = f^{(k)}(x)$ se $0 \leq k \leq n$.

(6.6) Teorema (Formula di Taylor col resto di Peano) Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $x \in [a, b]$, $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$ e $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile n -volte in x . Sia R_n il resto di f di ordine n relativo al punto x . Allora

$$\lim_{\xi \rightarrow x} \frac{R_n(\xi)}{(\xi - x)^n} = 0.$$

Dimostrazione. Ragioniamo per induzione su n . Per $n = 1$ si ha

$$\lim_{\xi \rightarrow x} \frac{R_1(\xi)}{\xi - x} = \lim_{\xi \rightarrow x} \frac{f(\xi) - f(x) - f'(x)(\xi - x)}{\xi - x} = \lim_{\xi \rightarrow x} \left(\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} - f'(x) \right) = 0.$$

Supponiamo ora che l'affermazione sia vera per un certo $n \geq 1$ e consideriamo f derivabile $(n+1)$ -volte in x . Poniamo $g = f'$, che è quindi derivabile n -volte in x . Per l'ipotesi induttiva applicata a g risulta

$$\lim_{\xi \rightarrow x} \frac{g(\xi) - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} g^{(k)}(x)(\xi - x)^k}{(\xi - x)^n} = 0.$$

D'altronde dal Teorema di L'Hôpital per la forma $0/0$ si deduce che

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow x} \frac{R_{n+1}(\xi)}{(\xi - x)^{n+1}} &= \lim_{\xi \rightarrow x} \frac{f(\xi) - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x)(\xi - x)^k}{(\xi - x)^{n+1}} = \\ &= \lim_{\xi \rightarrow x} \frac{f'(\xi) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(k-1)!} f^{(k)}(x)(\xi - x)^{k-1}}{(n+1)(\xi - x)^n} = \\ &= \lim_{\xi \rightarrow x} \frac{f'(\xi) - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k+1)}(x)(\xi - x)^k}{(n+1)(\xi - x)^n} = \\ &= \frac{1}{n+1} \lim_{\xi \rightarrow x} \frac{g(\xi) - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} g^{(k)}(x)(\xi - x)^k}{(\xi - x)^n} = 0. \end{aligned}$$

Pertanto l'affermazione è vera per $n+1$. ■

(6.7) Osservazione Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $x \in [a, b]$, $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$ e $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile n -volte in x . Se si definisce $\omega : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ponendo

$$\omega(\xi) = \begin{cases} \frac{R_n(\xi)}{(\xi - x)^n} & \text{se } \xi \neq x, \\ 0 & \text{se } \xi = x, \end{cases}$$

risulta che ω è continua in x con $\omega(x) = 0$ e per ogni $\xi \in [a, b]$ si ha

$$f(\xi) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) (\xi - x)^k + \omega(\xi) (\xi - x)^n.$$

(6.8) Teorema (Formula di Taylor col resto di Lagrange) Siano $x, b \in \mathbb{R}$, $f : [x, b[\rightarrow \mathbb{R}$ una funzione e $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che f sia derivabile n -volte su $[x, b[$ con derivata n -esima continua e derivabile $(n+1)$ -volte su $]x, b[$.

Allora per ogni $\xi \in]x, b[$ esiste $t \in]x, \xi[$ tale che

$$f(\xi) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) (\xi - x)^k + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) (\xi - x)^{n+1}.$$

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

Naturalmente un enunciato simile è valido su un intervallo della forma $]a, x]$.

(6.9) Esempio Con qualche semplice calcolo di derivate si determinano facilmente i primi termini degli sviluppi in serie di McLaurin (ossia sviluppi di Taylor centrati nell'origine) delle principali funzioni elementari:

1. $\exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4);$
2. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^8);$
3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^7);$
4. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4!} + o(x^4);$
5. $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6).$

Questi ed altri sviluppi di funzioni elementari possono essere particolarmente utili anche per il calcolo di limiti di forme indeterminate. Si provi anche a rappresentare questi polinomi nell'intorno dell'origine, confrontando i risultati con i grafici delle rispettive funzioni.

Vediamo ora una utile conseguenza dei risultati precedenti.

(6.10) Teorema Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ una funzione, $x \in]a, b[$ e $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$. Supponiamo che f sia derivabile n -volte in x e che

$$f'(x) = \dots = f^{(n-1)}(x) = 0,$$

$$f^{(n)}(x) \neq 0.$$

Allora esiste un intorno U di x in cui la differenza $(f(\xi) - f(x))$ assume lo stesso segno di $f^{(n)}(x)(\xi - x)^n$. In particolare valgono i seguenti fatti:

- (a) se n è pari e $f^{(n)}(x) > 0$, il punto x è un minimo locale per f ;
 (b) se n è pari e $f^{(n)}(x) < 0$, il punto x è un massimo locale per f ;
 (c) se n è dispari, il punto x non è né un massimo né un minimo locale per f .

Dimostrazione. Per la Formula di Taylor col resto di Peano si ha

$$f(\xi) = f(x) + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x)(\xi - x)^n + \omega(\xi)(\xi - x)^n$$

con $\omega :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continua in x ed $\omega(x) = 0$. Sia U un intorno di x tale che

$$\forall \xi \in U : |\omega(\xi)| < \frac{1}{2n!} |f^{(n)}(x)|.$$

Poiché

$$f(\xi) - f(x) = \left(\frac{1}{n!} f^{(n)}(x) + \omega(\xi) \right) (\xi - x)^n,$$

ne segue la tesi. ■

7 Funzioni convesse

(7.1) Definizione Siano I un intervallo in $\mathbb{R}$ e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Diciamo che f è convessa, se per ogni $x_0, x_1 \in I$ e per ogni $t \in]0, 1[$ si ha

$$f((1-t)x_0 + tx_1) \leq (1-t)f(x_0) + tf(x_1).$$

Diciamo che f è concava, se $-f$ è convessa.

La condizione di convessità può essere scritta nelle forme equivalenti

$$f(x_0 + t(x_1 - x_0)) \leq f(x_0) + t(f(x_1) - f(x_0)),$$

$$f(x_1 + (1-t)(x_0 - x_1)) \leq f(x_1) + (1-t)(f(x_0) - f(x_1)).$$

(7.2) Osservazione Siano I un intervallo in $\mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione convessa e $x \in I$. Se f è derivabile in x , allora

$$\forall \xi \in I : f(\xi) \geq f(x) + f'(x)(\xi - x).$$

Infatti, dalla definizione di convessità, risulta immediatamente che

$$\frac{f(x + t(\xi - x)) - f(x)}{t(\xi - x)} \leq \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}$$

per ogni $t \in]0, 1[$, da cui segue la proprietà desiderata passando al limite per $t \rightarrow 0^+$. Da un punto di vista geometrico la proprietà appena enunciata si commenta dicendo che per una funzione convessa e derivabile, il grafico della funzione rimane sempre al di sopra della retta tangente in ogni punto. Naturalmente, per una funzione concava e derivabile, il grafico della funzione rimane sempre al di sotto della retta tangente.

Vediamo ora che le funzioni convesse sono continue all'interno del dominio.

(7.3) Teorema Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione convessa. Allora $f|_{]a, b[}$ è continua.

Dimostrazione. Fissato $x_0 \in]a, b[$, consideriamo la retta r passante per i punti $(x_0, f(x_0))$ e $(a, f(a))$ e la retta s passante per i punti $(x_0, f(x_0))$ e $(b, f(b))$, aventi rispettivamente equazioni

$$y = f(x_0) + \frac{f(a) - f(x_0)}{a - x_0}(x - x_0), \quad y = f(x_0) + \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0}(x - x_0).$$

Allora, per definizione di funzione convessa, si deve avere

$$f(x_0) + \frac{f(a) - f(x_0)}{a - x_0}(x - x_0) \leq f(x) \leq f(x_0) + \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0}(x - x_0),$$

per ogni $x \in [x_0, b]$. Passando al limite per $x \rightarrow x_0^+$ si ottiene la continuità di f a destra in x_0 . Ragionando in modo simile si ottiene

$$f(x_0) + \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0}(x - x_0) \leq f(x) \leq f(x_0) + \frac{f(a) - f(x_0)}{a - x_0}(x - x_0),$$

per ogni $x \in [a, x_0]$, da cui segue anche la continuità di f a sinistra in x_0 . ■

(7.4) Osservazione Il teorema precedente diventa falso senza l'ipotesi che l'intervallo I sia aperto in $\mathbb{R}$, come si evince dal seguente semplice esempio: sia f la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ x^2 & \text{se } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Allora f è convessa ma discontinua sull'intervallo chiuso $[0, 1]$.

(7.5) Teorema Siano I un intervallo in $\mathbb{R}$ e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Supponiamo che f sia derivabile su $\text{int}(I)$. Allora f è convessa se e solo se $f' : \text{int}(I) \rightarrow \mathbb{R}$ è crescente.

Dimostrazione. Supponiamo che f sia convessa. Siano $x_0, x_1 \in \text{int}(I)$ con $x_0 < x_1$. Per ogni $s, t \in]0, 1[$ risulta

$$f(x_0 + s(x_1 - x_0)) - f(x_0) \leq s(f(x_1) - f(x_0)),$$

$$f(x_1 + (1-t)(x_0 - x_1)) - f(x_1) \leq (1-t)(f(x_0) - f(x_1)),$$

da cui

$$\frac{f(x_0 + s(x_1 - x_0)) - f(x_0)}{x_0 + s(x_1 - x_0) - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq \frac{f(x_1 + (1-t)(x_0 - x_1)) - f(x_1)}{x_1 + (1-t)(x_0 - x_1) - x_1}.$$

Passando al limite per $s \rightarrow 0$ e $t \rightarrow 1$, si ottiene

$$f'(x_0) \leq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq f'(x_1).$$

Supponiamo ora che f' sia crescente. Siano $x_0, x_1 \in I$ e sia $t \in]0, 1[$. Supponiamo ad esempio $x_0 < x_1$. Applicando il Teorema di Lagrange agli intervalli $[x_0, (1-t)x_0 + tx_1]$ e $[(1-t)x_0 + tx_1, x_1]$, si ottiene

$$f((1-t)x_0 + tx_1) - f(x_0) = f'(\xi_0)t(x_1 - x_0),$$

$$f(x_1) - f((1-t)x_0 + tx_1) = f'(\xi_1)(1-t)(x_1 - x_0),$$

con $x_0 < \xi_0 < (1-t)x_0 + tx_1 < \xi_1 < x_1$. Poiché $f'(\xi_0) \leq f'(\xi_1)$, ne segue

$$(1-t) \left(f((1-t)x_0 + tx_1) - f(x_0) \right) \leq t \left(f(x_1) - f((1-t)x_0 + tx_1) \right),$$

ossia

$$f((1-t)x_0 + tx_1) \leq (1-t)f(x_0) + tf(x_1),$$

da cui la tesi. ■

(7.6) Teorema Siano I un intervallo in $\mathbb{R}$ e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Supponiamo che f sia derivabile due volte su $\text{int}(I)$. Allora f è convessa se e solo se $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in \text{int}(I)$.

Dimostrazione. Dai Teoremi (4.9) e (4.10) si deduce che $f' : \text{int}(I) \rightarrow \mathbb{R}$ è crescente se e solo se $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in \text{int}(I)$. La tesi segue allora dal teorema precedente. ■

(7.7) Esempio Sia $\alpha \in [1, +\infty[$ e sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = |x|^\alpha$. Allora f è convessa. Si verifica invece che la funzione $\log :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ è concava. Mediante questa proprietà si dimostra la seguente notevole disuguaglianza: siano $\alpha, \beta \in]1, +\infty[$ tali che $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. Allora

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad |xy| \leq \frac{1}{\alpha} |x|^\alpha + \frac{1}{\beta} |y|^\beta.$$

Inoltre, se $\alpha, \beta \in]0, +\infty[$ sono tali che $\alpha < \beta$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $M > 0$ tale che

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad |x|^\alpha \leq \varepsilon |x|^\beta + M.$$

8 Esercizi

(8.1) Esercizio Determinare le derivate delle seguenti funzioni applicando le regole di derivazione:

$$\begin{array}{lll}
 f(x) = 10x^7 - 3x^2 + 1, & f(x) = \frac{x^3-2x}{x^2+1}, & f(x) = \frac{1}{\sin(x)}, \\
 f(x) = \sqrt{x}, & f(x) = \ln\left(\sqrt[3]{\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}}\right), & f(x) = e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}, \\
 f(x) = 2^{\frac{x}{\ln x}}, & f(x) = x^x, & f(x) = \arctan(x + 3^x), \\
 f(x) = \ln(\ln x), & f(x) = (x^2 + 2)^{\sin x}, & f(x) = e^{e^x}, \\
 f(x) = \frac{1+e^x}{1-e^x}, & f(x) = \sin^2 x \sin(x^2), & f(x) = \sin^2(\cos 3x), \\
 f(x) = \ln(\tan x), & f(x) = \log_3(\log_2(\log_5(x))), & f(x) = 2^{\sin x}, \\
 f(x) = x^{\frac{1}{\ln x}}, & f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x, & f(x) = (\sin x)^{\cos x}.
 \end{array}$$

(8.2) Esercizio Sia $f(x)$ la funzione così definita:

$$f(x) = \begin{cases} (1 - \cos x) \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

1. Stabilire se la funzione è continua in $x = 0$;
2. stabilire se la funzione è derivabile in $x = 0$;
3. stabilire se la funzione deriata è continua nell'insieme dei numeri reali.

(8.3) Esercizio Verifica se le seguenti funzioni, nell'intervallo chiuso a fianco indicato, soddisfano le ipotesi del Teorema di Lagrange e, in caso affermativo, calcolare le ascisse dei punti che verificano il suddetto teorema:

1. $y = x - x^3$ $[-2; 1]$;
2. $y = x^2$ $[3; 4]$;
3. $y = \frac{x^2-x-4}{x-1}$ $[-1; 0]$;
4. $y = x|2x - 1|$ $[0; 2]$;

(8.4) Esercizio Si determinino gli insiemi nei quali le seguenti funzioni sono crescenti o decrescenti:

1. $y = x^2 - 5x + 6$;

2. $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 2$;

3. $y = \frac{3x+1}{x+1}$;

4. $y = \sqrt{x} - 2\sqrt{x+2}$;

(8.5) Esercizio Scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al grafico della curva $y = f(x)$ nel punto $(x_0; f(x_0))$:

1. $f(x) = \cos x$, $x_0 = \pi/3$;

2. $f(x) = \sin(\log x)$, $x_0 = e^{\pi/3}$;

3. $f(x) = (x \log |x|)^3$, $x_0 = -1$;

4. $f(x) = e^{-|x|}$, $x_0 = -1$;

(8.6) Esercizio Determinare per ciascuna delle seguenti funzioni i punti di massimo o minimo relativo:

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 4$ per $x \in [0; 2]$;

2. $f(x) = 3x + 1/x$, per $x \in (0; 3]$;

3. $f(x) = x^{2/3}(x - 5)$, per $x \in [0; 4]$;

4. $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$, per $x \in [-4; 3]$.

(8.7) Esercizio Utilizzando i teoremi sulle derivate dimostrare che:

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \pi/2 & x > 0 \\ -\pi/2 & x < 0 \end{cases}$$

(8.8) Esercizio Utilizzare il teorema di Lagrange per dimostrare la seguente disuguaglianza:

$$e^x \geq x + 1.$$

(8.9) Esercizio Stabilire per quali valori di a la seguente funzione è continua e derivabile in $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} (\sin(|x|^a) \arctan(1/x)) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

(8.10) Esercizio Calcolare la $f'(0)$ in base alla definizione. Calcolare poi $f'(x)$ per $x \neq 0$, e stabilire se la derivata prima è continua in $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{(-1/x^2)} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

(8.11) Esercizio Calcolare la derivata n -esima di:

1. $f(x) = xe^x$;
2. $f(x) = x^n \sqrt{x}$;
3. $f(x) = \sin(2x)$.

(8.12) Esercizio Verificare che la funzione $f(x) = \sin(e^x)$ soddisfa l'equazione

$$f''(x) - f'(x) + e^{2x} f(x) = 0.$$

(8.13) Esercizio Scrivere l'equazione della tangente in $x_0 = 0$ al grafico della funzione $f(x)$, sapendo che tale funzione è continua e derivabile con continuità e che

1. $f(0) = 0$;
2. $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) \frac{x+2}{x-3} = 4$.

(8.14) Esercizio Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione convessa. Mostrare che in ogni punto $x_0 \in (a, b)$ f ammette derivata destra e derivata sinistra.

(8.15) Esercizio Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Supponiamo che esista $x_0 \in (a, b)$ tale che

$$f(x_0) > \max \left\{ \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \right\}.$$

Mostrare che f ammette massimo su (a, b) .

(8.16) Esercizio Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Supponiamo che esista $x_0 \in (a, b)$ tale che

$$f(x_0) < \min \left\{ \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \right\}.$$

Mostrare che f ammette minimo su (a, b) .

(8.17) Esercizio Sia $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Supponiamo che esista $x_0 > 0$

$$f(x_0) > \max \left\{ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(0) \right\}.$$

Mostrare che f ammette massimo su $[0, +\infty)$.

(8.18) Soluzione esercizio (8.2). Si ha che

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0),$$

e quindi la funzione è continua in $x = 0$. La derivata prima di f è uguale a

$$\sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2} (1 - \cos(x)) \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

quando $x \neq 0$. Per vedere se la funzione è derivabile in $x = 0$ usiamo la definizione di derivata e cioè calcoliamo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos h) \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = 0.$$

Quindi $f'(0) = 0$. Si vede facilmente che

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$$

non esiste e pertanto f' non è continua in $x = 0$.

(8.19) Soluzione esercizio (8.7). Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

Si vede facilmente che $f'(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pertanto f è una funzione costante in $(-\infty, 0)$ e in $(0, +\infty)$. Per calcolare il valore della costante, basta ad esempio valutare $f(-1)$ e $f(1)$. Si ha che

$$f(-1) = -2 \arctan(1) = -2 \cdot \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$$

e

$$f(1) = 2 \arctan(1) = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

(8.20) Esercizio Utilizzare la regola di de l'Hopital per risolvere i seguenti limiti:

1. $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} (\tan x)^{\cos(x)} ;$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x} ;$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 (\arctan(x+1) - \arctan(x)) ;$
4. $\lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log(x)} \right) ;$
5. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - x^{x \log(x^2)}}{(e^{2x} - 1)(\log x)^2} ;$
6. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - x - x^3/6}{2x^2 + 2x + 1 - e^{2x}}$

(8.21) Esercizio Scrivere la formula di McLaurin arrestata al quarto ordine con resto in forma di Peano di:

$$f(x) = (\sin x)^2$$

(8.22) Esercizio Scrivere la formula di McLaurin arrestata al terzo ordine con resto in forma di Peano di:

$$f(x) = e^{\sin x}$$

(8.23) Esercizio Risolvere i seguenti limiti utilizzando gli sviluppi di Taylor:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x) - x}{x^2} ;$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{1/x} ;$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x} \right)^{3\sqrt{(x^2+1)} + \log x} ;$
4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1+x) - \sin x + x^2/2}{x^3}$

(8.24) Esercizio Discutere al variare del parametro a il seguente limite (utilizzare gli sviluppi di Taylor):

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1+x+\sin^2 x) - 2(1-\cos(\sqrt{x}))}{x^a}$$

(8.25) Esercizio Discutere al variare del parametro a il seguente limite (utilizzare gli sviluppi di Taylor):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \log(1+x) - 6x + 3x^2 - 2x^3}{x^4}$$

(8.26) Esercizio Sia f una funzione di classe C^3 tale che:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{f(x)}{x} \right)^{1/x} = e^2$$

calcolare $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$.

(8.27) Esercizio Studiare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = \sqrt{e^x - 1 - x}$$

(8.28) Esercizio Tracciare il grafico delle seguenti funzioni

1. $f(x) = 2 \arctan \left(\sqrt{1+x^2} - x \right) + \arctan x;$

2. $f(x) = x e^{\frac{3}{\ln x}};$

3. $f(x) = (x-1)e^x - (x+1)e^{-x};$

4. $f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{se } x < 0, \\ -x^2 + 1, & \text{se } x \geq 0; \end{cases}$

5. $f(x) = \arcsin \left(\frac{\sqrt{2}x^2}{2\sqrt{x^4-2x^2+2}} \right);$

6. $f(x) = \arctan \left(\left| \frac{x-2}{x+2} \right|^{\frac{1}{2}} \right);$

7. $f(x) = \frac{e^{-|x+2|} - \frac{3x}{4} - \frac{5}{2}}{x+2};$

8. $f(x) = \frac{x^2-1}{\ln|x|}.$

(8.29) Esercizio Data la funzione

$$f(x) = \arctan \left(\ln \left(e^x - \sqrt{|x|} \right) \right),$$

1. determinare il campo di esistenza di f ;

2. studiare il grafico delle funzioni

$$g(x) = e^x - \sqrt{|x|}$$

e

$$h(x) = \ln \left(e^x - \sqrt{|x|} \right);$$

3. trovare i punti di massimo e minimo locale;
4. disegnare il grafico di f ;
5. qual è l'ordine di infinitesimo di f per $x \rightarrow 0^+$?

(8.30) Esercizio Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{2x^2 - 2x + 1}{(x + 1)^2}.$$

1. Tracciare il grafico di f .
2. Scrivere le equazioni delle rette tangenti al grafico di f nei punti A di ascissa $x = 0$ e B di ascissa $x = 4$.
3. Determinare le coordinate del punto C di intersezione delle due tangenti e calcolare l'area del triangolo trovato.
4. Indicati con x_1 e x_2 le ascisse dei punti di intersezione del grafico di f con la retta $y = h$, calcolare

$$x_1 + x_2, \quad x_1 x_2, \quad \frac{1}{x_1 + 1} + \frac{1}{x_2 + 1}.$$

5. Una generica retta r uscente dal punto A interseca il grafico di f in due punti P_1 e P_2 . Trovare l'equazione del luogo geometrico descritto dal punto medio P del segmento $P_1 P_2$ al variare di r e disegnare tale curva.

Capitolo 4

Calcolo integrale

1 Breve premessa

Le radici del calcolo integrale sono da ricercarsi in un metodo per il calcolo di aree e di volumi, detto metodo di esaustione, usato da Archimede nel III secolo a.C. Il procedimento è simile a quello descritto all'inizio del capitolo sui limiti, dove abbiamo riempito il cerchio (appunto 'esaurito') con una successione di poligoni regolari inscritti di n lati, facendo poi tendere n all'infinito. Più in generale, per calcolare l'area di una regione piana delimitata da una curva si considera una successione di rettangoli inscritti e una successione di rettangoli circoscritti, facendo poi tendere a zero lunghezza dei lati di base. Supponiamo ad esempio di voler calcolare l'area S sottesa dalla funzione $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$. Fissato $n \geq 2$, dividiamo allora l'intervallo $[0, 1]$ in n parti di uguale lunghezza $[x_{j-1}, x_j]$, con $x_j = j/n$, per $j = 0, \dots, n$. In corrispondenza di ogni j , si possono considerare i rettangoli inscritti (rispettivamente circoscritti) nella regione piana di base $[x_{j-1}, x_j]$ ed altezza x_{j-1}^2 (rispettivamente x_j^2). Tenuto conto della formula elementare della somma dei quadrati dei primi n numeri naturali, risulta che l'area totale dei rettangoli inscritti vale

$$I_n = \sum_{j=1}^n x_{j-1}^2 (x_j - x_{j-1}) = \frac{1}{n^3} \sum_{j=0}^{n-1} j^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3},$$

mentre l'area totale dei rettangoli circoscritti vale

$$C_n = \sum_{j=1}^n x_j^2 (x_j - x_{j-1}) = \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^n j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}.$$

Per costruzione, l'area S della regione piana verifica $I_n < S < C_n$, per ogni $n \geq 1$ ed è inoltre evidente che, all'aumentare di n , ovvero al raffinarsi della suddivisione dell'intervallo unitario, I_n (rispettivamente C_n) fornisce una approssimazione per difetto (rispettivamente per eccesso)

di errore sempre più piccolo. Poichè si ha

$$\lim_n I_n = \lim_n C_n = \frac{1}{3},$$

dal teorema del confronto dei limiti si ottiene subito $S = \frac{1}{3}$. L'area della figura piana è stata quindi 'esaurita' per difetto con i rettangoli inscritti e per eccesso con i rettangoli circoscritti. Nelle sezioni successive cercheremo di formalizzare questo semplice esempio definendo il concetto di integrale definito per alcune classi di funzioni limitate.

Il procedimento che seguiremo nello studio dell'integrale secondo Riemann per funzioni limitate su intervalli limitati può essere così schematizzato:

1. definizione di somme inferiori e superiori;
2. proprietà di ordinamento delle somme inferiori e superiori rispetto alla partizione;
3. definizione di integrale inferiore e superiore;
4. definizione di funzione integrabile;
5. criterio di integrabilità in termini delle somme inferiori e superiori;
6. individuazione di alcune classi notevoli di funzioni integrabili.

Estenderemo infine la nozione di integrabilità secondo Riemann alle funzioni illimitate o definite su intervalli illimitati.

2 Integrale inferiore superiore

(2.1) Definizione Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata e siano $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Denotiamo con S l'insieme $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ e poniamo

$$\begin{aligned}\Sigma'(f, S) &:= \sum_{j=1}^n \left(\inf_{[x_{j-1}, x_j]} f \right) (x_j - x_{j-1}), \\ \Sigma''(f, S) &:= \sum_{j=1}^n \left(\sup_{[x_{j-1}, x_j]} f \right) (x_j - x_{j-1}).\end{aligned}$$

Diciamo che S è una suddivisione di $[a, b]$ e chiamiamo $\Sigma'(f, S)$ e $\Sigma''(f, S)$ somma inferiore e somma superiore associate alla funzione f ed alla suddivisione S . Quando non vi sia rischio di confusione, scriveremo semplicemente $\Sigma'(S)$ e $\Sigma''(S)$.

Dal momento che

$$\inf_{[x_{j-1}, x_j]} f \leq \sup_{[x_{j-1}, x_j]} f,$$

è evidente che $\Sigma'(S) \leq \Sigma''(S)$.

(2.2) Proposizione Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata e S, T due suddivisioni di $[a, b]$ con $S \subseteq T$. Allora si ha

$$\Sigma'(S) \leq \Sigma'(T) \leq \Sigma''(T) \leq \Sigma''(S).$$

Dimostrazione. Sia $S = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ e sia $T = S \cup \{\xi\}$ con $\xi \in]x_{k-1}, x_k[$ per qualche $k = 1, \dots, n$. Risulta

$$\begin{aligned} \Sigma'(S) &= \sum_{j=1}^{k-1} \left(\inf_{[x_{j-1}, x_j]} f \right) (x_j - x_{j-1}) + \left(\inf_{[x_{k-1}, x_k]} f \right) (\xi - x_{k-1}) + \\ &+ \left(\inf_{[x_{k-1}, x_k]} f \right) (x_k - \xi) + \sum_{j=k+1}^n \left(\inf_{[x_{j-1}, x_j]} f \right) (x_j - x_{j-1}) \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{k-1} \left(\inf_{[x_{j-1}, x_j]} f \right) (x_j - x_{j-1}) + \left(\inf_{[x_{k-1}, \xi]} f \right) (\xi - x_{k-1}) + \\ &+ \left(\inf_{[\xi, x_k]} f \right) (x_k - \xi) + \sum_{j=k+1}^n \left(\inf_{[x_{j-1}, x_j]} f \right) (x_j - x_{j-1}) = \Sigma'(T). \end{aligned}$$

In modo simile si prova che $\Sigma''(S) \geq \Sigma''(T)$. La tesi segue applicando ripetutamente il passo precedente (ossia ragionando per induzione sul numero di elementi di $T \setminus S$). ■

(2.3) Definizione Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata. Poniamo

$$\mathcal{I}'(f) := \sup \{ \Sigma'(S) : S \text{ è una suddivisione di } [a, b] \},$$

$$\mathcal{I}''(f) := \inf \{ \Sigma''(S) : S \text{ è una suddivisione di } [a, b] \}.$$

Come vedremo fra un momento, $\mathcal{I}'(f)$ ed $\mathcal{I}''(f)$ sono numeri reali. Si chiamano rispettivamente integrale inferiore ed integrale superiore di f .

(2.4) Proposizione Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata. Allora

$$\left(\inf_{[a, b]} f \right) (b - a) \leq \mathcal{I}'(f) \leq \mathcal{I}''(f) \leq \left(\sup_{[a, b]} f \right) (b - a).$$

Dimostrazione. Se consideriamo la suddivisione S con $a = x_0 < x_1 = b$, risulta

$$\mathcal{J}'(f) \geq \Sigma'(S) = \left(\inf_{[a,b]} f \right) (b - a) ,$$

$$\mathcal{J}''(f) \leq \Sigma''(S) = \left(\sup_{[a,b]} f \right) (b - a) .$$

Inoltre per ogni coppia di suddivisioni S, T di $[a, b]$ si ha

$$\Sigma'(S) \leq \Sigma'(S \cup T) \leq \Sigma''(S \cup T) \leq \Sigma''(T) .$$

Per il Principio di Dedekind esiste $z \in \mathbb{R}$ tale che $\Sigma'(S) \leq z \leq \Sigma''(T)$ per ogni coppia di suddivisioni S, T di $[a, b]$. Ne segue

$$\mathcal{J}'(f) \leq z \leq \mathcal{J}''(f) ,$$

da cui la tesi. ■

(2.5) Teorema Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, siano $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni limitate e sia $\lambda \in [0, +\infty[$. Valgono allora i seguenti fatti:

(a) la funzione $(f + g)$ è limitata e si ha

$$\mathcal{J}'(f + g) \geq \mathcal{J}'(f) + \mathcal{J}'(g) ,$$

$$\mathcal{J}''(f + g) \leq \mathcal{J}''(f) + \mathcal{J}''(g) ;$$

(b) la funzione (λf) è limitata e si ha

$$\mathcal{J}'(\lambda f) = \lambda \mathcal{J}'(f) ,$$

$$\mathcal{J}''(\lambda f) = \lambda \mathcal{J}''(f) ;$$

(c) se $f \leq g$, risulta

$$\mathcal{J}'(f) \leq \mathcal{J}'(g) ,$$

$$\mathcal{J}''(f) \leq \mathcal{J}''(g) ;$$

(d) per ogni $c \in]a, b[$ si ha

$$\mathcal{J}'(f) = \mathcal{J}'(f|_{[a,c]}) + \mathcal{J}'(f|_{[c,b]}) ,$$

$$\mathcal{J}''(f) = \mathcal{J}''(f|_{[a,c]}) + \mathcal{J}''(f|_{[c,b]}) .$$

Dimostrazione. Consideriamo le affermazioni che riguardano l'integrale inferiore. Le proprietà dell'integrale superiore possono essere dimostrate per esercizio in modo simile.

(a) Si verifica facilmente che $f + g$ è limitata. Inoltre per ogni $\varepsilon > 0$ esistono due suddivisioni S, T di $[a, b]$ tali che

$$\Sigma'(f, S) > \mathcal{I}'(f) - \varepsilon ,$$

$$\Sigma'(g, T) > \mathcal{I}'(g) - \varepsilon .$$

Se $S \cup T = \{x_0, \dots, x_n\}$, risulta

$$\forall x \in [x_{j-1}, x_j] : \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f + \inf_{[x_{j-1}, x_j]} g \leq f(x) + g(x) ,$$

da cui

$$\inf_{[x_{j-1}, x_j]} f + \inf_{[x_{j-1}, x_j]} g \leq \inf_{[x_{j-1}, x_j]} (f + g) .$$

Ne segue

$$\begin{aligned} \mathcal{I}'(f) + \mathcal{I}'(g) - 2\varepsilon &< \Sigma'(f, S) + \Sigma'(g, T) \leq \Sigma'(f, S \cup T) + \Sigma'(g, S \cup T) \leq \\ &\leq \Sigma'(f + g, S \cup T) \leq \mathcal{I}'(f + g) . \end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di ε , si deduce che

$$\mathcal{I}'(f) + \mathcal{I}'(g) \leq \mathcal{I}'(f + g) .$$

(b) Si verifica facilmente che λf è limitata. Se $\lambda = 0$, si ha per la Proposizione (2.4) $\mathcal{I}'(\lambda f) = 0$. Ne segue $\mathcal{I}'(\lambda f) = \lambda \mathcal{I}'(f)$. Sia quindi $\lambda > 0$ e sia $S = \{x_0, \dots, x_n\}$ una suddivisione di $[a, b]$. Poiché

$$\forall x \in [x_{j-1}, x_j] : \lambda \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f \leq \lambda f(x) ,$$

risulta

$$\lambda \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f \leq \inf_{[x_{j-1}, x_j]} (\lambda f) .$$

Ne segue

$$\lambda \Sigma'(f, S) \leq \Sigma'(\lambda f, S) \leq \mathcal{I}'(\lambda f) ,$$

da cui $\lambda \mathcal{I}'(f) \leq \mathcal{I}'(\lambda f)$. Ragionando su λ^{-1} e (λf) , si deduce che

$$\lambda^{-1} \mathcal{I}'(\lambda f) \leq \mathcal{I}'(\lambda^{-1}(\lambda f)) = \mathcal{I}'(f) ,$$

da cui la disuguaglianza opposta.

(c) Se S è una suddivisione di $[a, b]$, risulta

$$\Sigma'(f, S) \leq \Sigma'(g, S) \leq \mathcal{I}'(g),$$

da cui $\mathcal{I}'(f) \leq \mathcal{I}'(g)$.

(d) Se S è una suddivisione di $[a, b]$, poniamo

$$T = S \cup \{c\},$$

$$T_1 = T \cap [a, c],$$

$$T_2 = T \cap [c, b].$$

Risulta

$$\Sigma'(S) \leq \Sigma'(T) = \Sigma'(T_1) + \Sigma'(T_2) \leq \mathcal{I}'(f_{|[a,c]}) + \mathcal{I}'(f_{|[c,b]}) ,$$

per cui

$$\mathcal{I}'(f) \leq \mathcal{I}'(f_{|[a,c]}) + \mathcal{I}'(f_{|[c,b]}) .$$

D'altronde per ogni $\varepsilon > 0$ esistono una suddivisione S_1 di $[a, c]$ ed una suddivisione S_2 di $[c, b]$ tali che

$$\Sigma'(S_1) > \mathcal{I}'(f_{|[a,c]}) - \varepsilon ,$$

$$\Sigma'(S_2) > \mathcal{I}'(f_{|[c,b]}) - \varepsilon .$$

Poiché $S_1 \cup S_2$ è una suddivisione di $[a, b]$, ne segue

$$\mathcal{I}'(f_{|[a,c]}) + \mathcal{I}'(f_{|[c,b]}) - 2\varepsilon < \Sigma'(S_1) + \Sigma'(S_2) = \Sigma'(S_1 \cup S_2) \leq \mathcal{I}'(f) .$$

Per l'arbitrarietà di ε , si deduce che

$$\mathcal{I}'(f_{|[a,c]}) + \mathcal{I}'(f_{|[c,b]}) \leq \mathcal{I}'(f) ,$$

per cui vale anche la disuguaglianza opposta. ■

3 Funzioni integrabili

(3.1) Definizione Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Diciamo che f è integrabile (secondo Riemann), se f è limitata e $\mathcal{I}'(f) = \mathcal{I}''(f)$. Se f è integrabile, denotiamo con uno dei simboli

$$\int_a^b f, \quad \int_a^b f(x) dx$$

il comune valore di $\mathcal{I}'(f)$ e $\mathcal{I}''(f)$. Il numero reale $\int_a^b f$ si chiama integrale di f da a a b .

(3.2) Proposizione Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata. Allora f è integrabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una suddivisione S di $[a, b]$ tale che $\Sigma''(S) - \Sigma'(S) < \varepsilon$.

Dimostrazione. Supponiamo che f sia integrabile. Per ogni $\varepsilon > 0$ esistono due suddivisioni S, T di $[a, b]$ tali che

$$\begin{aligned}\Sigma'(S) &> \mathcal{I}'(f) - \frac{\varepsilon}{2}, \\ \Sigma''(T) &< \mathcal{I}''(f) + \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Poiché $\mathcal{I}'(f) = \mathcal{I}''(f)$, ne segue

$$\Sigma''(S \cup T) - \Sigma'(S \cup T) \leq \Sigma''(T) - \Sigma'(S) < \varepsilon.$$

Viceversa, sia $\varepsilon > 0$ e sia S una suddivisione di $[a, b]$ con $\Sigma''(S) - \Sigma'(S) < \varepsilon$. Risulta

$$\mathcal{I}''(f) \leq \Sigma''(S) < \Sigma'(S) + \varepsilon \leq \mathcal{I}'(f) + \varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di ε , ne segue $\mathcal{I}''(f) \leq \mathcal{I}'(f)$, quindi $\mathcal{I}''(f) = \mathcal{I}'(f)$. ■

(3.3) Osservazione Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Allora f è integrabile se e solo se, per ogni $\varepsilon > 0$, esistono due funzioni continue $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$\forall x \in [a, b] : \varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x), \quad \int_a^b (\psi - \varphi) < \varepsilon.$$

(3.4) Osservazione Sia $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}, \\ -1 & \text{se } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Allora f non è integrabile. Infatti, per ogni suddivisione $S = \{x_0, \dots, x_n\}$ di $[0, 1]$, si ha

$$\inf_{[x_{j-1}, x_j]} f = -1, \quad \sup_{[x_{j-1}, x_j]} f = 1, \quad \forall j = 1, \dots, n$$

per cui $\Sigma'(f, S) = -1$, $\Sigma''(f, S) = 1$ e f non può essere integrabile per la Proposizione (3.2).

Vediamo ora una prima importante classe di funzioni integrabili.

(3.5) Teorema Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione monotona. Allora f è integrabile.

Dimostrazione. Supponiamo che f sia crescente. Se f è decrescente, il ragionamento è simile. Poiché

$$\forall x \in [a, b] : f(a) \leq f(x) \leq f(b) ,$$

la funzione f è limitata. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $(b-a)(f(b) - f(a)) < n\varepsilon$. Poniamo $S = \{x_0, \dots, x_n\}$, dove $x_j = a + \frac{j}{n}(b-a)$, $0 \leq j \leq n$. Essendo f crescente, risulta

$$\inf_{[x_{j-1}, x_j]} f = f(x_{j-1}) ,$$

$$\sup_{[x_{j-1}, x_j]} f = f(x_j) .$$

Ne segue

$$\begin{aligned} \Sigma''(S) - \Sigma'(S) &= \sum_{j=1}^n f(x_j) \frac{b-a}{n} - \sum_{j=1}^n f(x_{j-1}) \frac{b-a}{n} = \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n (f(x_j) - f(x_{j-1})) = \\ &= \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) < \varepsilon . \end{aligned}$$

Per la proposizione precedente f è integrabile. ■

Vediamo ora una seconda importante classe di funzioni integrabili.

(3.6) Teorema Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f è integrabile.

Dimostrazione. Per il Teorema di Weierstrass f è limitata. Inoltre f è uniformemente continua per il Teorema (8.14). Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\forall \xi', \xi'' \in [a, b] : |\xi' - \xi''| < \delta \implies |f(\xi') - f(\xi'')| < \frac{\varepsilon}{b-a} .$$

Sia $n \in \mathbb{N}$ tale che $(b-a) < n\delta$ e sia $S = \{x_0, \dots, x_n\}$, dove $x_j = a + \frac{j}{n}(b-a)$, $0 \leq j \leq n$. Per il Teorema di Weierstrass esistono $\xi'_j, \xi''_j \in [x_{j-1}, x_j]$ tali che

$$f(\xi'_j) = \min_{[x_{j-1}, x_j]} f , \quad f(\xi''_j) = \max_{[x_{j-1}, x_j]} f .$$

Poiché $|\xi''_j - \xi'_j| \leq \frac{b-a}{n} < \delta$, risulta

$$f(\xi''_j) - f(\xi'_j) < \frac{\varepsilon}{b-a} .$$

Ne segue

$$\begin{aligned}\Sigma''(S) - \Sigma'(S) &= \sum_{j=1}^n f(\xi_j'')(x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=1}^n f(\xi_j')(x_j - x_{j-1}) = \\ &= \sum_{j=1}^n (f(\xi_j'') - f(\xi_j'))(x_j - x_{j-1}) < \\ &< \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) = \varepsilon.\end{aligned}$$

Per la Proposizione (3.2) f è integrabile. ■

(3.7) Teorema Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione integrabile e sia $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora $\varphi \circ f$ è integrabile.

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

(3.8) Osservazione Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Valgono allora i seguenti fatti. Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione, $c \in]a, b[$, e le funzioni $f|_{[a, c]}$ e $f|_{[c, b]}$ sono integrabili, allora f è integrabile. Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione integrabile, allora f^2 è integrabile. Se $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni integrabili, allora fg è integrabile.

(3.9) Teorema Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, siano $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni integrabili e sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Valgono allora i seguenti fatti:

(a) la funzione $(f + g)$ è integrabile e si ha

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g;$$

(b) la funzione (λf) è integrabile e si ha

$$\int_a^b (\lambda f) = \lambda \int_a^b f;$$

(c) se $f \leq g$, risulta

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g;$$

(d) per ogni $c \in]a, b[$ le funzioni $f|_{[a,c]}$ e $f|_{[c,b]}$ sono integrabili e si ha

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f ;$$

(e) la funzione $|f|$ è integrabile e si ha

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f| .$$

Dimostrazione.

(a) Risulta

$$\mathcal{I}'(f) + \mathcal{I}'(g) \leq \mathcal{I}'(f+g) \leq \mathcal{I}''(f+g) \leq \mathcal{I}''(f) + \mathcal{I}''(g) .$$

Dal momento che il primo e l'ultimo membro sono uguali, si ha $\mathcal{I}'(f+g) = \mathcal{I}''(f+g)$, ossia $f+g$ è integrabile. Inoltre risulta

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g .$$

(b) Evidentemente la funzione φ definita da $\varphi(y) = \lambda y$ è continua. Dal teorema precedente si deduce che $\lambda f = \varphi \circ f$ è integrabile. Se $\lambda \geq 0$, l'uguaglianza

$$\int_a^b (\lambda f) = \lambda \int_a^b f$$

discende dalla corrispondente proprietà di integrale inferiore e superiore. Se $\lambda < 0$, risulta

$$0 = \int_a^b (\lambda f) + \int_a^b (-\lambda f) = \int_a^b (\lambda f) - \lambda \int_a^b f ,$$

da cui la tesi.

(c) Si tratta di un'ovvia conseguenza della corrispondente proprietà di integrale inferiore e superiore.

(d) Osserviamo anzitutto che, se $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono quattro numeri reali con $\alpha \leq \gamma$, $\beta \leq \delta$ e $\alpha + \beta = \gamma + \delta$, si ha necessariamente $\alpha = \gamma$ e $\beta = \delta$. Poiché

$$\mathcal{I}'(f) = \mathcal{I}'(f|_{[a,c]}) + \mathcal{I}'(f|_{[c,b]}) \leq \mathcal{I}''(f|_{[a,c]}) + \mathcal{I}''(f|_{[c,b]}) = \mathcal{I}''(f) ,$$

risulta

$$\mathcal{I}'(f|_{[a,c]}) + \mathcal{I}'(f|_{[c,b]}) = \mathcal{I}''(f|_{[a,c]}) + \mathcal{I}''(f|_{[c,b]}) .$$

Ne segue che $f|_{[a,c]}$ e $f|_{[c,b]}$ sono integrabili e

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

(e) Poiché la funzione valore assoluto è continua, segue dal teorema precedente che $|f|$ è integrabile. Dalle disuguaglianze

$$\forall x \in [a, b] : -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

si deduce che

$$-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|,$$

da cui la tesi. ■

(3.10) Definizione Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione integrabile. Il numero reale

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f$$

si chiama media integrale di f .

Per la Proposizione (2.4) si ha evidentemente

$$\inf_{[a,b]} f \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leq \sup_{[a,b]} f.$$

Di conseguenza, se f è continua su $[a, b]$, esiste $\xi \in [a, b]$ tale che

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f = f(\xi).$$

4 Il teorema fondamentale del calcolo integrale

(4.1) Definizione Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione integrabile. Per ogni $\alpha, \beta, \gamma \in [a, b]$ con $\alpha > \beta$ poniamo

$$\int_\alpha^\beta f := - \int_\beta^\alpha f,$$

$$\int_{\gamma}^{\gamma} f := 0.$$

(4.2) Teorema Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione integrabile. Allora per ogni $\alpha, \beta, \gamma \in [a, b]$ si ha

$$\int_{\alpha}^{\gamma} f = \int_{\alpha}^{\beta} f + \int_{\beta}^{\gamma} f.$$

Dimostrazione. Se $\alpha < \beta < \gamma$, la proprietà è già nota. Se $\alpha < \gamma < \beta$, risulta

$$\int_{\alpha}^{\beta} f = \int_{\alpha}^{\gamma} f + \int_{\gamma}^{\beta} f,$$

da cui

$$\int_{\alpha}^{\gamma} f = \int_{\alpha}^{\beta} f - \int_{\gamma}^{\beta} f = \int_{\alpha}^{\beta} f + \int_{\beta}^{\gamma} f.$$

Gli altri casi possono essere trattati per esercizio. ■

(4.3) Teorema (fondamentale del calcolo integrale) Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione integrabile e $c, x \in [a, b]$. Supponiamo che f sia continua in x . Allora la funzione $A : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$A(\xi) = \int_c^{\xi} f$$

è derivabile in x e $A'(x) = f(x)$.

Dimostrazione. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\forall \xi \in]x - \delta, x + \delta[\cap [a, b] : |f(\xi) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Se $\xi \in]x, x + \delta[\cap [a, b]$, ne segue

$$f(x) - \frac{\varepsilon}{2} \leq f(\xi) \leq f(x) + \frac{\varepsilon}{2},$$

quindi

$$f(x) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{1}{\xi - x} \int_x^{\xi} f \leq f(x) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Se invece $\xi \in]x - \delta, x[\cap [a, b]$, risulta

$$f(x) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{1}{x - \xi} \int_{\xi}^x f \leq f(x) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pertanto per ogni $\xi \in]x - \delta, x + \delta[\cap [a, b]$ con $\xi \neq x$ si ha

$$f(x) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{1}{\xi - x} \int_x^\xi f \leq f(x) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Poiché

$$\frac{A(\xi) - A(x)}{\xi - x} = \frac{1}{\xi - x} \left(\int_c^\xi f - \int_c^x f \right) = \frac{1}{\xi - x} \int_x^\xi f,$$

per ogni $\xi \in]x - \delta, x + \delta[\cap [a, b]$ con $\xi \neq x$ risulta

$$\left| \frac{A(\xi) - A(x)}{\xi - x} - f(x) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

da cui la tesi ■

(4.4) Osservazione Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione integrabile. Allora la funzione $A : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$A(x) = \int_a^x f$$

è continua. Infatti, fissato $x \in [a, b]$, osserviamo anzitutto che

$$|A(\xi) - A(x)| \leq \int_x^\xi |f|,$$

per cui la tesi equivale a provare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$|\xi - x| < \delta \implies \int_x^\xi |f| < \varepsilon.$$

Supponiamo per assurdo che esista $\varepsilon_0 > 0$ ed una successione $\xi_n \subset [a, b]$ tale che

$$|\xi_n - x| < \frac{1}{n} \quad e \quad \int_x^{\xi_n} |f| \geq \varepsilon_0.$$

Tenuto conto che f è limitata, se poniamo $M = \sup_{[a, b]} f$, si ha

$$\frac{M}{n} > M |\xi_n - x| \geq \int_x^{\xi_n} |f| \geq \varepsilon_0,$$

che, per n sufficientemente grande, produce una contraddizione.

(4.5) Definizione Siano $E \subseteq \mathbb{R}$ e $f, F : E \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni. Diciamo che F è una primitiva di f , se F è derivabile e $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in E$.

(4.6) Osservazione Per il Teorema fondamentale del calcolo integrale ogni funzione integrabile e continua ammette primitiva. Inoltre la continuità è una condizione necessaria, come si vede dal seguente esempio: sia $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione, discontinua in 0, definita ponendo

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ 1 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Allora f non ammette primitiva. Infatti, se per assurdo esistesse una funzione primitiva $F : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, si avrebbe $F'(x) = -1$ per ogni $x < 0$ e $F'(x) = 1$ per ogni $x > 0$, per cui $F(x) = -x + c$ per ogni $x < 0$ e $F(x) = x + c$ per ogni $x > 0$ e $F(0) = c$. Allora, si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1,$$

per cui F non è derivabile in 0, contro l'ipotesi che F sia una primitiva di f .

(4.7) Teorema Siano I un intervallo in $\mathbb{R}$ e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora esiste una primitiva $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ per f . Inoltre, se $F_1, F_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ sono due primitive per f , la funzione $(F_1 - F_2)$ è costante.

Dimostrazione. Fissiamo $c \in I$. La funzione $A : I \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$A(x) = \int_c^x f$$

è una primitiva di f per il Teorema fondamentale del calcolo integrale. Se F_1 e F_2 sono due primitive di f , la funzione $(F_1 - F_2) : I \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile e

$$(F_1 - F_2)'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

per ogni $x \in I$. Ne segue che $(F_1 - F_2)$ è costante. ■

(4.8) Definizione Siano I un intervallo in $\mathbb{R}$ e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. La scrittura simbolica

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

significa che F è una primitiva di f , per cui ogni primitiva di f è del tipo $F + c$.

(4.9) Teorema Siano I un intervallo in $\mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ una qualunque primitiva di f . Allora per ogni $a, b \in I$ si ha

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Dimostrazione. Poniamo

$$A(x) = \int_a^x f .$$

Poiché A è una primitiva di f , la funzione $(A - F)$ è costante. Ne segue

$$\int_a^b f = A(b) = A(b) - A(a) = F(b) - F(a) ,$$

da cui la tesi. ■

L'incremento $F(b) - F(a)$ viene spesso denotato con uno dei simboli

$$F|_a^b , \quad [F]_a^b , \quad [F(x)]_{x=a}^{x=b} .$$

5 Formule di integrazione

(5.1) Teorema (Formula di integrazione per sostituzione) Siano $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile con derivata continua tale che $\varphi([\alpha, \beta]) \subseteq [a, b]$. Sia inoltre $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una primitiva di f . Allora $F \circ \varphi$ è una primitiva della funzione

$$\{x \mapsto f(\varphi(x))\varphi'(x)\} .$$

In particolare risulta

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x))\varphi'(x) dx .$$

Dimostrazione. Per il teorema sulla derivata di una composizione si ha

$$(F \circ \varphi)'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x) .$$

Ne segue

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(y) dy = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x))\varphi'(x) dt ,$$

da cui la tesi. ■

La prima parte della tesi del teorema precedente viene spesso scritta nella seguente forma un po' imprecisa:

$$\int f(y) dy = \int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx .$$

(5.2) Osservazione *Nel caso in cui la funzione f da integrare è dispari o pari ed è definita su un intervallo simmetrico $[-a, a]$, $a > 0$, allora il calcolo dell'integrale si semplifica. Sia infatti $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua tale che*

$$\forall x \in [-a, a] : \quad f(-x) = -f(x).$$

Allora, con la formula di integrazione per sostituzione, si verifica facilmente che

$$\int_{-a}^a f = 0.$$

Similmente, se $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua tale che

$$\forall x \in [-a, a] : \quad f(-x) = f(x)$$

allora si verifica facilmente che

$$\int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f.$$

(5.3) Teorema (Formula di integrazione per parti) *Siano $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni continue, siano $F, G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ due primitive di f e g , rispettivamente, e sia $H : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una primitiva di fG . Allora $FG - H$ è una primitiva di Fg . In particolare risulta*

$$\int_a^b F(x)g(x) dx = [F(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f(x)G(x) dx.$$

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned} (FG - H)'(x) &= F'(x)G(x) + F(x)G'(x) - H'(x) = \\ &= f(x)G(x) + F(x)g(x) - f(x)G(x) = F(x)g(x). \end{aligned}$$

Ne segue

$$\int_a^b F(x)g(x) dx = [F(x)G(x)]_a^b - [H(x)]_a^b = [F(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f(x)G(x) dx,$$

da cui la tesi. ■

La prima parte della tesi del teorema precedente viene usualmente scritta nella seguente forma:

$$\int F(x)g(x) dx = F(x)G(x) - \int f(x)G(x) dx.$$

6 Integrali impropri

(6.1) Definizione Siano $a \in \mathbb{R}$, $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ una funzione integrabile su $[a, c]$ per ogni $c > a$ e $y \in \overline{\mathbb{R}}$. Se

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \int_a^\xi f = y,$$

poniamo

$$\int_a^{+\infty} f := y.$$

Se $y \in \mathbb{R}$, diciamo che f è integrabile in senso improprio e che l'integrale improprio

$$\int_a^{+\infty} f$$

è convergente. Se $y = +\infty$ o $y = -\infty$, diciamo che l'integrale improprio è positivamente divergente o negativamente divergente. Se la funzione

$$\left\{ \xi \mapsto \int_a^\xi f \right\}$$

non ammette limite a $+\infty$, diciamo che l'integrale improprio è indeterminato.

Naturalmente, se $b \in \mathbb{R}$ e $f :]-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile su $[c, b]$ per ogni $c < b$, si possono considerare anche integrali impropri del tipo

$$\int_{-\infty}^b f.$$

Le definizioni sono analoghe.

(6.2) Teorema Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$$

è convergente per $\alpha > 1$ e positivamente divergente per $\alpha \leq 1$.

Dimostrazione. Risulta

$$\forall \alpha \neq 1 : \int_1^\xi \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{\alpha - 1} - \frac{1}{(\alpha - 1)\xi^{\alpha-1}},$$

$$\int_1^\xi \frac{1}{x} dx = \log \xi,$$

da cui la tesi. ■

(6.3) Teorema Siano $a \in \mathbb{R}$, $f, g : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni integrabili su $[a, c]$ per ogni $c > a$, $y, z \in \overline{\mathbb{R}}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Supponiamo che si abbia

$$\int_a^{+\infty} f = y, \quad \int_a^{+\infty} g = z.$$

Allora:

(a) se la somma $y + z$ è definita, si ha

$$\int_a^{+\infty} (f + g) = y + z;$$

(b) se il prodotto λy è definito, si ha

$$\int_a^{+\infty} (\lambda f) = \lambda y;$$

(c) se $f \leq g$, si ha

$$\int_a^{+\infty} f \leq \int_a^{+\infty} g.$$

Dimostrazione. Basta passare al limite per $\xi \rightarrow +\infty$ nelle relazioni

$$\int_a^\xi (f + g) = \int_a^\xi f + \int_a^\xi g,$$

$$\int_a^\xi (\lambda f) = \lambda \int_a^\xi f,$$

$$\int_a^\xi f \leq \int_a^\xi g$$

ed applicare i teoremi sui limiti di somma e prodotto. ■

(6.4) Teorema Siano $a \in \mathbb{R}$ e $f : [a, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ una funzione integrabile su $[a, c]$ per ogni $c > a$. Allora l'integrale improprio

$$\int_a^{+\infty} f$$

può essere solo convergente o positivamente divergente.

Dimostrazione. Basta osservare che la funzione

$$\left\{ \xi \mapsto \int_a^\xi f \right\}$$

è crescente. ■

Come per le serie numeriche, anche per gli integrali impropri esiste un criterio del confronto per stabilirne il carattere.

(6.5) Teorema (del confronto) Sia $a \in \mathbb{R}$ e siano $f, g : [a, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ due funzioni integrabili su $[a, c]$ per ogni $c > a$ con $g(x) > 0$ per ogni $x \geq a$. Supponiamo che l'integrale improprio

$$\int_a^{+\infty} g$$

sia convergente e che

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} < +\infty.$$

Allora anche l'integrale improprio $\int_a^{+\infty} f$ è convergente.

Dimostrazione. Sia $M \in \mathbb{R}$ un maggiorante definitivo per $\frac{f(x)}{g(x)}$ a $+\infty$ e sia $c > a$ tale che $\frac{f(x)}{g(x)} \leq M$ per ogni $x \geq c$. Allora per ogni $\xi \geq c$ risulta

$$\int_a^\xi f = \int_a^c f + \int_c^\xi f \leq \int_a^c f + M \int_c^\xi g \leq \int_a^c f + M \int_a^\xi g.$$

Passando al limite per $\xi \rightarrow +\infty$, si ottiene la tesi. ■

(6.6) Definizione Siano $a \in \mathbb{R}$ e $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ una funzione integrabile su $[a, c]$ per ogni $c > a$. Diciamo che l'integrale improprio

$$\int_a^{+\infty} f$$

è assolutamente convergente, se l'integrale improprio

$$\int_a^{+\infty} |f|$$

è convergente.

(6.7) Teorema Siano $a \in \mathbb{R}$ e $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ una funzione integrabile su $[a, c]$ per ogni $c > a$. Supponiamo che l'integrale improprio

$$\int_a^{+\infty} f$$

sia assolutamente convergente. Allora

$$\int_a^{+\infty} f$$

è convergente.

Dimostrazione. La funzione $|f| + f$ è evidentemente positiva. Poiché

$$\forall x \geq a : |f(x)| + f(x) \leq 2|f(x)|,$$

risulta

$$\int_a^{+\infty} (|f| + f) \leq 2 \int_a^{+\infty} |f| < +\infty.$$

Dal momento che $f = (|f| + f) - |f|$, la tesi discende dal Teorema (6.3). ■

Il seguente criterio di convergenza per le serie numeriche a termini positivi è detto anche criterio dell'integrale.

(6.8) Teorema Sia $f : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ una funzione decrescente e sia $x_n = f(n)$. Allora la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

è convergente se e solo se l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} f$$

è convergente.

Dimostrazione. Essendo decrescente, f è integrabile su $[a, c]$ per ogni $c > 0$. Inoltre risulta

$$\forall n \in \mathbb{N} : x_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f \leq x_n.$$

Ne segue

$$\sum_{h=0}^n x_h \leq x_0 + \int_0^n f, \quad \int_0^{n+1} f \leq \sum_{h=0}^n x_h,$$

da cui la tesi. ■

(6.9) Esempio Per il criterio precedente la serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda}}$$

è convergente se $\lambda > 1$ mentre è positivamente divergente se $\lambda \leq 1$. Infatti,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\lambda}} dx < +\infty$$

se e soltanto se $\lambda > 1$, per il Teorema (6.2).

(6.10) Definizione Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, sia $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione integrabile su $[c, b]$ per ogni $c \in]a, b[$ e sia $y \in \overline{\mathbb{R}}$. Se

$$\lim_{\xi \rightarrow a} \int_{\xi}^b f = y,$$

poniamo

$$\int_a^b f := y.$$

Se $y \in \mathbb{R}$, diciamo che f è integrabile in senso improprio e che l'integrale improprio

$$\int_a^b f$$

è convergente. Se $y = +\infty$ o $y = -\infty$, diciamo che l'integrale improprio è positivamente divergente o negativamente divergente. Se la funzione

$$\left\{ \xi \mapsto \int_{\xi}^b f \right\}$$

non ammette limite in a , diciamo che l'integrale improprio è indeterminato.

Nel caso in cui $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile su $[a, c]$ per ogni $c \in]a, b[$ le definizioni sono analoghe.

(6.11) Teorema Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora l'integrale improprio

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^{\alpha}} dx$$

è convergente per $\alpha < 1$ e positivamente divergente per $\alpha \geq 1$.

Dimostrazione. Risulta

$$\forall \alpha \neq 1 : \int_{\xi}^b \frac{1}{(x-a)^{\alpha}} dx = \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{(\xi-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

$$\int_{\xi}^b \frac{1}{x-a} dx = \log(b-a) - \log(\xi-a),$$

da cui la tesi. ■

Per integrali impropri della forma

$$\int_a^b f$$

con $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ valgono risultati analoghi al caso

$$\int_a^{+\infty} f.$$

(6.12) Osservazione *L'integrale improprio*

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}$$

è convergente, ma non è assolutamente convergente.

7 Esercizi

(7.1) Esercizio Risolvere i seguenti integrali:

1. $\int (\sin x)^5 \cos x dx$

2. $\int e^{\sin x} \cos x dx$

3. $\int x \sqrt{9 - x^2} dx$

4. $\int \frac{x^2 + 2x}{1 + (x^3 + 3x^2 + 1)^2} dx$

5. $\int \frac{\sqrt{3 + \tan x}}{(\cos x)^2} dx$

6. $\int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 9} dx$

7. $\int \frac{\log(x)}{x} dx$

8. $\int \frac{1 - \sin x}{x + \cos x} dx$

9. $\int \frac{\sin(2x)}{1 + (\sin x)^2} dx$

10. $\int x(x^2 + 7)^5 dx$

(7.2) Esercizio Risolvere i seguenti integrali facendo opportune manipolazioni algebriche:

1. $\int \frac{x}{1 + x} dx$

2. $\int (\tan x) dx$

3. $\int (\cot x) dx$

4. $\int \frac{1}{(\sin x)^2 (\cos x)^2} dx$

$$5. \int (\cos x)^2 dx$$

$$6. \int (\sin x)^2 dx$$

$$7. \int (1/\sin x) dx$$

$$8. \int (1/\cos x) dx$$

$$9. \int \frac{1 + (\log x)^3}{x} dx$$

$$10. \int \frac{e^{\tan x} - 1}{(\cos x)^2} dx$$

(7.3) Esercizio Risolvere i seguenti integrali utilizzando il metodo di sostituzione:

$$1. \int \frac{1}{x \sqrt{1 - (\log x)^2}} dx;$$

$$2. \int \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$3. \int (\tan x)^4 dx$$

$$4. \int \frac{(\log x)^3 - 3}{3x((\log x)^2 - 1)} dx$$

$$5. \int \frac{x^3}{x^8 + 1} dx$$

$$6. \int \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} dx$$

$$7. \int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx$$

$$8. \int \sqrt{e^x - 1} dx$$

$$9. \int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

$$10. \int \frac{1}{x} \sin(\log x) dx$$

(7.4) Esercizio Risolvere i seguenti integrali utilizzando l'integrazione per parti:

1. $\int (\log x) dx$

2. $\int x(\sin x) dx$

3. $\int x^2 e^x dx$

4. $\int e^x (\sin x) dx$

5. $\int x(\arctan x) dx$

6. $\int x^3 (\log x) dx$

7. $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

8. $\int \frac{x}{(\cos(2x))^2} dx$

9. $\int \frac{\log x}{\sqrt{x}} dx$

10. $\int x^2 \arcsin x dx$

(7.5) Esercizio Risolvere i seguenti integrali di funzioni razionali fratte:

1. $\int \frac{3x + 5}{x^2 + x + 2} dx$

2. $\int \frac{x - 7}{x^2 + 3x + 5} dx$

3. $\int \frac{2x - 3}{x^2 - x - 2} dx$

4. $\int \frac{4x^2 - 16x + 4}{x^3 - 3x^2 - x + 3} dx$

5. $\int \frac{3x - 1}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} dx$

$$6. \int \frac{4x^2 - 16x + 4}{x^3 - 3x^2 - x + 3} dx$$

$$7. \int \frac{x^3 - 2x + 3}{x^3(x-1)} dx$$

$$8. \int \frac{x^5 - x + 1}{x^4 + x^2} dx$$

$$9. \int \frac{x^2 + 2x + 3}{x(1+x^2)} dx$$

$$10. \int \frac{x^5 + 3x^3 + 3}{(1+x^2)^2} dx$$

(7.6) Esercizio Decomporre in frazioni semplici le seguenti funzioni razionali fratte, e integrarle:

$$f(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2(x-1)^4}$$

$$g(x) = \frac{1}{(x+1)^3 x^5}$$

$$h(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{(x-1)^3}$$

(7.7) Esercizio Risolvere i seguenti integrali:

$$1. \int \sin(\log x) dx$$

$$2. \int x \arctan(x^2) dx$$

$$3. \int x(\arctan x)^2 dx$$

$$4. \int (\cos x)^3 dx$$

$$5. \int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$$

$$6. \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$$

$$7. \int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$8. \int \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} dx$$

$$9. \int \frac{\tan x}{1 + (\sin x)^2} dx$$

$$10. \int \frac{e^{2x} + 8e^x + 5}{e^x + 7} dx$$

$$11. \int \frac{\sqrt[4]{x}}{1 + \sqrt{x}} dx$$

$$12. \int \frac{2 - x}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)} dx$$

$$13. \int \frac{1}{\sqrt{e^x + 1}} dx$$

$$14. \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$$

$$15. \int \frac{1}{4^{x/3} + 1} dx$$

$$16. \int \frac{(\cos x)^3}{\sqrt{\sin x}} dx$$

$$17. \int \frac{2 \log x + 1}{x((\log x)^2 + \log x + 1)} dx$$

$$18. \int e^x(x^2 + x - 1) dx$$

$$19. \int e^x(\arcsin(e^x)) dx$$

$$20. \int \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{x(x + 1)^3} dx$$

(7.8) Esercizio Risolvere i seguenti integrali definiti:

$$1. \int_0^{2\pi} \sin x dx$$

$$2. \int_0^{2\pi} |\sin x| dx$$

$$3. \int_0^1 \frac{1}{2-x} dx$$

$$4. \int_0^1 \frac{x^2 - 4}{x^2 + 5x + 4} dx$$

$$5. \int_0^3 |x - 2| dx$$

$$6. \int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{x}) dx$$

$$7. \int_1^2 x \sqrt{x^2 - 1} dx$$

$$8. \int_0^{\log 2} \sqrt{e^x - 1} dx$$

$$9. \int_1^e \frac{\log x}{\sqrt{x}} dx$$

$$10. \int_{-2}^1 \frac{3+x}{\sqrt{1+|x|}} dx$$

(7.9) Esercizio Trovare l'area della regione di piano limitata dalle due parabole di equazioni:

$$y = x^2 - 3x + 2, \quad y = -x^2 + x + 2.$$

(7.10) Esercizio Trovare l'area della regione di piano compresa tra la parabola: $y^2 = 4x$, la retta: $2x + y - 4 = 0$, e l'asse delle x .

(7.11) Esercizio Discutere la convergenza dei seguenti integrali impropri:

$$1. \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a} dx$$

$$2. \int_0^1 \frac{1}{x^a} dx$$

$$3. \int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^a} dx$$

$$4. \int_0^{1/2} \frac{1}{x(\log x)^a} dx$$

$$5. \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}}{x} dx$$

$$6. \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx$$

$$7. \int_0^{+\infty} \frac{x \arctan(1/x)}{\sqrt{1+x^4}} dx$$

$$8. \int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{(x+1)^2 x^{5/2}} dx$$

$$9. \int_0^3 \frac{\log x}{x \sqrt{x}} dx$$

$$10. \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{1-\sin x}} dx$$

(7.12) Esercizio Dopo aver verificato la convergenza dei seguenti integrali determinarne il valore:

$$1. \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx$$

$$2. \int_0^1 \frac{1}{1-x^2} dx$$

$$3. \int_0^{1/e} \frac{1}{x(\log x)^2} dx$$

$$4. \int_0^{\pi/6} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx$$

$$5. \int_0^1 \frac{x-1}{(x+2)\sqrt{x}} dx$$

$$6. \int_0^{+\infty} \frac{x^2-x}{e^x} dx$$

$$7. \int_2^{+\infty} \frac{\log x}{(x+1)^2} dx$$

$$8. \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{|x|}}{x^2-2x} dx$$

$$9. \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}} dx$$

$$10. \int_0^{+\infty} \frac{e^{-1/x}}{x^2} dx$$

(7.13) Esercizio Trovare l'area della regione limitata dall'ellisse di equazione:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

(7.14) Esercizio Discutere al variare di a la convergenza del seguente integrale:

$$\int_1^{+\infty} \frac{(\log x)^a}{\sqrt{x^2 - 1}} dx.$$

(7.15) Esercizio Discutere al variare di a la convergenza del seguente integrale:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{(x+1)^a - (x-1)^a} dx.$$

(7.16) Esercizio Discutere al variare di a la convergenza del seguente integrale:

$$\int_1^{+\infty} (\pi/2 - \arctan x)^a dx.$$

(7.17) Esercizio Discutere al variare di a la convergenza del seguente integrale:

$$\int_0^1 \frac{x^2}{(\log(1+x))^a - \log(1+x^a)} dx.$$

(7.18) Esercizio Discutere al variare di a la convergenza del seguente integrale in senso proprio o improprio:

$$\int_0^1 \frac{\sin \pi x}{x^2 - a} dx.$$

Altri riferimenti bibliografici

1. E. ACERBI, G. BUTTAZZO, Primo corso di Analisi matematica, Pitagora Editrice, Bologna 1997.
2. J.P. CECCONI, G. STAMPACCHIA, Analisi matematica I: Funzioni di una variabile, Liguori, Napoli 1974.
3. C. CITRINI, Analisi matematica I, Boringhieri, Torino 1991.
4. M. CONTI, D.L. FERRARIO, S. TERRACINI, G. VERZINI, Analisi matematica. Dal calcolo all'analisi Vol. 1, Apogeo 2006.
5. G. GILARDI, Analisi Uno, McGraw-Hill Italia, Milano 1992.
6. E. GIUSTI, Analisi matematica I, Boringhieri, Torino 1984.
7. C.D. PAGANI, S. SALSA, Analisi matematica volume 1, Masson, Milano 1990.
8. G. PRODI, Analisi matematica, Boringhieri, Torino 1970.