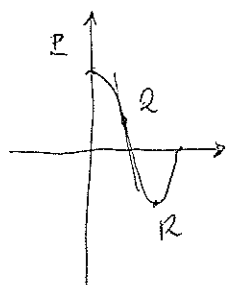


Prova scritta del 1° Settembre 2011

- ① Sia Z la superficie ottenuta ruotando la curva $z = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$ $x > 0$ attorno all'asse z ("sombbrero")



Calcolare la
curvatura gaussiana
in P, Q, R

Cosa si può dire di K in generale?

con rif. all'us. 1

- ② Calcolare la curvatura geodetica del parallelo per Q .
Calcolare l'angolo di trasp. parallelo del vettore tangente al parallelo stesso (lungo il parallelo).

- ③ Sia $X = \{1, 2, 3\}$; $\mathcal{C} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$

Dire se $\mathcal{C}$ è una topologia su X .

È di Hausdorff?

Dire se $(X, \mathcal{C}) \approx (X, \mathcal{C}_{banale})$

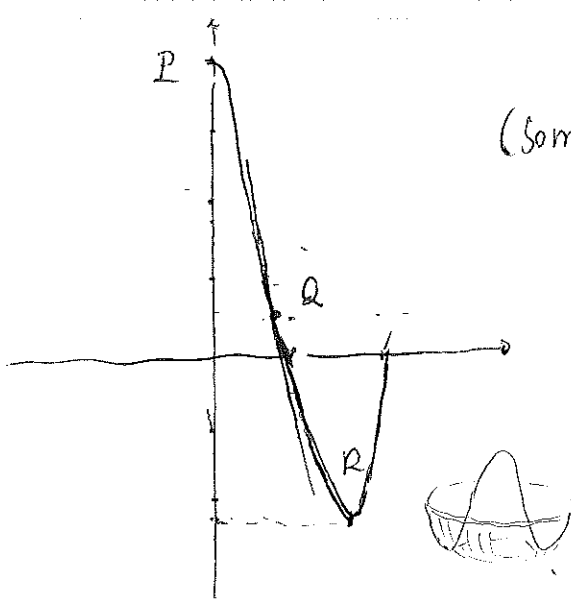
e se $(X, \mathcal{C}) \approx (X, \mathcal{C}_{discreta})$

Tempo a disposizione: 2h

Le risposte vanno adeguatamente giustificate

(Sombbrero)

①



$$z = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$$

$$x > 0$$

A R

Calcolare K in P, Q, R .

in P .

$$z'(0) = 0$$

$$z''(0) = -10$$

= valore di tracce e curvature

normali (punto ombelicale).

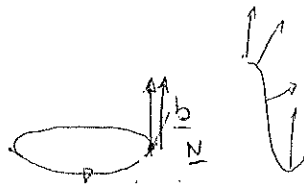
$$K = R_1 R_2 = R_1^2 = (-10)^2 = 100$$

in Q

curvatura del meridiano:

$$z''\left(\frac{5}{6}\right) = 0 \Rightarrow K = 0$$

in R



$$|K_g| = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$= R \Rightarrow R_n = 0$$

$\Rightarrow$ una delle curv. principali $\hat{z} = 0$

$$\Rightarrow K = 0$$

in generale si ha $K \geq 0$

$$1 = \frac{d}{dx}$$

$$z' = 2x(x^2 - 4)$$

$$+ (x^2 - 1) \cdot 2x$$

$$= 2x(x^2 - 4 + x^2 - 1)$$

$$= 2x(2x^2 - 5)$$

$$z'' = 2(2x^2 - 5)$$

$$+ 2x(4x) =$$

$$= 4x^2 - 10 + 8x^2$$

$$= 12x^2 - 10$$

$$= 2(6x^2 - 5)$$

$$z'' = 0 \quad x = \sqrt{\frac{5}{6}}$$

$$z = \left(\frac{5}{6} - 1\right)\left(\frac{5}{6} - 4\right) =$$

$$= \left(-\frac{1}{6}\right)\left(-\frac{19}{6}\right) = \frac{19}{36}$$

$$z' = 2\sqrt{\frac{5}{6}}\left(2 \cdot \frac{5}{6} - 5\right) = 2\sqrt{\frac{5}{6}} \cdot \left(-\frac{20}{6}\right) = -\frac{20}{3}\sqrt{\frac{5}{6}}$$

$$z' = 0 \Rightarrow x = 0, \quad x = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$z\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right) = \left(\frac{5}{2} - 1\right)\left(\frac{5}{2} - 4\right) =$$

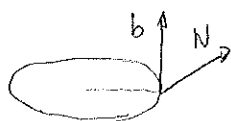
$$= \left(\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{4}$$

2

Curvatura geodetica del parallelo per Q

geometria

4/9/11



$$R = \sqrt{\frac{6}{5}}$$

$$\underline{b} = (0, 0, 1)$$

troviamo $\underline{N}$.

$$z' \left(\sqrt{\frac{5}{6}} \right) = 2 \sqrt{\frac{5}{6}} \left(2 \frac{5}{6} - 5 \right)$$

$$\frac{11}{m} = 2 \sqrt{\frac{5}{6}} \left(\frac{5}{3} - 5 \right) =$$

$$= 2 \sqrt{\frac{5}{6}} \left(-\frac{10}{3} \right) = -\frac{20}{3} \sqrt{\frac{5}{6}}$$

$$\text{troviamo } m^{\perp} = -\frac{1}{m} = +\sqrt{\frac{6}{5}} \frac{3}{20}$$

$$\underline{N} \propto \left(1, 0, \sqrt{\frac{6}{5}} \frac{3}{20} \right)$$

normalizziamo

in Q

$$1+m^2 = 1 + \frac{6}{5} \cdot \frac{3^2}{20^2} = \frac{5 \cdot 20^2 + 6 \cdot 3^2}{5 \cdot 20^2} =$$

$$= \frac{2000 + 54}{2000} = \frac{2054}{2000} = \frac{1027}{1000}$$

$$\sqrt{\quad} =$$

$$\underline{N} = \left(\sqrt{\frac{1000}{1027}}, 0, \sqrt{\frac{6}{5}} \frac{3}{20} \sqrt{\quad} \right)$$

$$\sqrt{\frac{1027}{1000}}$$

$$= \frac{\sqrt{1027}}{10 \sqrt{10}}$$

$$\langle \underline{b}, \underline{N} \rangle = \sqrt{\frac{6}{5}} \cdot \frac{3}{20} \sqrt{\frac{1000}{1027}} = \sqrt{\frac{6}{5}} \cdot \frac{3}{20} \cdot \frac{10 \sqrt{10}}{\sqrt{1027}} =$$

$$= \frac{3}{2} \sqrt{\frac{6}{5} \cdot \frac{10}{1027}} = \left(\frac{3}{2} \sqrt{\frac{12}{1027}} \right) = \frac{3 \sqrt{3}}{\sqrt{1027}}$$

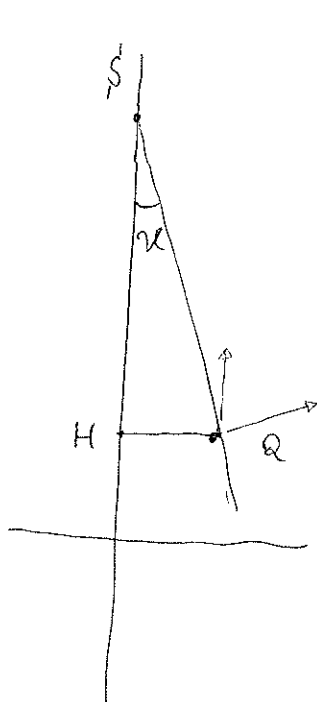
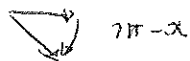
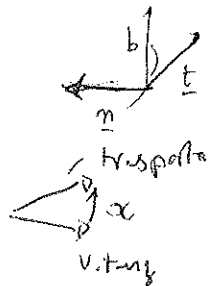
$$R_g = \sqrt{\frac{6}{5}} \cdot \langle \underline{b}, \underline{N} \rangle = \sqrt{\frac{6}{5}} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{1027}} = 3 \sqrt{\frac{18}{5 \cdot 1027}}$$

$$\int R_g ds = \int_0^{2\pi} 3 \sqrt{\frac{18}{5 \cdot 1027}} \cdot \sqrt{\frac{5}{6}} \cdot d\phi = 2\pi \cdot 3 \sqrt{\frac{3}{1027}}$$

controllo

$$\alpha = 2\pi(1 - \sin \chi)$$

OK $\beta \leftrightarrow 2\pi - \beta$



$$\sin \chi = \frac{\overline{QH}}{\overline{SQ}}$$

$$z - z_Q = z'_Q (\alpha - \alpha_Q) \text{ tangente}$$

$$\alpha = 0 \Rightarrow$$

$$z'_S = z_Q - z'_Q \cdot \alpha_Q$$

$$z'_S = \frac{19}{36} - 2 \sqrt{\frac{5}{6}} \left(2 \frac{5}{6} - 5 \right) \cdot \sqrt{\frac{5}{6}}$$

$$= \frac{19}{36} - 2 \cdot \frac{5}{6} \cdot \left(-\frac{20}{6} \right) = \frac{19}{36} + \frac{200}{36} = \frac{219}{36}$$

$$\overline{SQ}^2 = \overline{SH}^2 + \overline{QH}^2$$

$$\overline{SH} = \frac{219}{36} - \frac{19}{36} = \frac{200}{36} = \frac{50}{9}$$

$$\overline{SQ} = \sqrt{\frac{2500}{81} + \frac{5}{6}} = \sqrt{\frac{27 \cdot 3}{81 \cdot 2}}$$

$$= \sqrt{\frac{5000 + 27 \cdot 5}{81 \cdot 2}} = \sqrt{\frac{5135}{81 \cdot 2}}$$

$$\frac{\overline{QH}}{\overline{SQ}} = \sqrt{\frac{5}{6}} \cdot \sqrt{\frac{81 \cdot 2}{1027 \cdot 5}} = \sqrt{\frac{27}{1027}} = 3 \sqrt{\frac{3}{1027}}$$

$$(3) \quad X = \{1, 2, 3\}$$

$$\tau = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \underbrace{\{1, 2, 3\}}_X \}$$

τ è una topologia (gli assiomi sono verificati);

non è di Hausdorff: l'unico intorno di 3 è X , che interseca tutti i possibili intorni di 1 e 2.

$$(X, \tau) \simeq (X, \tau_{\text{discreto}}) \quad ? \quad \text{NO} : \text{la top. discreta è di Hausdorff, } \tau \text{ no.}$$

$$(X, \tau) \simeq (X, \tau_{\text{banale}}) \quad ?$$

NO: se esistesse f omeom., $\{1\} \ni 1, \{2\} \ni 2$
 $f: (X, \tau) \rightarrow (X, \tau_{\text{banale}})$

Sarebbero inviati in intorni disgiunti contenenti $f(1)$ e $f(2)$, ma ciò non è possibile poiché l'unico aperto non vuoto che li contiene è X stesso.