

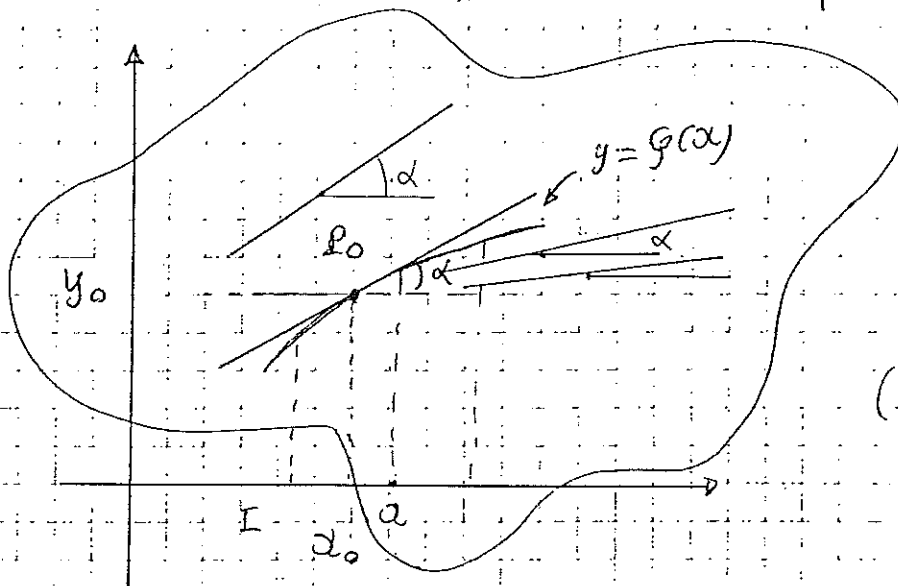
★ Equazioni differenziali ordinarie del 1° ordine

Considerazioni introduttive

GEOMETRIA
Prof. M. Spiga
Adolescenti III
Richiami di Analisi

sia $X \subset \mathbb{R}^2$ aperto,
 $m \in C^1(X)$

Campo di direzioni



$$m = \tan \alpha$$

(... rette non verticali)

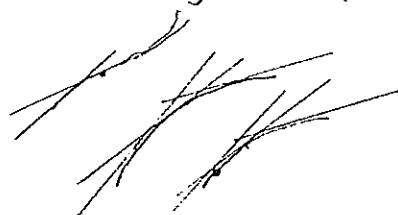
★★ Problema di Cauchy

Dato $P_0 \in X$, determinare, in un intorno I
 $y = g(x)$, $g \in C^1(I)$ tale che

$$\begin{cases} y' = m(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \begin{cases} g'(x) = m(x, g(x)) \\ g(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{equazione differenziale} \\ \text{del 1° ordine in f} \\ \text{monica} \\ \text{condizione iniziale} \end{array}$$

" ovvero: Dato un campo di direzioni, si vuole determinare una curva passante per un dato punto e tangente al campo di direzioni ... "

Varrà il ★ teorema di esistenza e unicità
(di Cauchy - Lipschitz) per il problema di C



$$C: y = g(x)$$

curva integrale

del campo vettoriale

Ora, se $m = m(x, y) = -f_y(x, y) \neq 0$

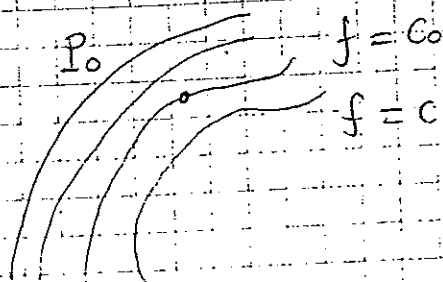
(per $f \in C^2(U)$), si avrebbe

$$g'(x) = - \frac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))}$$

→ il teorema del Dini ci consentirebbe di affermare che

" le curve integrali del campo di direzioni assegnato sono le curve di livello della funzione f

★ la sol. del problema di Cauchy è fornita implicitamente dalla $f = c_0$ passante per P_0



★★ si fa vedere che una tale f esiste sempre...

(teoria del fattore integrale ...)

★ f (determinata, se U è connesso ... a meno di una costante) è detta integrale primo

dell'equazione differenziale $y' = m(x, y)$ assegnata (... è costante lungo le soluzioni)

In fisica, f è detta potenziale ... vedi anche altre ...

* vedi altre: ulteriori elementi di topologia

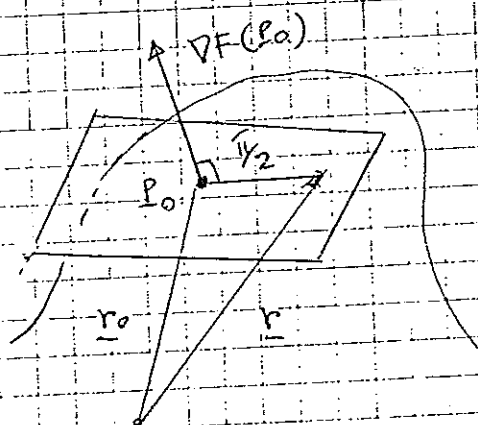
ovvero

$$z - z_0 = \varphi_x^0 (x - x_0) + \varphi_y^0 (y - y_0) :$$

con

$$\begin{cases} \varphi_x^0 (x_0, y_0) = - \frac{F_x(x_0, y_0, z_0)}{F_z(x_0, y_0, z_0)} \neq 0 \\ \varphi_y^0 (x_0, y_0) = - \frac{F_y(x_0, y_0, z_0)}{F_z(x_0, y_0, z_0)} \end{cases}$$

(... esiste anche lo calcolate)



★ ★ Osservazione

$$F \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$$

... posso calcolare

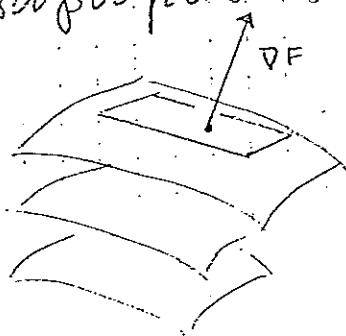
tutte le der. parziali

di g . Derivando

successivamente

$$\text{e a } F(x, y, g(x, y)) \equiv 0$$

In generale, data una famiglia di superficie
di livello $F(x, y, z) = c$, ∇F risulta
ortogonale in ogni punto al piano tangente
alla superficie di livello corrispondente.



$$f = c$$

Osservazione ... la condizione $\nabla F(P_0) \neq 0$
 fornisce in generale l'esplicitabilità rispetto a
 una delle variabili ...

★ Commento :

Sia $z = f(x, y)$ e

$$F(x, y, z) := f(x, y) - z = 0$$

$$\nabla F = (F_x, F_y, F_z) = (f_x, f_y, -1)$$

nei punti critici di f si ha $\nabla F(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

$(0, 0, -1)$ (verticale) primo tangente
on orizzontale

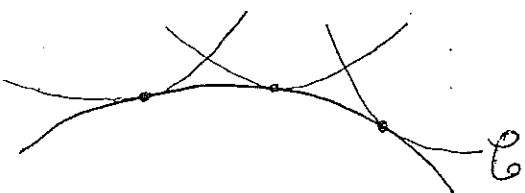
$$z = f(x, y) \quad z - f(x, y) = 0 \quad (0, 0, 1)$$

★ Involuppi di curve piane

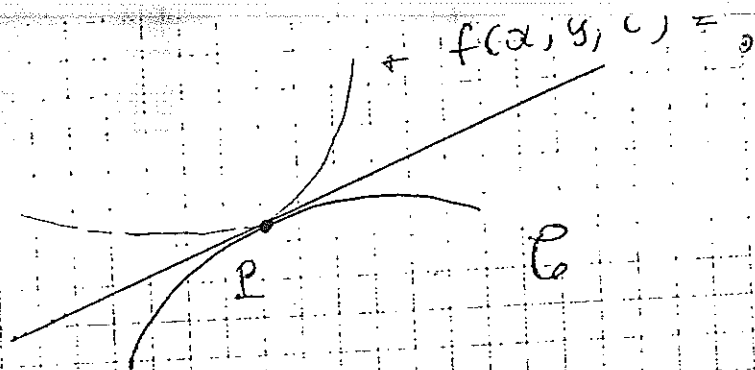
Sia $\underbrace{f(x, y, c) = 0}_{\text{parametro}}$

una famiglia di curve piane, dipendente
 dal parametro $c \in \mathbb{R}$

$$f(x, y, c) = 0$$



Dicesi inviluppo
 della famiglia data,
 (quando esiste...) una
 curva (o più curve...) tangente in un
suo qualsiasi punto ad una curva della
famiglia



Tale concetto è dovuto a C. Huygens
 governa la
propagazione della luce ("Traité de la lumière" 1690)

"... ogni punto raggiunto da un raggio
 luminoso diventa a sua volta sorgente
 e il fronte d'onda ad un istante successivo
 è l'inviluppo dei fronti d'onda emanati
 dai punti di un dato fronte d'onda..."



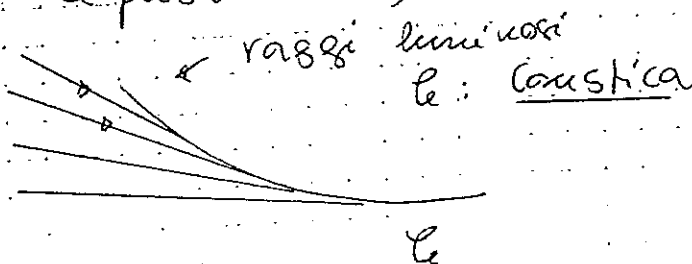
Z_0, Z_t

... inviluppo di superficie

$t > 0$

Altro esempio: ... l'arcobaleno
 (caustica di riflessione ...)

goccia



" ottica geometrica "

teoria degli strumenti ottici (... coma ...)

★ Sia $F \in C^1(U)$ $U \subset \mathbb{R}^3$ aperto
 $U \ni (x, y, c)$

Sia $P \in U$ t.c. $F(P) = 0$

e $F_c(P) \neq 0$ In virtù del teorema
 (vale anche localmente per continuità)

Allora posso esplicitare rispetto a c :

$$c = f(x, y) \quad \left/ \begin{array}{l} f = c \\ P' = (x', y') \end{array} \right.$$

ovvero: $F(x, y, c) = 0$ rappresenta una

★ famiglia di curve di livello di f .

$\Rightarrow$ non c'è inviluppo!

Questo ci conduce allo studio del luogo

$$\mathcal{C}' = \begin{cases} F(x, y, c) = 0 \\ F_c(x, y, c) = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{discriminante} \\ \text{o } c\text{-discriminante} \end{array}$$

★ Teorema (condizione sufficiente per avere
inviluppo)

Sia $F \in C^2(U)$ $P = (x_0, y_0, c_0)$

$P' = (x_0, y_0)$

• Sia $P \in \mathcal{C}'$

• Sia $\nabla F(P) = (F_x(P), F_y(P)) = 0$
 (x, y)

• $F_{cc}(P) \neq 0$ (condizione tecnica)

$\Rightarrow C'$ è localmente (nel piano...)

il multiplo cercato.

Dimostr. Considero $F_c = 0$ grazie a

$F_{cc}(P) \neq 0$ (che persiste localmente) essa
è loc. rappresentata da $C = g(x, y)$ (Dirichlet)

$\Rightarrow C' : \quad y(x, y) := F(x, y, g(x, y)) = 0$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} y_x = F_x + F_c g_x = F_x \\ y_y = F_y + F_c g_y = F_y \end{cases}$$

$\Rightarrow \nabla y \neq 0$ (con P' localmente...)

$\Rightarrow C'$ e $F(x, y, c_0) = 0$

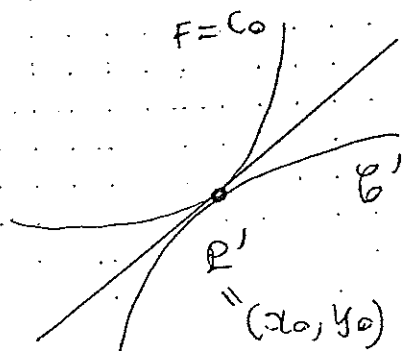
sono affinamente curve regolari (localmente)

(teorema del Dini) e hanno in P' la

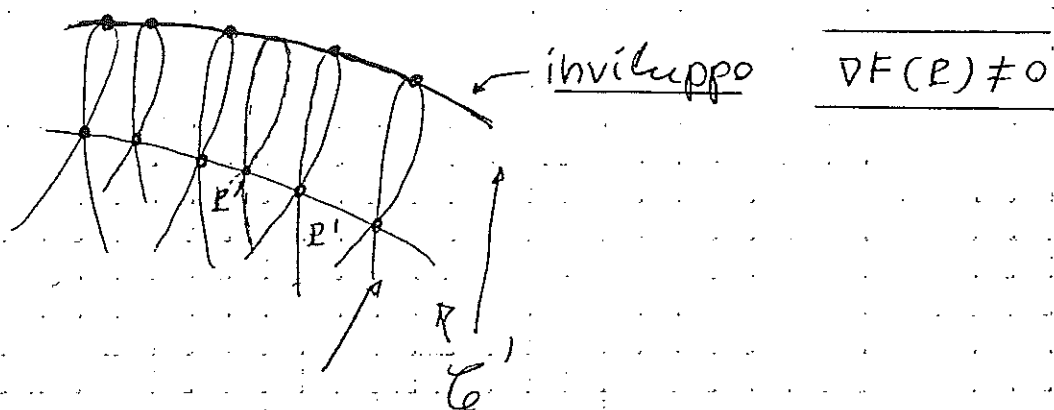
stessa tangente

$$F_x^0 (x - x_0) + F_y^0 (y - y_0) = 0$$

$$y_x^0 (x - x_0) + y_y^0 (y - y_0) = 0$$



Attenzione!: inviluppo $\subset \mathcal{C}'$ in generale



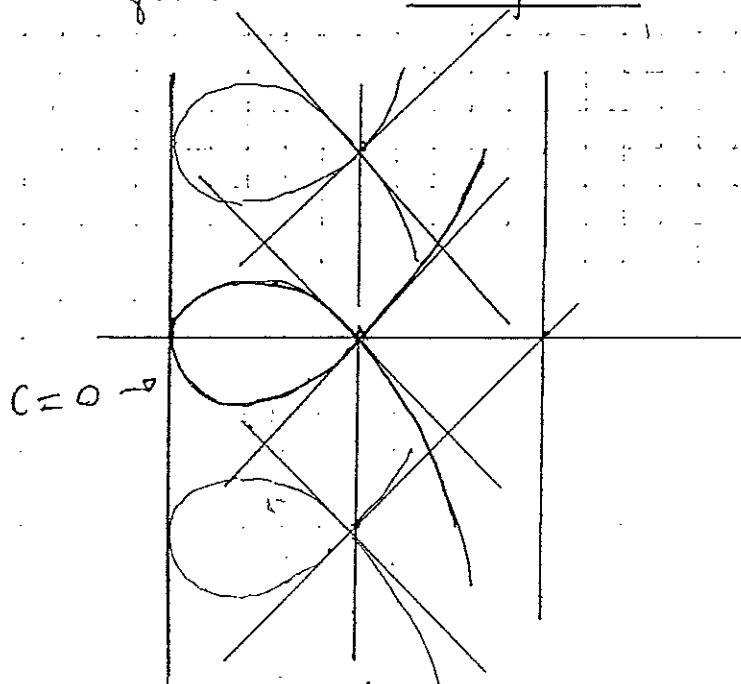
luogo di punti singolari
(in questo caso nodali) : in tali punti ∇F

Esempi

$$(a-x)(y-c)^2 = x^2(a+x) = 0$$

$$a > 0, p. 50$$

famiglia di astrofoidi



inviluppo

$$x = -a$$

luogo di nodi

$$x = 0$$

$$\mathcal{C}' = \{x = -a\} \cup \{x = 0\}$$

0 è l'unico punto singolare ...

$$C' = \begin{cases} F=0 \\ F_c=0 \end{cases}$$

$$F_c=0 \Rightarrow \dots (a-x)(c-y)=0$$

$$\Rightarrow x=a \text{ o } y=c \quad x=a \text{ si scarta } \dots$$

$y=c$, sostituito in $F=0$ da'

$$x^2(x+a)=0$$

$$x=0 \text{ due volte}$$

$$x=-a$$

$$\nabla F=0$$

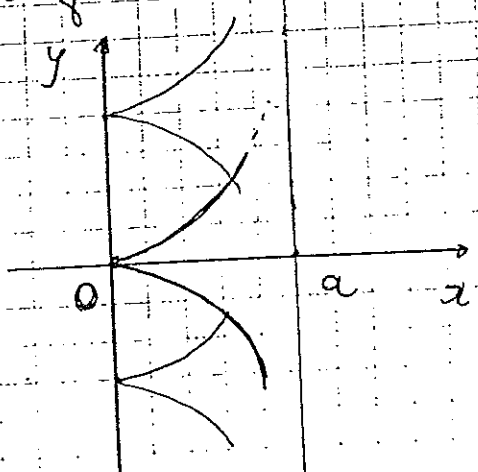
$$\nabla F \neq 0$$

inviluppo

□

$$(y-c)^2(a-x)=x^3$$

famiglia di c'issoidi



$$c=0$$

cuspide in 0

$x=0$... luogo di cuspidi

$$C' = \{x=0\} \text{ (insiemisticamente...)}$$

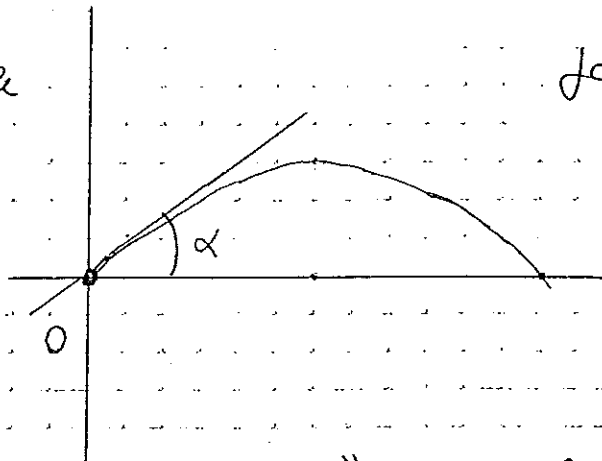
non c'è inviluppo

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

$$\equiv F(x, y, \alpha)$$

v_0 : velocità
di un proiettile

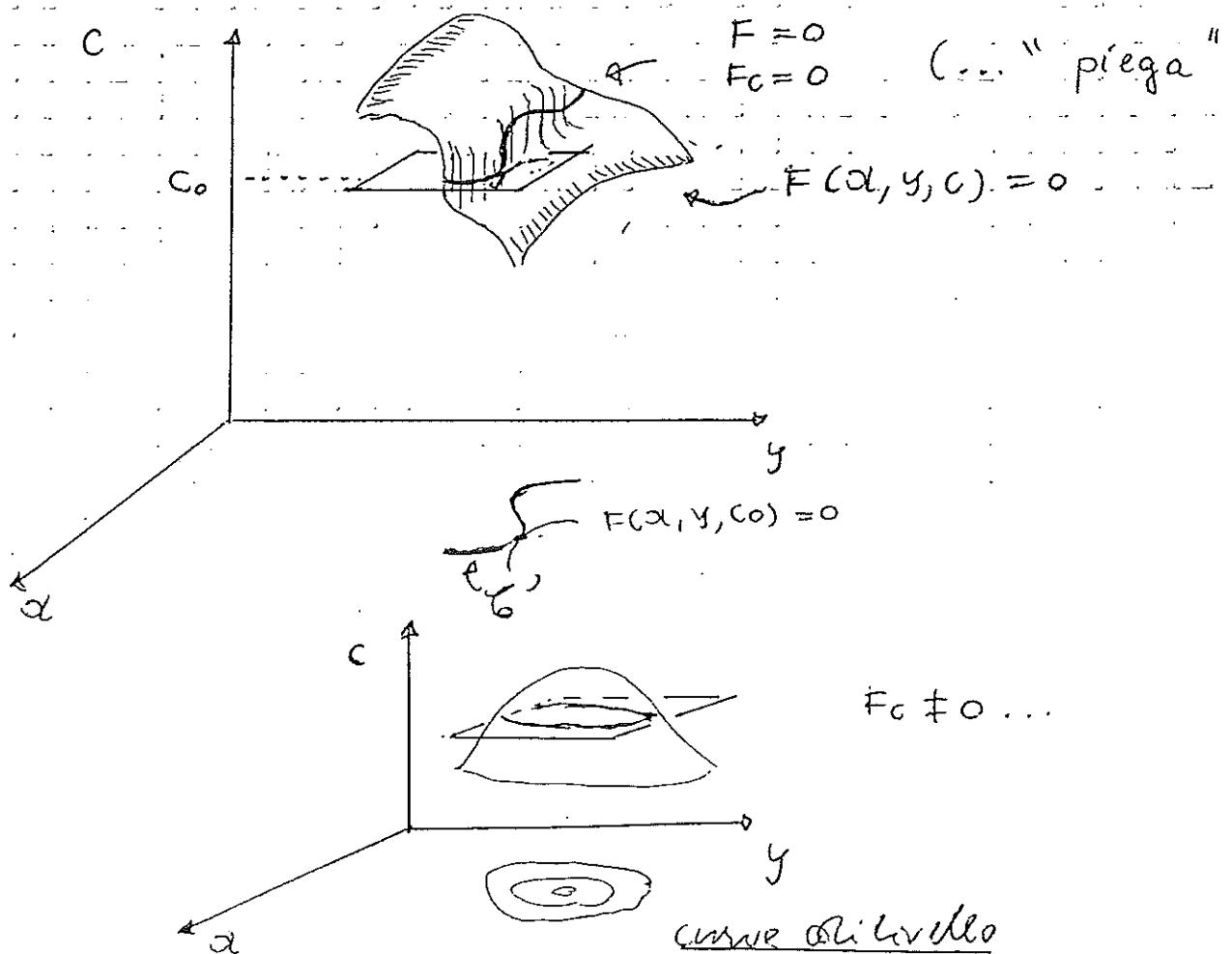
famiglia di
parabole



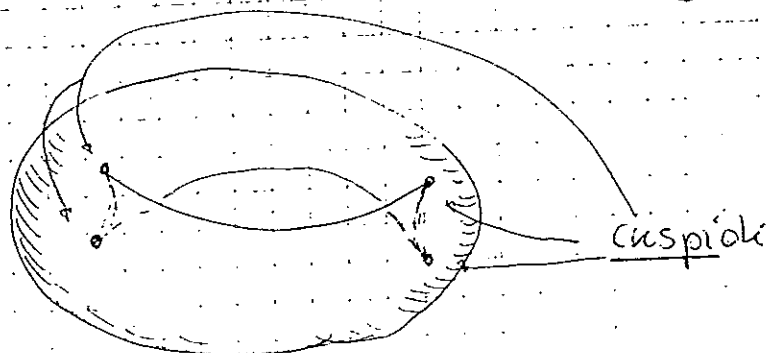
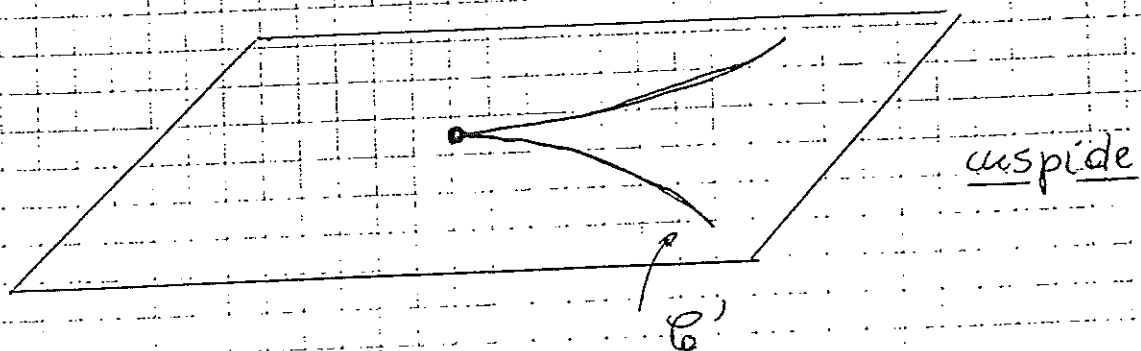
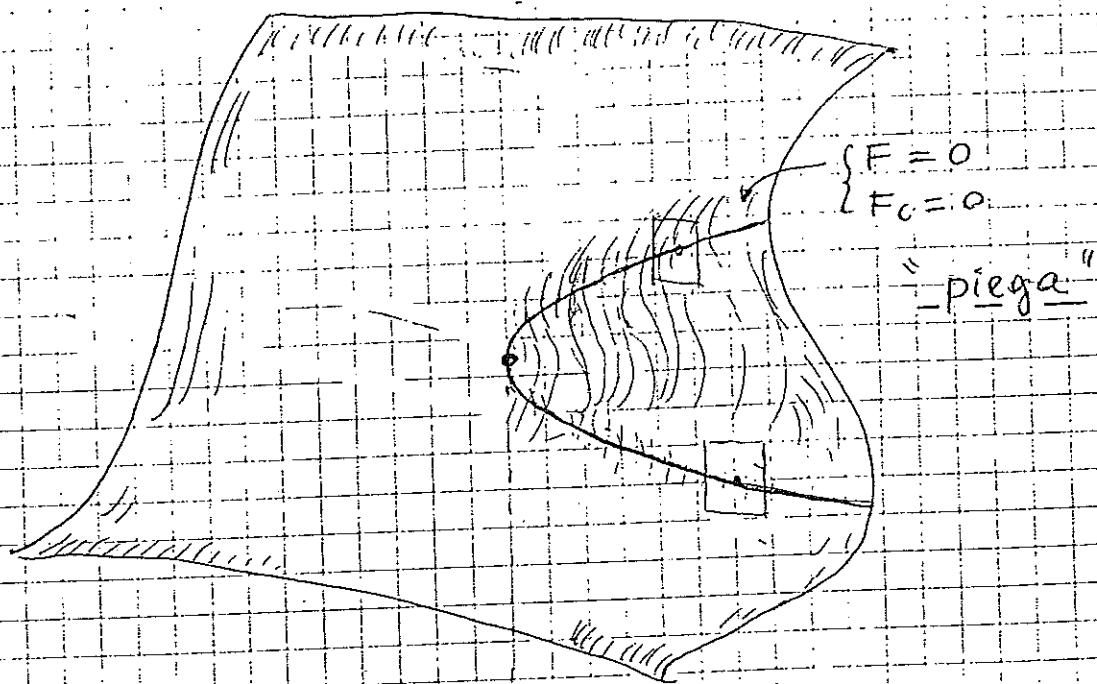
$\mathcal{C}' = \text{inviluppo} = \text{"parabola di sicurezza"}$

$$y = \frac{1}{2} \left(\frac{v_0^2}{g} - \frac{g x^2}{v_0^2} \right) \dots$$

★ comune geometrico ...



Commenti



[. . . v. V.I. Arnold - Teoria delle Catastrofi]



TRASFORMAZIONI PIANE

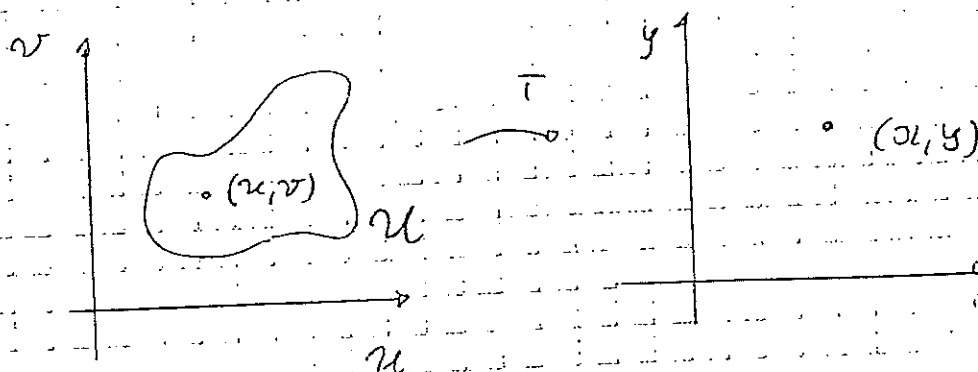
$$f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

aperto

///

T

trasformazione piana



esplicitamente:

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \in U$$

Richiediamo:

1. $T \in C^1(U)$, ovvero $x, y \in C^1(U)$
2. T iniettiva
($\Rightarrow T: U \rightarrow T(U) \subset \mathbb{R}^2$ è biunivoca.)

Definiamo la matrice Jacobiana

$$J(u, v) = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} \quad (u, v) \in U$$

chiediamo:

3. $\det J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = x_u y_v - x_v y_u \neq 0$

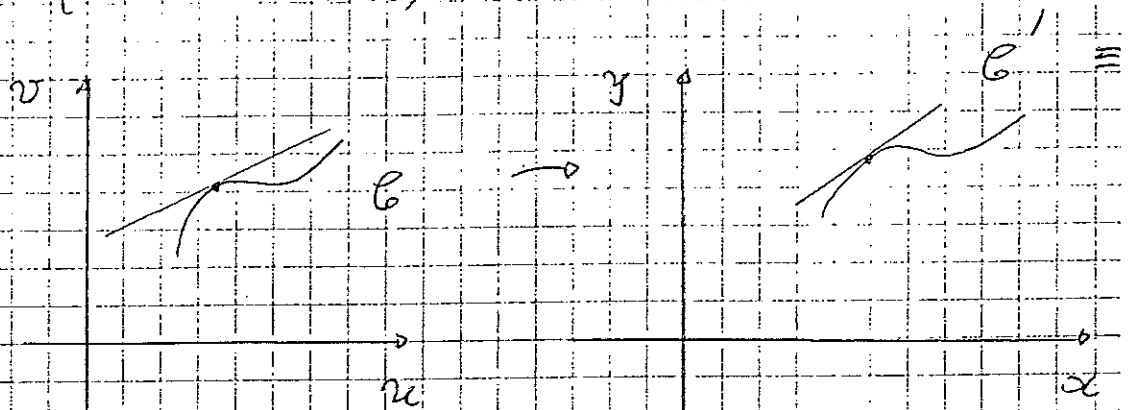
Jacobiano

una trasformazione si chiama (che gode cioè di 1, 2, 3) si dire regolare

La 3. è per ora misteriosa...

Consideriamo una curva regolare $\mathcal{C}$
nel piano (u, v)

$$\mathcal{C}: \begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases} \quad t \in I \quad \dots$$



la curva trasformata $\mathcal{C}'$ ha equazione

$$\mathcal{C}' = \begin{cases} x = x(u(t), v(t)) \\ y = y(u(t), v(t)) \end{cases} \quad t \in I$$

Si ha:

$$\begin{cases} \dot{x} = x_u \dot{u} + x_v \dot{v} \\ \dot{y} = y_u \dot{u} + y_v \dot{v} \end{cases} \quad \text{o, in forma matriciale}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix}$$

(*)

anche $\dot{\mathbf{r}} = (r_u, r_v) \cdot \mathbf{R}$

matrice Jacobiana

$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$
 $\mathbf{R} = \mathbf{R}(u, v)$

e $(\Delta u, \Delta v) \in \mathbb{R}^2$ è ... il caso particolare di differenziale di Fréchet

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix}$$

$\mathbf{R}$ calcolate in un punto

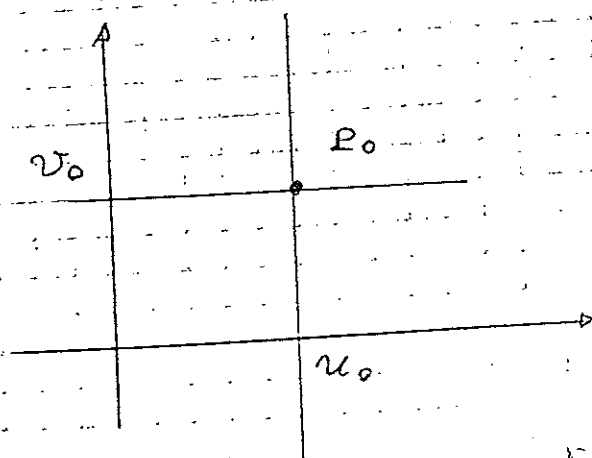
trasformazione lineare $J: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ superficie
matrice Jacobiana

La condizione 3. ci dice che J è
invertibile $\Rightarrow$

★ Il concetto di regolarità di una curva
(piana) è invariante per trasformazioni
piane regolari, ovvero,
"una trasformazione regolare muta curve
regolari in curve regolari."

Infatti $(\dot{u}, \dot{v}) \neq 0 \Leftrightarrow (\dot{x}, \dot{y}) \neq 0$

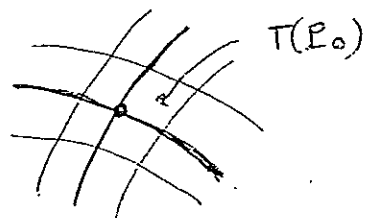
Le altre condizioni sono pure verificate $\square$



Le rette $u = u_0$
 $v = v_0$ vanno
in curve

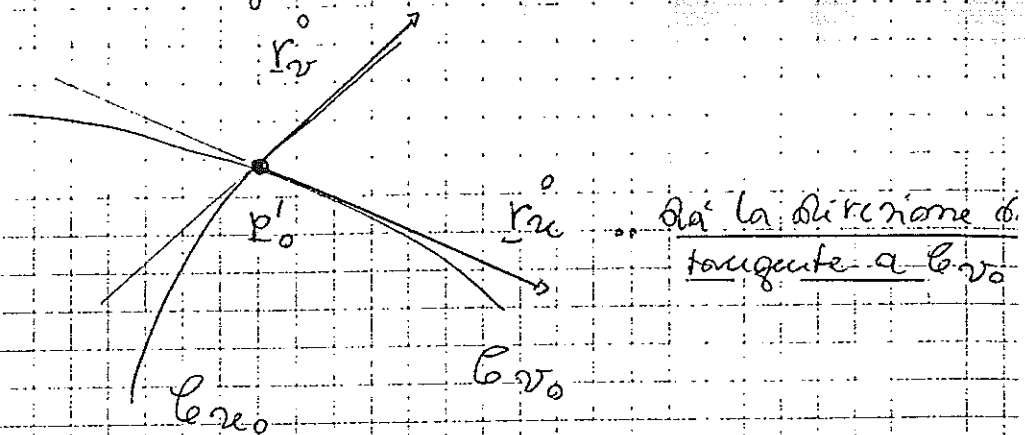
$$C_{u_0} = \begin{cases} x = x(u_0, v) \\ y = y(u_0, v) \end{cases}$$

$$C_{v_0} = \begin{cases} x = x(u, v_0) \\ y = y(u, v_0) \end{cases}$$



... al variare di u_0, v_0 ottengo
le cosiddette coordinate curvilinee (o del
piano (x, y)).

Qual è il significato di 3.?



$$\underline{r}_u^0 = (x_u(u^0, v^0), y_u(u^0, v^0)) \text{ etc...}$$

☆☆ C_{u_0} e C_{v_0} si intersecano trasversalmente
(e ciò sussiste localmente...)

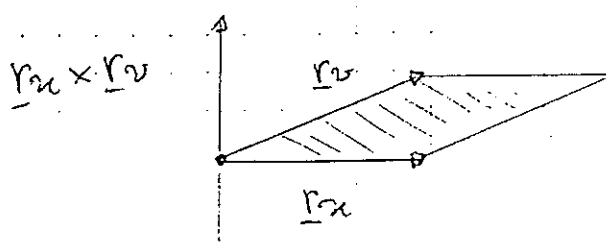
$$J = \begin{pmatrix} \underline{r}_u^0 & \underline{r}_v^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u^0 & x_v^0 \\ y_u^0 & y_v^0 \end{pmatrix}$$

☆☆ J invertibile $\Leftrightarrow \det J \neq 0 \Leftrightarrow \underline{r}_u^0$ e $\underline{r}_v^0$
sono linearmente indipendenti

... per il seguito sarà fondamentale ricordare
che

$$\star \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \text{area orientata del paralle}$$

di lati $\underline{r}_u$ e $\underline{r}_v$ = (usando una terza
dimensione fittizia) $\pm \|\underline{r}_u \times \underline{r}_v\|$



$$\|\underline{r}_u \times \underline{r}_v\| = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$$

[☆ $|\det J|$ fattore di
distorsione locale delle
aree ...]

☆☆ Teorema della funzione inversa

Sia $T : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ una trasformazione
piana $\mathbb{C}^1$, sia $P_0 \in U$ tale che

$$\det J_T(P_0) \neq 0$$

Allora T è localmente regolare, $\exists T^{-1}$
regolare, e $J_{T^{-1}} = J_T^{-1} \Rightarrow \det J_{T^{-1}}(T(P_0)) = [\det J_T(P_0)]^{-1}$

Prima del taglio... $\exists U, V$ aperti,

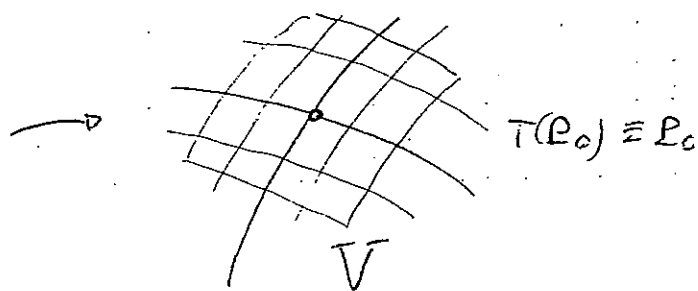
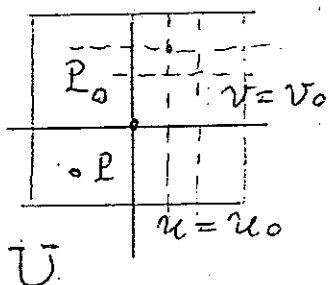
$U \ni P_0$, $V \ni T(P_0)$ tali che

$T : U \rightarrow V$ sia biunivoca,

$\det J \neq 0$ in U , e

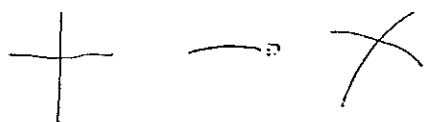
$T^{-1} : V \rightarrow U$ è pure regolare, e inoltre

"Dna." (cambio)



$$\det J(P_0) \neq 0 \Rightarrow \det J(P) \neq 0 \text{ per}$$

$P \in U$: rettangolo suff. piccolo $\Rightarrow$



rette // assi u, v
vicino in curve che

Si intersecano trasversalmente $\Rightarrow T(U) =$

V : quadrilatero curvilineo aperto

$T: U \rightarrow V$ è biunivoca, e $T^{-1}: V \rightarrow U$.

regolare la relazione tra i due jacob

è ovvia

è equivalente il teorema di Bimet

$$\left(\begin{array}{l} \det AB = \det A \det B \Rightarrow B = A^{-1} \Rightarrow \\ \det A^{-1} = (\det A)^{-1} \end{array} \right)$$

Si ha infatti:

$$(A) \quad x = x(u, v) = x(x(\alpha, y), v(\alpha, y))$$

$$(B) \quad y = y(u, v) = y(x(\alpha, y), v(\alpha, y))$$

$\Rightarrow$ derivando (A) e (B) rispetto a x e y ...

si ottiene

[Si usa il fatto che T^{-1} sono C^1]

$$1 = x_u u_x + x_v v_x$$

$$0 = x_u u_y + x_v v_y$$

$$0 = y_u u_x + y_v v_x$$

$$1 = y_u u_y + y_v v_y$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$J_T \quad J_{T^{-1}} \quad I$

$$\star \quad \frac{\partial(x, v)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(x, v)}^{-1}$$

* Osservazione

Se T è $\mathcal{C}^1$, biunivoca e con
inversa $\mathcal{C}^1$, il calcolo precedente

mostra che J_T è invertibile e $J_T^{-1} = J_{T^{-1}}$

[Si può però dare questa definizione alternativa

T è regolare (o anche "diffeomorfismo
di classe $\mathcal{C}^1$ ") se T è $\mathcal{C}^1$, biunivoca e
con inversa $\mathcal{C}^1$.

q. il teor della funzione inversa ...

Questa variante è utile in geometria differenziale

★ Esempi e controesempi

★ $\det J \neq 0 \neq$ iniettività

(cf... circonferenza descritta più volte...)
nel caso delle curve

$$T: \begin{cases} x = e^u \cos v \\ y = e^u \sin v \end{cases} \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} e^u \cos v & e^u \sin v \\ -e^u \sin v & e^u \cos v \end{pmatrix} = e^{2u}$$

ma non c'è iniettività!

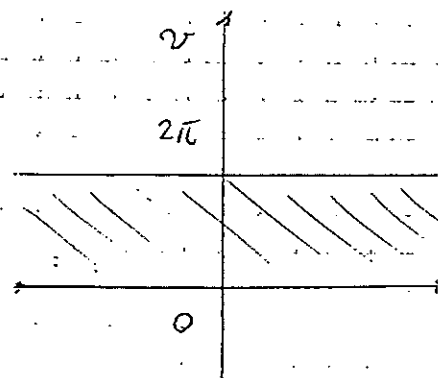
$$P_0 = (u_0, v_0) \quad P_k = (u_0, v_0 + 2k\pi)$$

$$\Rightarrow T(P_0) = T(P_k)$$

Prendo allora

$$U = \mathbb{R} \times (0, 2\pi)$$

$$(\circ \tilde{U} = \mathbb{R} \times [0, 2\pi) \\ \text{non è aperto..}$$



$$T(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2 - \{0, 0\} = T(\tilde{U}) \quad \left[\mathbb{R}^2 - \{y=0\} \right]$$

$$x^2 + y^2 = e^{2u} \Rightarrow 2u = \log(x^2 + y^2)$$

$$u = \frac{1}{2} \log x^2 + y^2 = \dots \log \rho \dots (x, y)$$

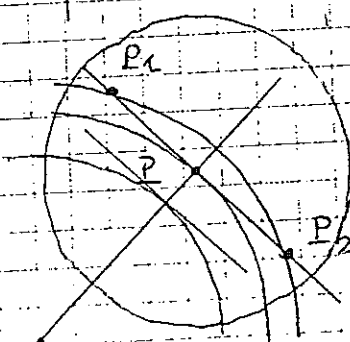
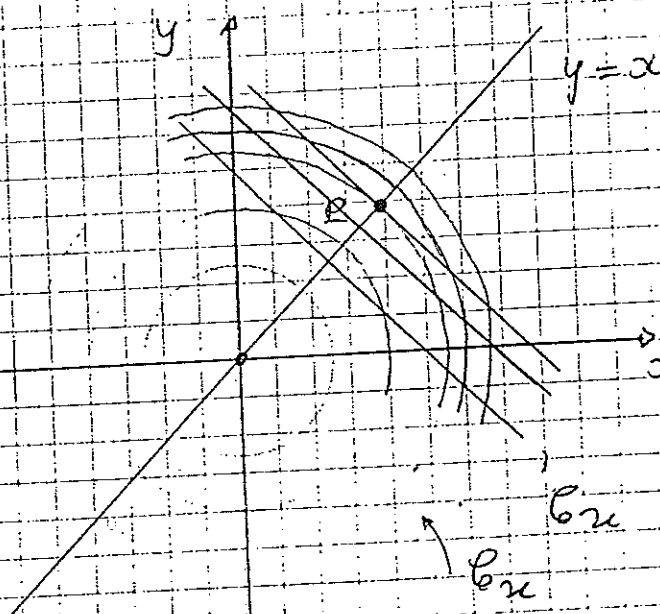
$$v = \arctg \frac{y}{x} \quad \left(= \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \dots \right)$$



$$J(P_0) = 0$$

non è garantita l'unicità della local

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x^2 + y^2 \end{cases} \quad v \geq 0$$



$$J(P) = 0$$

un qualsiasi intorno
di P , per quanto
piccolo, contiene
punti P_1, P_2 aventi
le stesse coordinate
 (x, y) .

Esempio CR

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \quad \begin{matrix} u_x^0 & v_y^0 \\ u_y^0 & -v_x^0 \end{matrix}$$

$$u(x, y) = u_0$$

$$v(x, y) = v_0$$

$$u_x^0(x - x_0) + u_y^0(y - y_0) = 0$$

$$v_x^0(x - x_0) + v_y^0(y - y_0) = 0$$

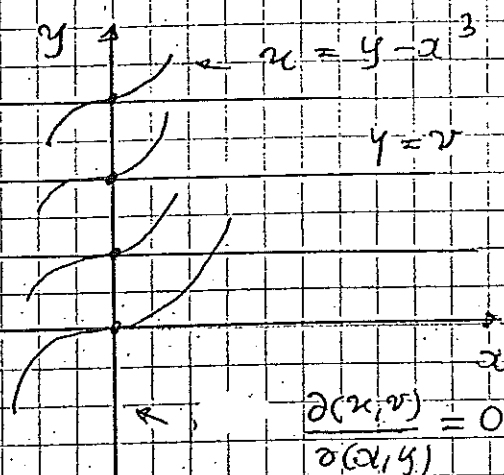
$$(l, m) \quad \nabla u, \nabla v > 0$$





Sia

$$\begin{cases} u = y - x^3 \\ v = y \end{cases}$$



la trasformazione data è globalmente invertibile

$$\begin{cases} x = (v - u)^{1/3} & (\text{def. } \sqrt[3]{\cdot} \text{ multipli}) \\ y = v \end{cases}$$

l'inversa non è $\mathcal{C}^1$ (cf. pag. 83)



con modifiche ovvie, tutto ciò si estende alle trasformazioni "spaziali"

$$T: u \in \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (\text{e in generale})$$

$$T: u \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$



Ritorniamo su tali questioni con esempi.

Esercizio

- a) Dimostrare che $C: \star (u+2v)^2 + (u-v)^2 = 1$ è una curva regolare
- b) Determinare gli eventuali pt di massimo della (della) funzione $(-i)$
 $v = g(u)$ definite da $\star$.
- c) sia $P \in C$ un tale punto.
 Data la trasformazione piana

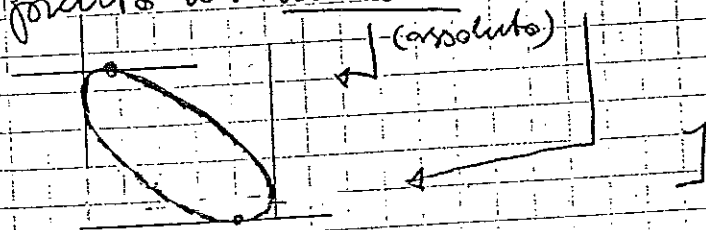
$$T: \begin{cases} x = u+2v \\ y = u-v \end{cases}$$

Calcolare la retta tangente a $T(C)$ in $T(P)$.

Soluzione [Osserviamo che C è un'ellisse.

$T(C)$ è ... circonferenza $x^2 + y^2 = 1$...

troveremo due funzioni $v = g(u)$ e un punto di massimo (e uno di minimo).



a) $f(u, v) = (u+2v)^2 + (u-v)^2 - 1 = 0$

Risolvo $\begin{cases} f = 0 \\ \nabla f = 0 \end{cases}$

$$\nabla f = 0 \Rightarrow \dots \begin{cases} 2u + v = 0 \\ u + 5v = 0 \end{cases} \Rightarrow u = v = 0$$

ma $(0,0) \notin C \Rightarrow C$ è regolare.

b)

$$f_v = 2(u + 5v) = 0 \quad u = -5v \Rightarrow$$

$$(3v)^2 + (-4v)^2 = 1$$

$$25v^2 = 1 \quad v = \pm \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow u = \mp$$

$\Rightarrow$ posso esprimere rispetto a v per

$$P'_{\frac{1}{2}} = \left(\mp \sqrt{5}, \pm \frac{\sqrt{5}}{5} \right) \quad (v = \rho(u))$$

impiego $\varphi'(u) = 0$, ovvero

$$\begin{cases} f'_u = 0 \\ f = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = -2u \\ (-3u)^2 + (3u)^2 = 1 \end{cases}$$

$$18u^2 = 1 \Rightarrow u = \pm \frac{\sqrt{2}}{6}, \quad v = \mp$$

$$\text{Se } \varphi'(u) = 0 \text{ e } \varphi''(u) = \dots = - \frac{f_{uu}(u, g(u))}{f_{vv}(u, g(u))}$$

Nel nostro caso $f_{uu} = 4$

$$\varphi''(u) = \frac{-2}{u+5v} = \frac{-2}{\pm \frac{1}{3\sqrt{2}} \mp \frac{10}{3\sqrt{2}}} = \mp \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\Rightarrow P = \left(-\frac{\sqrt{2}}{6}, +\frac{\sqrt{3}}{6} \right) \text{ è pto max.}$$

c) [Lo jacobiano della trasformazione

$$T \quad \tau = -1 - 2 = -3 \neq 0 \text{ (cost.)}$$

$\Rightarrow$ TE è regolare]

$$P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} TCE) = \dots = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Determiniamo l'eq. della retta tangente cercata in due modi:

$$(1) \quad f'_x(x_0) + f'_y(y_0) = 0$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) = 0$$

$$\Rightarrow \dots \quad y = x - \sqrt{2}$$

(2) oppure usando

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix}$$

con $t = u$ $v(t) = \varphi(u)$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\dot{u} = \frac{d}{dt}$

$$\begin{cases} x = x_0 + \dot{x}_0(t - t_0) \\ y = y_0 + \dot{y}_0(t - t_0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(u + \frac{\sqrt{2}}{6}\right) \left(= u + \frac{\sqrt{2}}{3}\right) \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(u + \frac{\sqrt{2}}{6}\right) \end{cases}$$

4

$$y = x - \sqrt{2} \quad \therefore y = x - \sqrt{2}$$

□