

ALGEBRA LINEARE CON ELEMENTI DI GEOMETRIA mod. avanzato

Prof. M. Spina (a.a. 2008/09) | Prova scritta del 22/9/2009

- ① Nel piano affine euclideo, in cui sia fissato un riferimento cartesiano, individuare la trasformazione affine T che manda $A: (0,0)$, $B: (1,1)$, $C: (0,2)$ risp. nei punti $A': (2,0)$, $B': (3,-1)$, $C': (4,0)$, realizzandola come prodotto di due trasformazioni opportune. È vero che T manda circonferenze in circonferenze? Indicare i barecentri G e G' dei risp. triangoli.

- ② Nel piano euclideo, in cui sia fissato un riferimento cartesiano, e ampliato proiettivamente, si determini la conica C passante per $O: [1,0,0]$, $A_1: [0,1,2]$, $A_2: [0,1,-1]$ e tale che la polare di $Q: [1,1,1]$ sia la retta impropria. Determinare gli assi e la forma canonica metrica, nonché l'abbozzo del grafico.

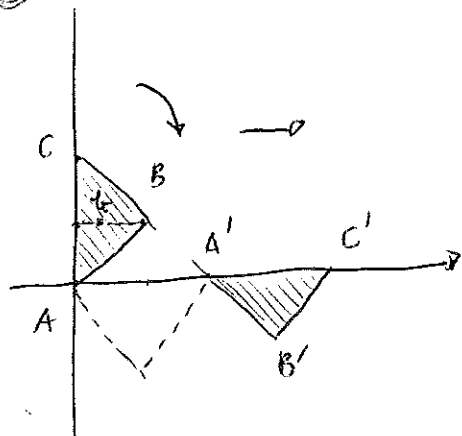
- ③ Nello spazio euclideo, in cui sia fissato un riferimento cartesiano, determinare il fascio di piani γ di asse $\pi: \begin{cases} x-z=0 \\ x+y=0 \end{cases}$. Trovare i piani di γ passanti, rispettivamente, per $P_1: (1,0,0)$ (π_1), e $P_2: (0,1,0)$ (π_2). Dato π il piano di equazione $x+y+z=1$, si verifichi che le rette π_1 , π_2 , π passano per uno stesso punto P . Dato poi $Q: (-2,2,-2)$ ($\in \pi$), si calcoli il volume (non orientato) del tetraedro $PQ P_1 P_2$. — Tempo a disp. 1h 45m

- ④ Sia $M_{C'}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice di un'applicazione lineare $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ rispetto alla base (e'_1, e'_2, e'_3) , $e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Trovare la matrice $M_{C''}(T)$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$, $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- ⑤ Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, si dica se essa risulta diagonalizzabile. In caso affermativo, se ne individui una base di autovettori, altrimenti, individuate basi per gli autospazi, si completi ad una base di $\mathbb{R}^3$. — Tempo totale 2h.30m — Le risposte vanno adeguatamente giustificate.

①

22/9/09



$$A: (0,0) \quad B: (1,1) \quad C: (0,2)$$

$$A': (2,0) \quad B': (3,-1) \quad C': (4,0)$$

C' punto

$$C' = \left(\frac{1}{3}, 1\right)$$

controlliamo

$$C' = \frac{1}{3} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T = T_2 \circ T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

troviamo

$$C' = \frac{1}{3} \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

è un'isometria:
manda punto
circonfrenza
in circonferenza

Controllo!

altro modo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ A $\uparrow$ B $\uparrow$ C
 $\uparrow$ A' $\uparrow$ B' $\uparrow$ C'

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2+1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ C' $\uparrow$ C'

② γ conica passante per

22/9/09

$O: [1, 0, 0]$, $A_1: [0, 1, 2]$, $A_2: [0, 1, -1]$
e tale che la polare di $Q: [1, 1, 1]$ sia r_0 .

Sol: Q è il centro di γ , A_1 e A_2 sono le dir.

dei vertici, le cui eq sono

$$a_1: \quad y-1 = 2(x-1) \quad \begin{array}{l} 2x - 2 - y + 1 = 0 \\ \boxed{2x - y - 1 = 0} \end{array}$$

$$a_2: \quad y-1 = -(x-1) \quad \begin{array}{l} y-1 = -x+1 \\ x+y-1-1=0 \\ \boxed{x+y-2=0} \end{array}$$

$$a_1 a_2 + \lambda r_0^2 = 0$$

$$(2x_1 - x_2 - x_0)(x_1 + x_2 - 2x_0) + \lambda x_0^2 = 0$$

passaggio per O : $(-x_0)(-2x_0) + \lambda x_0^2 = 0$

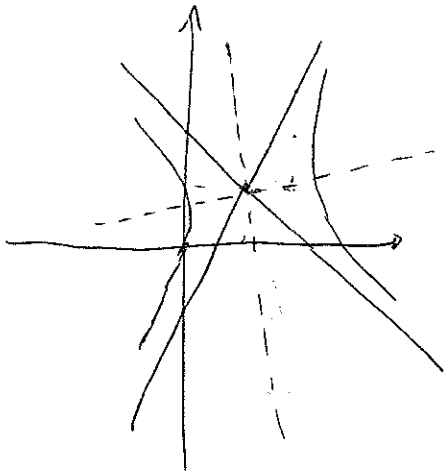
$$2x_0^2 + \lambda x_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -2 \quad (x_0 \neq 0)$$

$$\Rightarrow \mathcal{C}: (2x_1 - x_2 - x_0)(x_1 + x_2 - 2x_0) - 2x_0^2 = 0$$

$$\begin{array}{l} + 2x_1^2 - x_2^2 - \underbrace{x_1 x_2} - x_0 x_1 + \underbrace{2x_1 x_2} - x_0 x_2 \\ - 4x_0 x_1 + 2x_0 x_2 = 0 \end{array}$$

$$\boxed{2x_1^2 + x_1 x_2 - x_2^2 - 5x_0 x_1 + x_0 x_2 = 0}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{P} \begin{pmatrix} 0 & -5 & 1 \\ -5 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$



controllo

autovale

$$2 + m - m^2 = 0$$

$$m^2 - m - 2 = 0$$

$$m = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{OK}$$

oppo:

$$\begin{pmatrix} -m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = 0$$

ok. Sostituisco con
otto

$$\begin{pmatrix} -m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4+m \\ 1-2m \end{pmatrix} = 0$$

oppure

• autovalori di

$$A_{00} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

• braccia di a_1, a_2

$$-m(4+m) + 1 - 2m = 0$$

$$-4m - m^2 + 1 - 2m = 0$$

$$-m^2 - 6m + 1 = 0$$

$$m^2 + 6m - 1 = 0$$

$$m = -3 \pm \sqrt{9+1} = -3 \pm \sqrt{10}$$

$$(-3 + \sqrt{10})(-3 - \sqrt{10}) = 9 - 10 = -1$$

Y

$$\left[\begin{array}{l} \text{Int. con l'asse } y \\ x=0 \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} -y^2 + y = 0 \\ y(y-1) = 0 \\ y=0 \\ y=1 \end{array} \right]$$

Altri: $y-1 = (-3 \pm \sqrt{10})(x-1)$

a. locale: $y-1 = (-3 + \sqrt{10})(x-1)$

semicirchi $U = -5 - 5 - 4 + 50 = -14 + 50 = 36$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 1 \\ -5 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \alpha_{00} = -8 - 1 = -9 \\ \gamma = 4 - 2 = 2 \end{array}$$

$$t^2 + \frac{\alpha_{00} \gamma}{\alpha} t + \frac{\alpha_{00}^3}{\alpha^2} = 0$$

$$t^2 - \frac{9 \cdot 2}{36} t + \frac{-9^3}{36^2} = 0$$

$$\rightarrow -\frac{9^3}{9^2 \cdot 4^2} = -\frac{9}{4^2} = -\frac{9}{16}$$

$$t^2 - \frac{1}{2} t - \frac{9}{16} = 0$$

$$16 \cdot t^2 - 8t - 9 = 0$$

$$t = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 16 \cdot 9}}{16} = \frac{4 \pm 4\sqrt{10}}{16} = \frac{1 \pm \sqrt{10}}{4}$$

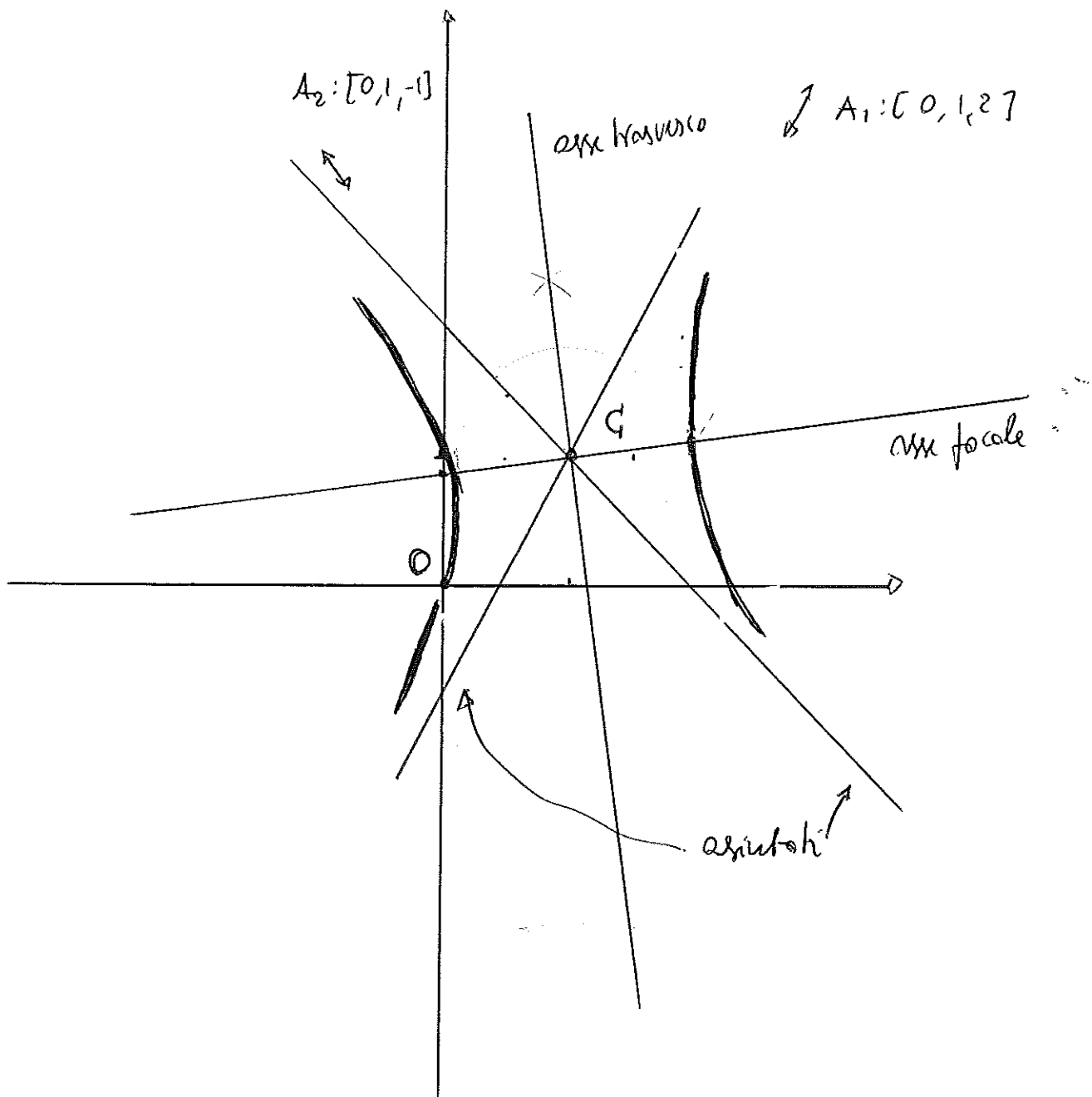
$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1 + \sqrt{10}}{4}$$

$$a = \sqrt{\frac{4}{1 + \sqrt{10}}} = \frac{2}{\sqrt{1 + \sqrt{10}}}$$

$$\frac{1}{\beta} = \frac{1 - \sqrt{10}}{4}$$

$$\beta = \frac{4}{1 - \sqrt{10}} = -b^2; \quad b^2 = \frac{4}{\sqrt{10} - 1}$$

grafico



$$y-1 = (-3 + \sqrt{10})(x-1)$$

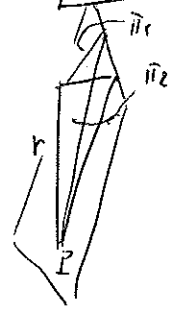
$$\begin{aligned} x=0 \quad y &= 1 + (-3 + \sqrt{10})(-1) \\ &= 1 + 3 - \sqrt{10} \\ &= 4 - \sqrt{10} \end{aligned}$$

③

7 fascio di piani di OM

22/9/09

$$\pi: \begin{cases} x - z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$



$$\lambda(x - z) + \mu(x + y) = 0 \quad (\lambda, \mu) \neq (0, 0)$$

π_1 : passapio per $P_1: (1, 0, 0)$

$$\lambda + \mu = 0$$

$$\lambda = 1$$

$$\mu = -1$$

$$x - z - (x + y) = 0$$

$$\cancel{x} - z - \cancel{x} - y = 0$$

$$\boxed{z + y = 0 \quad \pi_1}$$

π_2 passapio per $P_2: (0, 1, 0)$

$$\mu = 0$$

$$\boxed{x - z = 0 \quad \pi_2}$$

$$\pi: x + y + z = 1$$

$L \in \pi \cap r:$

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

$$z = x \quad y = -x$$

$$\cancel{x} - \cancel{x} + x = 1$$

$$x = 1$$

$$y = -1$$

$$z = 1$$

$$P: (1, -1, 1)$$

$$\rightarrow Q: (-2, 2, -2)$$

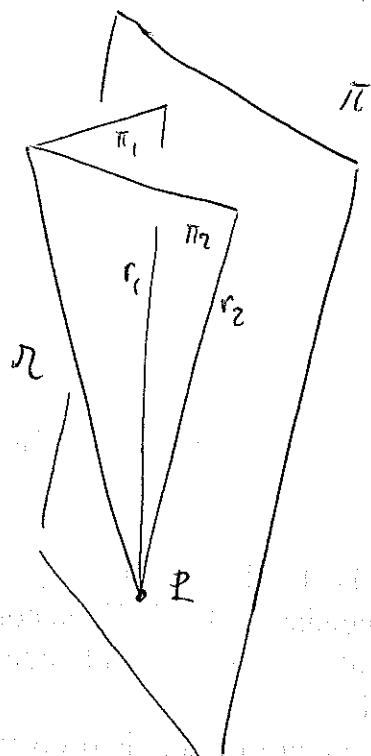
Le rette $r_1 = \pi_1 \cap \pi$

$r_2 = \pi_2 \cap \pi$

Si intende come ovviamente da $L = \pi \cap r$

poiché $r_1 \cap r_2 = \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi = r \cap \pi$

vediamolo analiticamente



$$r_1 \begin{cases} z+y=0 \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

$$r_2 \begin{cases} x-z=0 \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{cases} x-z=0 & \pi_1 \\ z+y=0 & \pi_2 \end{cases} \right\} r$$

$$\begin{cases} x+y+z=1 & \pi \end{cases}$$

$$x=z$$

$$y=-z$$

$$-x+z=1$$

$$z=1=x$$

$$y=-1$$

$$L: (1, -1, 1)$$

volume of PQ, P_1, P_2

$$P: (1, -1, 1)$$

$$Q: (-2, 2, -2)$$

$$P_1: (1, 0, 0)$$

$$P_2: (0, 1, 0)$$

$$\vec{PQ}: (-3, 3, -3)$$

$$\vec{PP_1}: (0, 1, -1)$$

$$\vec{PP_2}: (-1, 2, -1)$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{I \rightarrow I-1}$$

$$= 3 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-1 + 2) = -3$$

$$\text{Vol} = \frac{1}{6} |-3| = \frac{1}{6} \cdot 3 = \frac{1}{2}$$

(1')

Sia

$$m_{e'e'}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice dell'applicazione lineare T rispettoalla base (e'_1, e'_2, e'_3) $e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(formano eff. una base...)

troviamo quella rispetto alla base canonica

$$m_{ee}(T) = m_{ee'}(I) m_{e'e'}(T) m_{e'e}(I)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

calcoliamo

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

 $m_{e'e}(I)$

In Anf.

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \\
 & = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \right)
 \end{aligned}$$

Variazione: $\nwarrow$ comp. risp. a e'

III
 $m_{ee}(T)$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv 1 \cdot e'_1 + 0 \cdot e'_2 + 0 \cdot e'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{rispetto alla base can.}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv 1 \cdot e'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv e'_1 + e'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $\xrightarrow{T}$ la porto nella forma canonica speciale per righe

$$\begin{array}{l} (-1) \\ L \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} (-1) \\ 1 \\ L \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} \sim \\ 1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \right) \quad \checkmark$$

(2')

diagonalizzabilità

di $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

$$p_c^A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda) (\lambda^2 - 1) = -(1-\lambda)^2 (\lambda+1)$$

radici: $\lambda = -1$ $\lambda = +1$

$m_a(-1) = 1$

$m_a(1) = 2$

semplice

doppia

calcoliamo

$$r(A - I)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sim r = 2$$

$\Downarrow$

$$r = 1$$

||

$$m_g(1) = 1$$

l.o.i.

Non è diag:

$$\bar{V}_2^A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} z = 0 \\ -y + 2z = 0 \\ \frac{y}{2} - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\bar{V}_1^A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(siamo a priori !!)

$$\bar{V}^{-A}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x + z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ \frac{y}{2} + z = 0 \end{cases}$$

$$x = -\frac{z}{2}$$

$$y = -2z$$

$$z = z$$

$$\bar{V}^{-A} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{e ho preso } z = -2$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \quad \text{l.i.}$$

completiamo ad una base di $\mathbb{R}^3$

$$\text{es: } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

- info. l.i. e $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ non è C.O. di $\mathbb{R}^3$.