

## Esercizi per il Corso di ALGEBRA

### Foglio 9

4 dicembre 2014

1. Si decida se i seguenti enunciati sono veri o falsi (motivando la risposta):
- (a) Se  $K$  un campo di caratteristica  $\neq 2$ , allora ogni estensione  $K \subset F$  di grado 2 è un'estensione di Galois.
  - (b)  $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[3]{4})$  è un'estensione di Galois.
  - (c)  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(i, \sqrt{3})$  è un'estensione di Galois.
  - (d) L'anello quoziente  $\mathbb{Z}[i]/(2 + 3i)$  è un campo. In caso affermativo se ne determini la caratteristica.

(8 punti)

2. Sia  $\mathbb{Q} \subset K$  un'estensione di grado 2. Si dimostri:

- (a) esiste  $u \in \mathbb{Q}$  tale che  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{u})$ ,
- (b) l'assegnazione  $a + b\sqrt{u} \mapsto a - b\sqrt{u}$  definisce un isomorfismo di anelli  $\varphi : K \rightarrow K$ ,
- (c) esistono solo due isomorfismi di anelli  $\varphi : K \rightarrow K$  tali che  $\varphi|_{\mathbb{Q}} = \text{id}_{\mathbb{Q}}$ .

(8 punti)

3. Siano  $p$  e  $q$  due numeri primi distinti e  $\alpha = \sqrt{p} + \sqrt{q}$ . Si dimostri:

- (a)  $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q})$ .
- (b)  $\{1, \sqrt{p}, \sqrt{q}, \sqrt{pq}\}$  è una base di  $\mathbb{Q}(\alpha)$  su  $\mathbb{Q}$ .
- (c)  $\text{Aut}^F = \{\text{id}, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$  con  $\varphi_i^2 = \text{id}$  per ogni  $i = 1, 2, 3$  (quindi  $\text{Aut}^F$  è isomorfo al gruppo di Klein).
- (d)  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\alpha)$  è un'estensione di Galois.

(8 punti)

4. Sia  $\overline{\mathbb{Q}}$  l'insieme dei numeri algebrici, ovvero l'insieme di tutti i numeri complessi  $\alpha$  che sono algebrici su  $\mathbb{Q}$ . Si dimostri:

- (a)  $\overline{\mathbb{Q}}$  è un sottocampo di  $\mathbb{C}$ .
- (b)  $\mathbb{Q} \subset \overline{\mathbb{Q}}$  è un'estensione algebrica di grado infinito.
- (c) Ogni elemento di  $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$  è trascendente su  $\overline{\mathbb{Q}}$ .

(6 punti)

**Consegna: giovedì 11 dicembre durante la lezione.**