

Accuratezza di uno strumento

Come abbiamo già accennato la volta scorsa, il risultato della misurazione di una grandezza fisica, qualsiasi sia lo strumento utilizzato, non è mai un valore numerico X univocamente definito.

Ogni strumento infatti è caratterizzato da una risoluzione di lettura finita ΔX , per cui non è in grado di fornire informazioni su variazioni della grandezza inferiori a ΔX .

Per effetto della risoluzione finita, il risultato di una singola misurazione è pertanto un intervallo continuo di valori, di ampiezza pari a ΔX .

Per convenzione, la misura di una grandezza fisica viene generalmente espressa nella forma:

$$X = X_0 \pm \delta X$$

dove X_0 è un valore centrale che individua la posizione dell'intervallo di valori sull'asse X e δX è l'incertezza dovuta alla risoluzione di lettura.

Per il momento opereremo la scelta, del tutto ragionevole, di esprimere l'incertezza dovuta alla risoluzione come

$$\delta X = \Delta X/2$$

Nel seguito riprenderemo in considerazione l'argomento in modo più approfondito e vedremo che in molti casi può essere più conveniente esprimere l'incertezza dovuta alla risoluzione in modo diverso.

Negli strumenti digitali il valore centrale X_0 è dato direttamente dal valore che compare sul visualizzatore. La risoluzione ΔX e l'incertezza δX sono date rispettivamente dal valore unitario della cifra meno significativa (LSD) e dal valore della metà della cifra meno significativa.

Esempio: Si misura un intervallo di tempo τ con un cronometro digitale. Sul visualizzatore si legge 34.27 s. Il valore unitario della LSD è 0.01 s, cioè un centesimo di secondo. La misura va espressa come $\tau = (34.27 \pm 0.005) s$.

Negli strumenti analogici la valutazione del valore centrale X_0 può essere diversa a seconda che l'estremo dell'oggetto da misurare (ovvero l'indice mobile su un visualizzatore) sia in prossimità di una incisione sulla scala graduata oppure cada all'incirca a metà tra due incisioni.

Le due situazioni sono esemplificate nella Figura qui sotto.

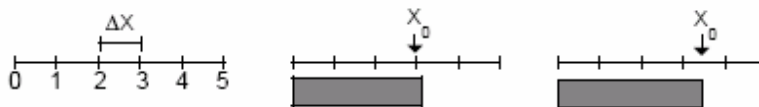


Figura – Misurazione con uno strumento analogico. A sinistra: rappresentazione schematica di una scala graduata, con $\Delta X = 1$ (le unità di misura dipendono ovviamente dal tipo di grandezza misurata e dalle caratteristiche dello strumento). Nella situazione rappresentata al centro, $X=3\pm 0.5$. Nella situazione rappresentata a destra, $X=3.5\pm 0.5$.

Nel primo caso il valore X_0 verrà letto direttamente sulla scala graduata; nel secondo caso si potrà attribuire a X_0 un valore intermedio rispetto ai valori delle due incisioni contigue.

Non è comunque prudente considerare una risoluzione ΔX inferiore alla distanza tra due tacche contigue, anche se quest'operazione potrebbe talora sembrare plausibile.

Esempio: Si misura l'altezza di un foglio di quaderno con una riga millimetrata. L'estremità del foglio appare equidistante dalle due tacche contigue corrispondenti a 296 e 297 mm.

E' plausibile considerare come valore centrale $X_0 = 296.5 \text{ mm}$, ma può essere imprudente assumere una risoluzione inferiore alla distanza tra incisioni contigue ($\Delta X = 1 \text{ mm}$).

La misura dell'altezza del foglio di quaderno sarà quindi espressa nella forma:

$$X = 296.5 \pm 0.5 \text{ mm}$$

Oltre alla risoluzione finita dello strumento, altri fattori possono influenzare il risultato e la qualità di una misura.

Si tratta di fattori dipendenti dalla struttura dello strumento, dall'accuratezza della sua costruzione, dallo stato di manutenzione, dall'influenza di fattori ambientali, etc.

Ne elenchiamo alcuni a titolo di esempio:

- difetti nella taratura (scarsa accuratezza del campione di riferimento, inaccurata procedura di taratura, etc.);
- difetti di calibrazione dello zero (ad es., negli strumenti elettronici lo zero subisce spesso una deriva nel tempo);
- attriti o giochi meccanici;
- effetti di grandezze d'influenza diverse dalla grandezza che si vuole misurare, ad es. temperatura, umidità, vibrazioni meccaniche, campi elettrici o magnetici, variazioni della tensione di alimentazione.

In genere, gli effetti di questi diversi fattori sulle prestazioni di uno strumento vengono divisi in due categorie:

a) Si parla di **errori sistematici** per gli effetti che si riproducono sempre nello stesso modo ogniqualvolta viene ripetuta una misurazione della stessa grandezza fisica.

b) Si parla di **errori casuali (o accidentali)** per gli effetti che si manifestano in modo diverso ed imprevedibile quando la misura di una grandezza fisica viene ripetuta.

Talora è necessario anche considerare la stabilità cioè l'attitudine di uno strumento a fornire risultati poco dispersi in misurazioni ripetute sulla stessa grandezza ad intervalli di tempo lunghi rispetto alla durata di una singola misurazione (ad esempio giorni o settimane).

Con il termine **accuratezza** si fa riferimento alla qualità globale di uno strumento.

L'accuratezza di uno strumento dipende dalla risoluzione di lettura, dall'influenza degli errori sistematici e casuali, dalla stabilità a lungo periodo.

L'accuratezza di uno strumento viene generalmente quotata nel manuale d'uso come un valore numerico di incertezza della misura, ossia nella forma $\pm \delta X$.

Se l'accuratezza non viene esplicitamente indicata sullo strumento o nel manuale d'uso, si sottintende che gli effetti degli errori sistematici e casuali e dell'instabilità a lungo periodo sono trascurabili rispetto alla risoluzione ΔX . In tal caso, come abbiamo già visto, si pone generalmente $\delta X = \Delta X/2$.

Esempio: Nei metri a nastro di uso corrente, con risoluzione di lettura $\Delta X = 1 \text{ mm}$, non viene generalmente indicata l'accuratezza. Ciò significa che il costruttore garantisce che gli errori dovuti allo strumento non sono comunque superiori ad 1 mm.

Esempio: Nel manuale d'uso di un termometro digitale con risoluzione di lettura $DT = 0.1^\circ\text{C}$, l'accuratezza è quotata come $\Delta T = \pm 0.4^\circ\text{C}$ tra -25 e $+75^\circ\text{C}$. Evidentemente in questo caso l'incertezza globale δT è maggiore della risoluzione.

In questo paragrafo abbiamo introdotto, in modo piuttosto veloce, alcuni concetti molto importanti per la valutazione dell'accuratezza degli strumenti (effetti di risoluzione, errori casuali, errori sistematici).

Come vedremo qui di seguito, l'incertezza di una misura non dipende solo dalle caratteristiche intrinseche degli strumenti utilizzati ma anche da molti altri fattori esterni agli strumenti stessi. Inoltre sempre qui di seguito, affronteremo pertanto il problema dell'accuratezza delle misurazioni da un punto di vista più generale, e cercheremo di approfondire in modo sistematico le problematiche introdotte più sopra.

ERRORI CASUALI

A) Misurazioni ripetute

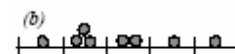
Supponiamo di ripetere più volte la misurazione di una stessa grandezza fisica costante nel tempo.

Si possono presentare due casi:

(a) misure successive cadono nello stesso intervallo di risoluzione;



(b) misure successive cadono in modo casuale e imprevedibile in intervalli di risoluzione differenti.



Esempio 1: Si misura l'altezza di un foglio di quaderno con una riga millimetrata. La risoluzione è $\Delta X = 1 \text{ mm}$. Ripetendo più volte la misurazione si ottengono valori compresi sempre entro lo stesso intervallo di risoluzione (caso a).

Esempio 2: Si misura il periodo di oscillazione di un pendolo con un cronometro digitale centesimale azionato manualmente. La risoluzione è $\Delta t = 0.01 \text{ s}$. Ripetendo la misurazione si ottengono valori di volta in volta diversi, che cadono in diversi intervalli di risoluzione (caso b).

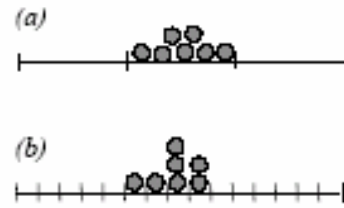
Nel caso (a) l'incertezza ΔX del valore di misura è legata direttamente alla risoluzione ΔX ; per cui si avrà $\delta X_{ris} = \Delta X/2$ (incertezza massima).

Nel caso (b) le discrepanze tra misurazioni diverse della stessa grandezza sono da attribuire all'azione simultanea e casuale di molti piccoli fattori, ciascuno dei quali influisce in modo diverso su ogni singola misura. Ad esempio:

- errori di lettura: carenza di potere separatore dell'occhio, errori di parallasse, errori di interpolazione, errori di sincronizzazione, etc.;
- rumore di fondo, cioè l'effetto di variazioni molto piccole e casuali delle grandezze d'influenza (temperatura, pressione, umidità, vibrazioni, etc.);
- errori d'inversione (differenza tra misure eseguite mentre il valore della grandezza sta crescendo oppure sta diminuendo).

Si dice in questo caso che le misure sono affette da errori casuali ,che provocano un'incertezza superiore a quella dovuta alla risoluzione.

In realtà, si può assumere che gli errori casuali siano sempre presenti in una misurazione. Il loro effetto però non appare se è globalmente inferiore alla risoluzione della misura (caso a). Se tuttavia la risoluzione viene ridotta, utilizzando uno strumento con risoluzione inferiore o modificando la metodologia della misurazione, l'effetto degli errori casuali diviene comunque evidente (caso b).



Nel seguito ci occuperemo solo di casi in cui l'effetto degli errori casuali prevale sulla risoluzione della misura, ed affronteremo il seguente problema: come si può valutare quantitativamente l'incertezza dovuta agli errori casuali, in modo da poter ancora esprimere il risultato di una misurazione nella forma $X_0 \pm \delta X$?

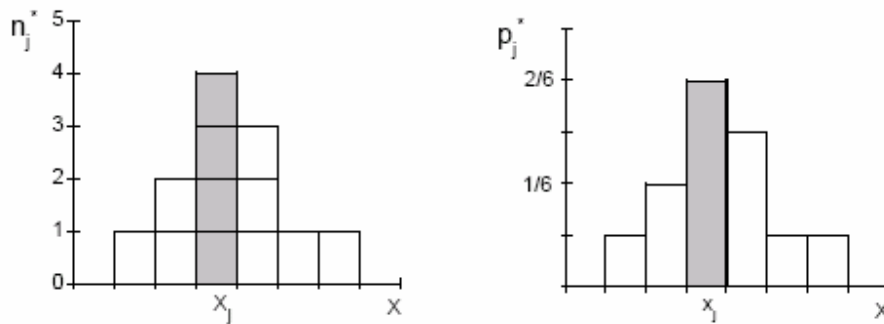
A questo scopo, dovremo prima imparare alcune tecniche per la visualizzazione ed il trattamento dei dati sperimentali (istogrammi e loro parametri statistici) e quindi introdurre il concetto fondamentale di distribuzione limite.

B) Iistogrammi

Supponiamo di avere misurato N volte la stessa grandezza fisica X . Il risultato di ogni misurazione sarà individuato da un indice i ($i = 1 \dots N$) e da un valore x_i che rappresenta il centro dell'intervallo di risoluzione corrispondente alla misura i -ma.

Può succedere che misure diverse (valori diversi dell'indice i) cadano nello stesso intervallo di risoluzione.

Per rappresentare convenientemente questa situazione si disegna in genere un istogramma (Fig. sotto).



A sinistra: un istogramma relativo a $N = 12$ misure; l'altezza della colonna j -ma rappresenta il numero n_j^* di misure con valore x_j . A destra: il corrispondente istogramma normalizzato in altezza; l'altezza della colonna j -ma rappresenta la frequenza campionaria $p_j^* = n_j^*/N$

Ogni colonna dell'istogramma ha una base di larghezza ΔX pari alla risoluzione delle misure. Individueremo le colonne dell'istogramma con un indice j . L'altezza della colonna j -ma sarà proporzionale al numero n_j^* di valori di misura caduti nell'intervallo j -mo (Figura sopra, a sinistra). Se indichiamo con N (i.e.: Nstorto) il numero di colonne dell'istogramma, è evidente che:

$$\sum_{j=1}^N n_j^* = N.$$

L'altezza delle colonne di un istogramma dipende dal numero totale N di misure. Per confrontare istogrammi relativi a numeri N di misure diversi è conveniente normalizzarli in altezza. In un **istogramma normalizzato in altezza** (Figura sopra, a destra) l'altezza di ogni colonna è proporzionale alla *frequenza campionaria* p_j^* :

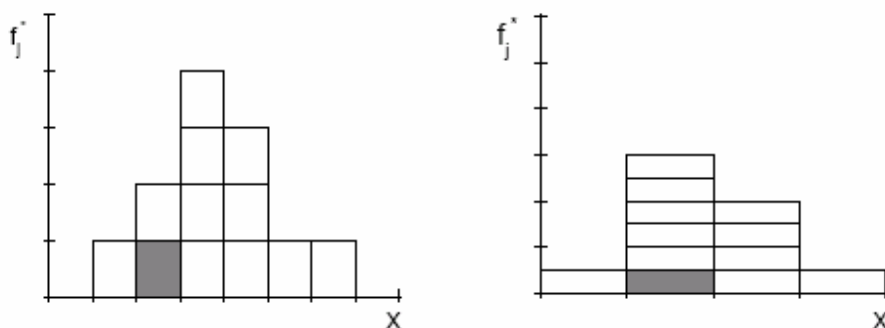
$$p_j^* = n_j^* / N.$$

E' facile verificare che, qualunque sia il numero N di misure,

$$\sum_{j=1}^N p_j^* = 1.$$

Talvolta può essere necessario confrontare due insiemi di misurazioni della stessa grandezza eseguiti con risoluzioni diverse. I due istogrammi hanno colonne con basi ΔX diverse. E' allora necessario ricorrere alla normalizzazione in area. In un **istogramma normalizzato in area** (a sinistra) l'altezza di ogni colonna è proporzionale alla *densità campionaria*

$$f_j^* = \frac{n_j^*}{N \Delta X_j}.$$



Confronto tra due istogrammi normalizzati in area. I due istogrammi si riferiscono allo stesso insieme di misure: nell'istogramma di destra le misure sono state raggruppate in colonne di larghezza doppia rispetto alle colonne dell'istogramma di sinistra.

E' facile verificare che, qualunque sia il numero N di misure, l'area totale delle colonne è sempre unitaria:

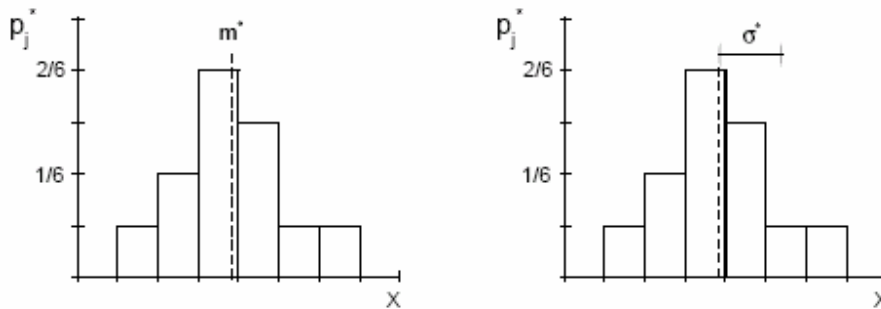
$$\sum_{j=1}^N f_j^* \Delta X_j = 1.$$

Nota Bene: La *frequenza campionaria* p^* è sempre una quantità a-dimensionale.

La *densità campionaria* f^* ha invece sempre le dimensioni dell'inverso della grandezza X .

C) Parametri statistici di un istogramma

Un istogramma contiene tutta l'informazione ottenibile da un insieme di N misurazioni di una grandezza fisica. In molti casi, ad esempio per esprimere il risultato di una misurazione affetta da errori casuali, è sufficiente sintetizzare le principali caratteristiche di un istogramma per mezzo di pochi parametri numerici. Ci limiteremo qui a considerare due soli parametri: il primo individua la *posizione media* m^* dell'istogramma sull'asse dei valori x della grandezza fisica, il secondo descrive la *dispersione dei valori* σ^* misurati.



Valor medio (a sinistra) e scarto quadratico medio (a destra) di un istogramma.

Parametro di posizione

La posizione dell'istogramma è individuata dal *valor medio campionario* m^* (Figura sopra, a sinistra), calcolato come la media aritmetica degli N valori x_i misurati:

$$m^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i.$$

Alternativamente possiamo eseguire la somma, anziché su tutti gli N valori misurati, sulle N (i.e.: N storto) colonne dell'istogramma, caratterizzate dalle frequenze campionarie p_j^* :

$$m^* = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j n_j^* = \sum_{j=1}^N x_j \frac{n_j^*}{N} = \sum_{j=1}^N x_j p_j^*.$$

Nota: Esistono vari modi alternativi per indicare simbolicamente il valor medio di un insieme di valori x_i . Nel seguito considereremo equivalenti le seguenti scritte:

$$m^* \equiv m_x^* \equiv \langle x \rangle \equiv \mathbf{m}^*[x]$$

e di volta in volta utilizzeremo quella che garantisce la migliore chiarezza di lettura delle formule.

Parametri di dispersione

Per misurare la dispersione dell'istogramma è utile definire, per ogni valore misurato x_i , il suo scarto s_i rispetto al valor medio campionario:

$$s_i = x_i - m^*$$

Il valor medio degli scarti s_i non serve per misurare la dispersione di un istogramma, in quanto, come è facile verificare, il suo valore è identicamente nullo:

$$\langle s \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - m^*) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i - \frac{1}{N} N m^* = 0.$$

La varianza campionaria D^* ha le dimensioni del quadrato della grandezza misurata X . Per visualizzare direttamente la dispersione di un istogramma è utile una quantità che abbia le stesse dimensioni della grandezza X . Si introduce pertanto lo *scarto quadratico medio campionario* o anche *scarto tipo campionario* σ^* , definito come la *radice quadrata della varianza* (Figura sopra, a destra):

$$\sigma^* = \sqrt{D^*} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - m^*)^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^N (x_j - m^*)^2 p_j^*}.$$

E' facile vedere che la varianza D^* è la differenza tra il valor medio dei valori x_i^2 ed il quadrato del valor medio dei valori x_i . Infatti:

$$\begin{aligned} D^* &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \langle x \rangle)^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [x_i^2 - 2x_i \langle x \rangle + \langle x \rangle^2] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \langle x \rangle^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \end{aligned}$$

L'uso di questa espressione in alternativa all'espressione più sopra può talvolta rendere più veloci i calcoli della varianza D^* e quindi dello scarto quadratico medio σ^* .

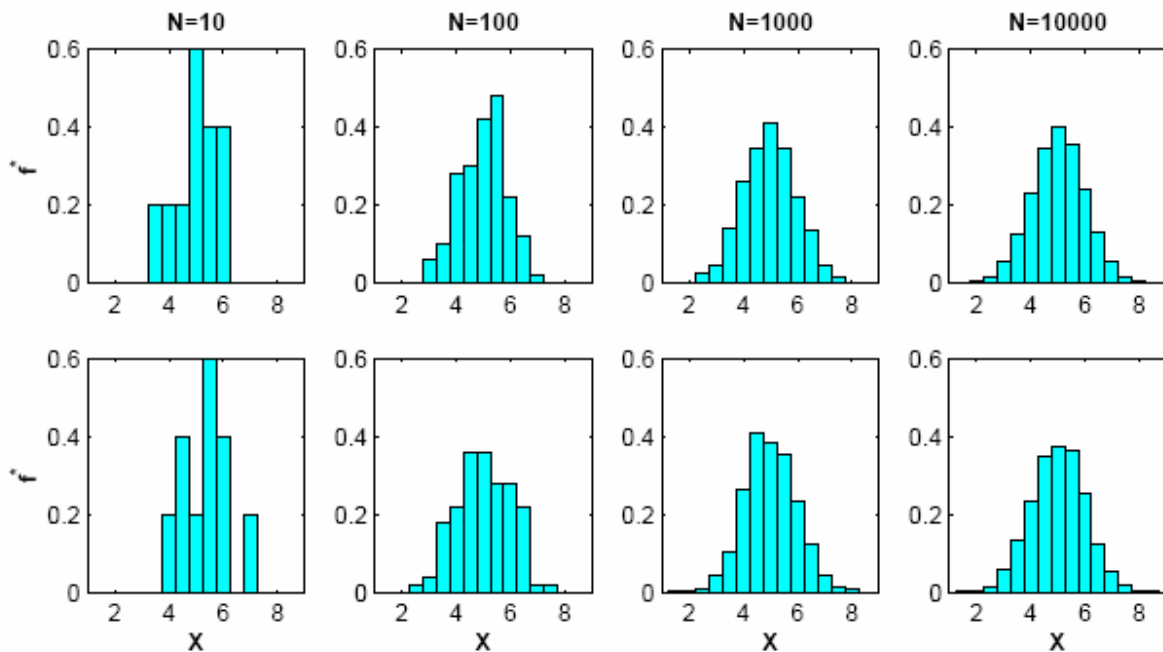
Esempio: Vengono eseguite $N = 20$ misurazioni del periodo di oscillazione di un pendolo con un cronometro digitale centesimale, cioè con risoluzione di lettura $\Delta T = 0.01$ s. I risultati sono riassunti nella seguente tabella.

T_j [s]	n_j^*	p_j^*	f_j^* [s ⁻¹]
1.22	1	0.05	5
1.23	2	0.1	10
1.24	4	0.2	20
1.25	6	0.3	30
1.26	3	0.15	15
1.27	3	0.15	15
1.28	1	0.05	5
Σ	20	1.00	100

Il valor medio campionario, la varianza campionaria e lo scarto quadratico medio campionario sono rispettivamente: $m^* = 1.25$ s, $D^* = 2.25 \times 10^{-4}$ s², $\sigma^* = 1.5 \times 10^{-2}$ s.

D) Distribuzione limite

Come abbiamo visto, il risultato di N misurazioni affette da errori casuali può essere rappresentato da un istogramma oppure, in modo meno completo ma più sintetico, dai due parametri m^* e σ^* che ne rappresentano rispettivamente la posizione media e la dispersione rispetto all'asse dei valori x . Supponiamo ora di eseguire un nuovo insieme di N misurazioni della stessa grandezza X ; ci aspettiamo di ottenere un istogramma diverso dal precedente, con valori m^* e σ^* pure diversi. Eseguendo altri insiemi di N misurazioni otterremo istogrammi ancora diversi e valori diversi di m^* e σ^* . Possiamo dire che l'istogramma relativo a N misurazioni ed i suoi parametri statistici m^* e σ^* hanno carattere aleatorio, cioè casuale.



Otto istogrammi, normalizzati in area, relativi a diverse misurazioni di una stessa grandezza fisica. I due istogrammi a sinistra, relativi entrambi a $N=10$ misure indipendenti, sono notevolmente diversi. Al crescere del numero N di misure per istogramma (andando da sinistra verso destra) gli istogrammi perdono progressivamente le caratteristiche aleatorie e tendono ad assumere una forma ben definita.

Si verifica però sperimentalmente che, al crescere del numero N di misure per ogni istogramma, gli istogrammi relativi a insiemi diversi di misurazioni tendono ad assumere forma simile (v. figura sopra); corrispondentemente, le differenze tra i valori di m^* e di σ^* relativi a istogrammi diversi tendono a ridursi. Queste osservazioni hanno portato ad introdurre il concetto di **istogramma limite**, a cui tendono ad assomigliare i singoli istogrammi sperimentali al crescere del numero di misure N . In termini asintotici, si dice che un istogramma sperimentale tende all'istogramma limite per $N \rightarrow \infty$.

L'istogramma limite è evidentemente un'astrazione. La sua esistenza non può essere verificata (il numero N di misurazioni è comunque necessariamente finito). Postulare l'esistenza di un istogramma limite equivale, in ultima analisi, a postulare l'esistenza di una regolarità del mondo naturale che consente di estrarre leggi di carattere generale a partire da un numero limitato di osservazioni.

Spesso (ma non sempre) l'istogramma di misure affette da errori casuali tende, al crescere di N , ad assumere una forma simmetrica "a campana" (v. figura sopra, a destra). Anche l'istogramma limite avrà allora una forma a campana.

E' utile cercare di descrivere questo andamento a campana dell'istogramma limite per mezzo di un modello matematico. Un modello matematico risulta però più agevole da trattare se espresso in termini di funzioni continue. Conviene pertanto fare un'ulteriore passaggio al limite, restringendo indefinitamente la larghezza delle colonne dell'istogramma: $\Delta x \rightarrow 0$. In questo modo l'istogramma limite viene sostituito da una *distribuzione limite*, esprimibile sotto forma di una funzione di variabile continua $f(x)$.

Osservazioni sperimentali e considerazioni teoriche hanno portato a concludere che il modello di funzione più adatto a descrivere l'andamento simmetrico a campana della distribuzione limite è dato dalla *distribuzione normale* o *distribuzione di Gauss*:

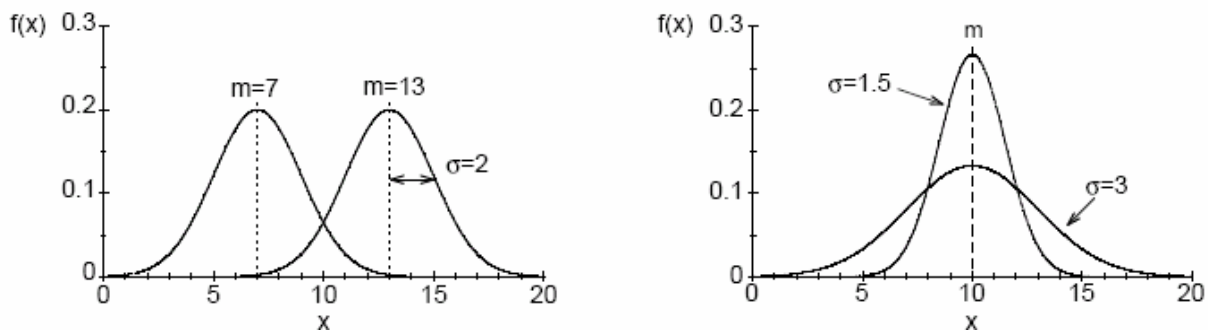
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} \right]$$

I due parametri m e σ che compaiono a secondo membro hanno le stesse dimensioni dei valori della variabile x . La funzione $f(x)$ è dimensionalmente omogenea alla densità campionaria f_j^* definita più sopra:

$$f_j^* = \frac{n_j^*}{N \Delta X_j}$$

La distribuzione gaussiana può pertanto essere considerata come il limite di un istogramma normalizzato in area (Figura sopra) non solo per $N \rightarrow \infty$ (numero di misurazioni tendente ad infinito) ma anche per $N \rightarrow \infty$ (i.e.: numero *Nstorto* di colonne tendente ad infinito, cioè $\Delta x_j \rightarrow \infty$).

E facile verificare che il parametro m individua la posizione della distribuzione sull'asse x , mentre σ dipende dalla larghezza della distribuzione (Figura sotto).



A sinistra due distribuzioni con uguale scarto quadratico medio σ e diversi valori medi m .

A destra due distribuzioni con uguale valor medio m e diversi scarti quadratici medi σ .

I parametri m e s rappresentano, rispettivamente, i valori asintotici per $N \rightarrow \infty$ del valor medio campionario m^* e dello scarto tipo campionario σ^* . Per convincersene, si può partire dalle espressioni della media e della varianza campionarie, m^* e D^* , viste in precedenza, sostituendo la frequenza campionaria con la densità campionaria: $p^* = f^* \Delta x$. Il passaggio al limite per $N \rightarrow \infty$ (i.e.: *Nstorto*) si fa sostituendo le sommatorie con gli integrali:

$$m^* = \sum_{j=1}^N x_j f_j^* \Delta x_j \quad \rightarrow \quad m = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

$$D^* = \sum_{j=1}^N (x_j - m^*)^2 f_j^* \Delta x_j \quad \rightarrow \quad D = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 f(x) dx$$

Dalle varianze è immediato passare agli scarti tipo: $D^* = (\sigma^*)^2$ e $D = \sigma^2$. Chiameremo pertanto m “*valor medio*” della distribuzione limite, o semplicemente “*media limite*”, e σ “*scarto quadratico medio*” o “*scarto tipo*” della distribuzione limite.

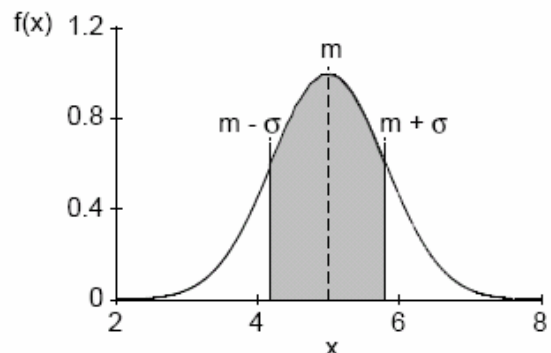
Il passaggio al limite dalla sommatoria all’integrale consente di vedere che anche la distribuzione limite, come l’istogramma normalizzato in area, sottende un’area unitaria:

$$\sum_{j=1}^N f_j^* \Delta X_j = 1 \quad \rightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

Le proprietà della distribuzione normale di Gauss verranno analizzate più dettagliatamente nel corso di Probabilità e statistica, dove sarà dimostrato che:

- l’area compresa tra $m - \sigma$ e $m + \sigma$ è sempre 0.68 (68 % dell’area totale, Figura sotto),
- l’area compresa tra $m - 2\sigma$ e $m + 2\sigma$ è sempre 0.95,
- l’area compresa tra $m - 3\sigma$ e $m + 3\sigma$ è sempre 0.98.

Esempio di distribuzione normale di Gauss con valor medio $m = 5$ e scarto quadratico medio $\sigma = 0.8$. L’area sottesa dalla curva tra $x = m - \sigma$ e $x = m + \sigma$ rappresenta sempre il 68 % dell’area totale, per qualsiasi valore di m e σ .



La distribuzione limite, essendo definita come limite di un istogramma sperimentale per $N \rightarrow \infty$, $\Delta x \rightarrow \infty$ è evidentemente un’astrazione, come l’istogramma limite. La distribuzione limite non è pertanto direttamente conoscibile. Potrà solo essere approssimata, con precisione tanto maggiore quanto più grande è il numero N di misurazioni effettuate. Inoltre, è evidente che il modello gaussiano non può comunque interpretare i dati sperimentali in modo esatto, almeno per quanto riguarda le code della distribuzione: la funzione $f(x)$ definita sopra infatti non si annulla per nessun valore della variabile x . Nonostante queste limitazioni, ipotizzare l’esistenza della distribuzione limite rappresenta, come vedremo, uno strumento estremamente utile per stabilire criteri di valutazione quantitativa dei risultati di un insieme finito di misurazioni.

Non è ovviamente possibile determinare con esattezza i parametri di una distribuzione limite a partire da un suo campionamento finito. Comunque grande sia il numero N di misure, infatti, i parametri statistici m^* e D^* hanno sempre un carattere aleatorio. E’ però plausibile cercare di stimare i parametri m e $D = \sigma^2$ della distribuzione limite a partire dai parametri statistici m^* e D^* di un campionamento costituito da N misure. Qui non affronteremo il problema della stima dei parametri di una distribuzione limite a partire da un suo campionamento finito, ma ci limiteremo a ricordare i risultati più importanti:

Supponiamo di avere effettuato N misurazioni di una grandezza fisica e di avere ottenuto N valori x_i .
 a) La migliore stima del valor medio m della distribuzione limite, che indicheremo con \tilde{m} , è il valor medio campionario m^* :

$$\tilde{m} = m^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i.$$

b) La migliore stima della varianza $D = \sigma^2$ della distribuzione limite, che indicheremo con \tilde{D} , non è la varianza campionaria D^* , bensì:

$$\tilde{D} = \frac{N}{N-1} D^* = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - m^*)^2.$$

Evidentemente $D^* < \tilde{D}$ la differenza è però tanto più piccola quanto più grande è N .

La varianza campionaria D^* sottostima la varianza limite D perchè è basata sugli scarti rispetto alla media campionaria m^* anziché sugli scarti rispetto alla media limite m .

A partire dall'espressione di \tilde{D} si può anche considerare la migliore stima $\tilde{\sigma}$ dello scarto quadratico medio limite:

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{N}{N-1}} \sigma^* = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - m^*)^2}.$$

Il valore $\tilde{\sigma}$ è chiamato, anche, scarto tipo stimato o scarto tipo sperimentale.

Esempio 1: Per avere un'idea intuitiva della differenza tra σ^* e $\tilde{\sigma}$, costruiamo tre insiemi costituiti, rispettivamente, da $N = 6, 4$ e 2 valori x_i , con uguali valor medio m^* e scarto tipo σ^* . È facile verificare che lo scarto tipo stimato $\tilde{\sigma}$ cresce al diminuire di N , allontanandosi dal valore $\sigma^* = 1$.

N	x_i	m^*	σ^*	$\tilde{\sigma}$
6	4,4,4,6,6,6	5	1	1.095
4	4,4,6,6	5	1	1.155
2	4,6	5	1	1.410

Esempio 2: Se si esegue una sola misurazione, cioè se $N=1$, si ottiene un solo valore x_1 . In tal caso $m^* = x_1$ e $\sigma^* = 0$: lo scarto tipo campionario è nullo. Invece l'espressione di $\tilde{\sigma}$ mostra che per $N=1$ lo scarto tipo stimato $\tilde{\sigma}$ è indeterminato. Ciò corrisponde al fatto che con una sola misura non è possibile alcuna stima della dispersione della distribuzione limite.

E) Distribuzione dei valori medi