

Sezioni coniche: approccio sintetico

Nicola Sansonetto*

23 gennaio 2009

1 Introduzione

Nel moderno approccio alla geometria accade spesso che l'aspetto sintetico venga messo da parte, privilegiando l'approccio analitico e invitando, indirettamente, gli studenti a relegare il metodo sintetico alla geometria piano dei primi due anni di liceo. Questo percorso spesso inizia alla scuola superiore con lo studio delle coniche mediante la geometria analitica. È allora da questo argomento che riprendiamo l'approccio sintetico, facendo così un parallelo con la prima lezione del prof. Spera (tenuta il 10 Gennaio), in cui sono state introdotte le coniche e alcune loro proprietà fondamentali da un punto di vista analitico.

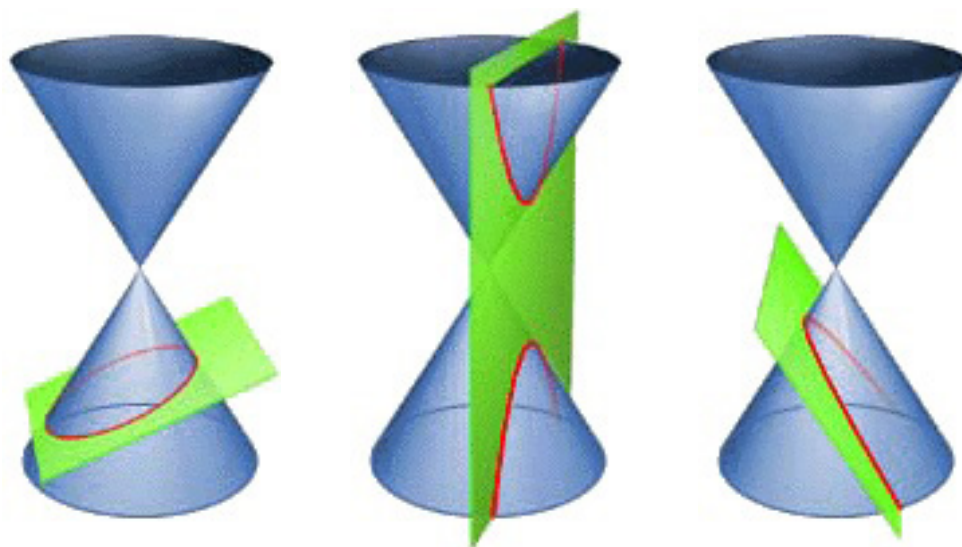
Lo studio delle sezioni coniche, inoltre, si presta in maniera particolare ad essere trattato con l'uso di un software di geometria dinamica (Cabri3D e geogebra). Il software, infatti, permette di recuperare l'aspetto geometrico/visivo, che è stato il primo da un punto di vista storico; inoltre questa impostazione permette di evidenziare in maniera semplice le proprietà delle coniche.

Le note si svolgono come segue, nella Sezione 2 viene illustrato l'approccio di Dandelin alle coniche anche facendo uso di Cabri3D®, nella Sezione 3 si dimostrano alcune proprietà delle coniche usando Geogebra, la Sezione 4 è dedicata a problemi ed esercizi. Le note si concludono con una breve sezione finale con alcuni cenni storici alla teoria delle coniche con una dimostrazione sintetica che la sezione di un cono con un piano parallelo alla generatrice del cono è una parabola. Vengono infine riportati in appendice il protocollo di costruzione di una figura ottenuta con Geogebra e le indicazioni su dove trovare e come installare alcuni dei software che abbiamo nominato.

2 Sfere di Dandelin e Teorema di Dandelin

Abbiamo già visto nella prima lezione o alla scuola superiore che è possibile ottenere l'ellisse, l'iperbole o la parabola come sezioni piane di un cono:

*Dipartimento di Informatica Università degli Studi di Verona, Ca' Vignal 2, Strada le Grazie 14, 37134 Verona.
Tel. +390458027908; e-mail: nicola.sansonetto@univr.it



Vogliamo però essere ora più precisi, ossia fornire delle dimostrazioni che sezionando un cono con un piano si possono ottenere l'ellisse, l'iperbole e la parabola. Per far questo ci faremo aiutare da dei softwares di geometria dinamica.

2.1 Sezioni coniche mediante la definizione focale

In questa sezione costruiamo le sezioni coniche seguendo l'approccio di Dandelin e costruiremo/dimostreremo come ottenere un'ellisse, un'iperbole e una parabola sezionando opportunamente un cono (circular retto) con un piano.

Definizione 1. Dato un cono $\mathcal{C}$ circolare retto sezionato da un piano π , diciamo sfera di Dandelin ogni sfera tangente al piano π e internamente al cono $\mathcal{C}$. (Vedi figura 1).

N.B. La definizione di sfera di Dandelin che abbiamo fornito non è la più generale possibile tuttavia questa è sufficiente agli scopi che intendiamo perseguire.

È importante notare alcune proprietà importanti delle sfere di Dandelin, ma più in generale delle sfere tangenti internamente un cono circolare retto, e cioè che esse sono tangenti il cono in una circonferenza, precisamente:

Proposizione 2. Le tangenti condotte ad una sfera Σ da un punto P esterno ad essa, individuano sulla sfera una circonferenza $\mathcal{C}$. Inoltre i segmenti sulle tangenti aventi per estremi il punto P e i punti della circonferenza sono *congruenti*.

Dimostrazione. La dimostrazione della proposizione è legata al seguente risultato:

- Le tangenti ad una circonferenza per un punto esterno P ad essa determinano una corda i cui estremi sono equidistanti dal punto esterno P .

La dimostrazione viene lasciata per esercizio. □

Ora è possibile dimostrare il teorema di Dandelin, che assicura che

Teorema 3. (di Dandelin) Ogni punto di tangenza tra la sezione conica e una sfera di Dandelin è un fuoco per la sezione conica in considerazione.

Noi divideremo la dimostrazione in tre punti studiando i casi delle tre coniche non-degeneri: ellisse, iperbole e parabola.

Teorema 4. (di Dandelin per l'ellisse) Sia $\mathcal{C}$ un cono circolare retto sezionato da un piano π . La sezione conica è un'ellisse se e solo se essa ammette due sfere di Dandelin nella stessa falda.

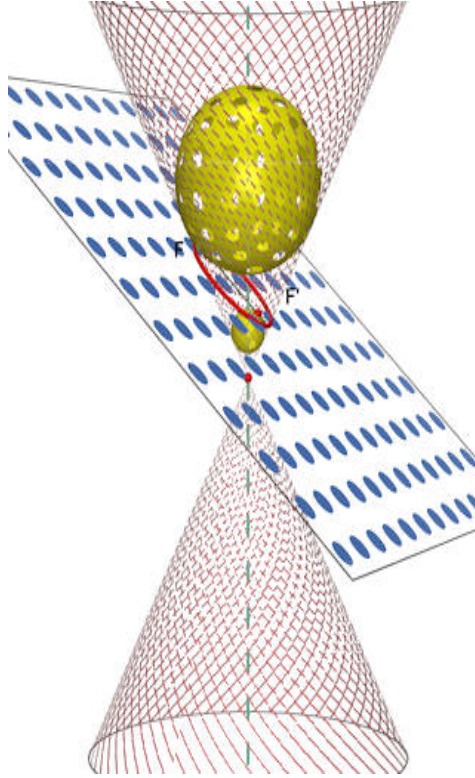


Figura 1: Costruzione di Dandelin per l'ellisse

Sia V il vertice del cono $\mathcal{C}$ e siano Σ_1 e Σ_2 due sfere di Dandelin nella stessa falda del cono (vedi figura 2). Indichiamo con F_1 e F_2 i punti di contatto tra le sfere di Dandelin Σ_1 e Σ_2 , rispettivamente, con il piano π . Sia P un generico punto della sezione e sia PV la generatrice del cono per P e per V . La direttrice PV individua i punti P_1 e P_2 nelle due sfere di Dandelin Σ_1 e Σ_2 , rispettivamente. Il punto P è esterno alle sfere e quindi per il teorema delle tangenti ad una sfera per un punto esterno ad essa si ha che

$$\overline{PP_1} = \overline{PF_1}, \quad \overline{PP_2} = \overline{PF_2}$$

Sommando le due precedenti espressioni membro a membro e sfruttando le proprietà della somma dei segmenti si ottiene

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{P_1P_2} = \text{costante} \quad (1)$$

La distanza $\overline{P_1P_2}$ è costante poichè, al variare di P sulla sezione, P_1 e P_2 si mantengono sulle circonferenze di tangenza tra le sfere di Dandelin e il cono che non dipendono dalla scelta del punto P per cui rimane costante la loro distanza dal vertice. Ritroviamo così la definizione focale dell'ellisse. $\square$

Ritroviamo ora un fatto che già conosciamo per l'ellisse:

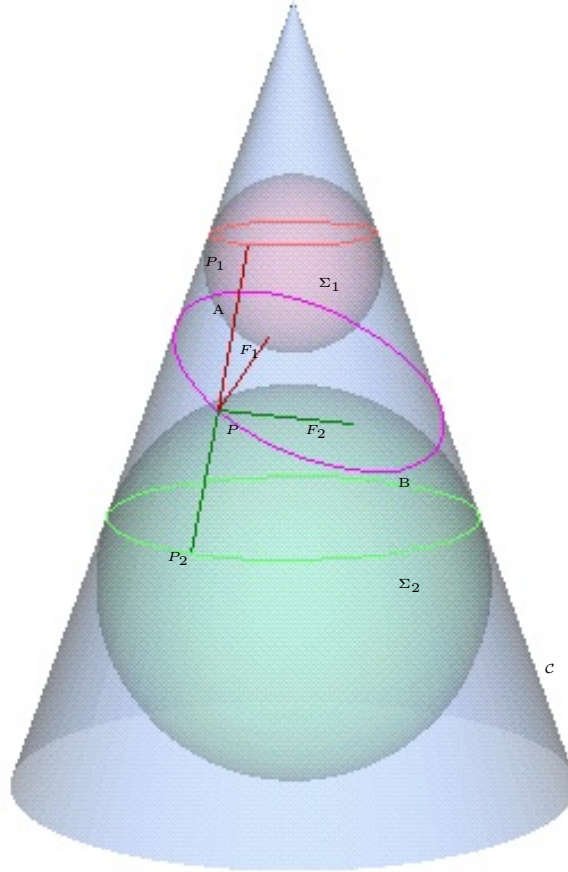
Fatto 1. La distanza $\overline{P_1P_2}$ è pari alla lunghezza dell'asse maggiore AB dell'ellisse.

Dimostrazione. Chiamiamo AB gli estremi dell'ellisse, così che AB sia l'asse maggiore. Usando la (1), ponendo prima $P = A$ e poi $P = B$ si ha $\overline{AF_1} + \overline{AF_2} = \overline{BF_1} + \overline{BF_2}$. Per le regole della somma dei segmenti si ha che $2\overline{AF_1} + \overline{F_1F_2} = 2\overline{BF_2} + \overline{F_1F_2}$, cioè che $\overline{AF_1} = \overline{BF_2}$. Quindi:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{AF_1} + \overline{AF_2} = \overline{AF_1} + \overline{F_1F_2} + \overline{AF_2} = \overline{AB}$$

$\square$

La dimostrazione del teorema di Dandelin per l'iperbole viene lasciata per esercizio, come dimostrazione guidata.



Dimostrazione.

Figura 2: Sezione piana della costruzione di Dandelin per l'ellisse

Teorema 5 (di Dandelin per l'iperbole). Si consideri un cono circolare retto $\mathcal{C}$ sezionato da un piano π . Allora la sezione conica ammette due sfere di Dandelin (vedi figura 3), ognuna nelle due diverse falde del cono, se e solo se la sezione conica è una iperbole.

Completare la dimostrazione del Teorema 5, usando la costruzione in figura 3 e poi rispondere alle domande seguenti.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{C}$ un cono a due falde di vertice V sezionato da un piano π^1 in maniera tale che esistano due sfere di Dandelin, Σ_1 e Σ_2 , una nella falda superiore del cono e una nella falda inferiore. Sia P un punto generico della sezione. Non è restrittivo assumere tale punto nella falda superiore (*perchè?*). Sia, quindi, PV la generatrice del cono per il punto P e per il vertice V . Indichiamo con P_1 il punto di intersezione tra la generatrice PV e il cerchio di contatto tra la sfera Σ_1 e il cono $\mathcal{C}$ e, analogamente con P_2 il punto di intersezione tra la generatrice PV e il cerchio di contatto tra la sfera Σ_2 e il cono. Siano F_1 il **punto di tangenza** tra il piano π e la **sfera di Dandelin Σ_1** e F_2 **punto di tangenza tra il piano che seziona il cono e la sfera di Dandelin Σ_2** . Il punto P è esterno alle sfere di Dandelin quindi, per **il teorema sulle tangenti ad una sfera condotte per un punto esterno**,

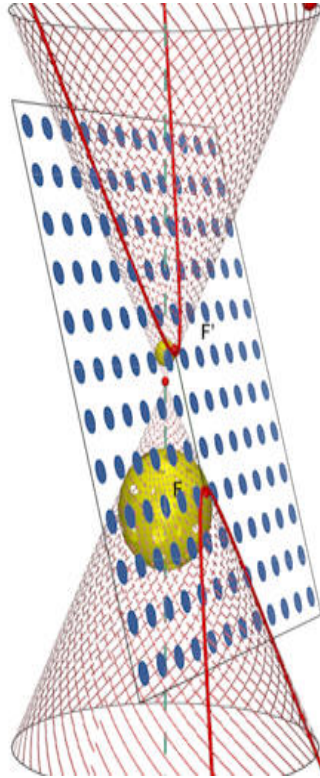
$$\overline{PF_1} = \overline{PP_1}, \quad \overline{PF_2} = \overline{PP_2}$$

Dalle relazioni precedenti **sottraendo membro a membro** e per la somma di segmenti consecutivi si ricava

$$\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = \overline{P_1P_2}$$

La distanza $\overline{P_1P_2}$ è **costante**, poichè, al variare di P sulla sezione, P_1 e P_2 si mantengono sulle **circonferenze di tangenza tra le sfere di Dandelin e il cono**, e quindi rimane costante la loro distanza dal vertice. Si ritrova così la definizione focale dell'iperbole. $\square$

¹Nella figura in sezione il piano è in verde.



Q. Quali analogie ci sono nella dimostrazione del teorema di Dandelin per l'ellisse e quella per l'iperbole? Verificare con il software di geometria dinamica che ogni sfera di Dandelin è tangente il cono in una circonferenza.

La dimostrazione del teorema di Dandelin per la parabola viene interamente lasciata per esercizio (tutt'altro che facile!!!).

Teorema 6. (di Dandelin per la parabola) Sia $\mathcal{C}$ un cono circolare retto sezionato da un piano π . La sezione conica è una parabola se e solo se ammette un'unica sfera di Dandelin.

Dimostrazione. Per esercizio. □

2.2 Coniche mediante la definizione “fuoco-direttrice”

Come abbiamo visto nella prima lezione le coniche ammettono una definizione “fuoco-direttrice”:

Definizione 7. Una conica è il luogo geometrico dei punti P di un piano tali che il rapporto delle loro distanze da un punto fisso F (fuoco) e da una retta fissa d_F (direttrice) sia costante (= eccentricità).

$$\frac{\overline{PF}}{\text{dist}(P, d_F)} = \text{const} \quad (2)$$

Dimostriamo ora per il caso dell'ellisse che la teoria di Dandelin permette di ritrovare l'ellisse anche in questo caso.

Dimostrazione. Si consideri la seguente costruzione: sia π il piano sezionante il cono $\mathcal{C}$ in un'ellisse, sia Σ_2 una sfera di Dandelin tangente al piano π nel punto F e il cono nella circonferenza C_2 . Indichiamo con π' il piano per C_2 , che interseca π in una retta d . Il nostro intento è ora quello di mostrare che d è la direttrice d_F che cerchiamo.

Siano A ed A' gli estremi dell'ellisse e sia A'' la proiezione ortogonale di A su d_F . Dato il generico punto P sulla sezione conica $\mathcal{E}$ denotiamo con H la sua proiezione ortogonale sul piano π' , con P' l'intersezione tra la retta generatrice del cono per P e la circonferenza C_2 e con P'' la

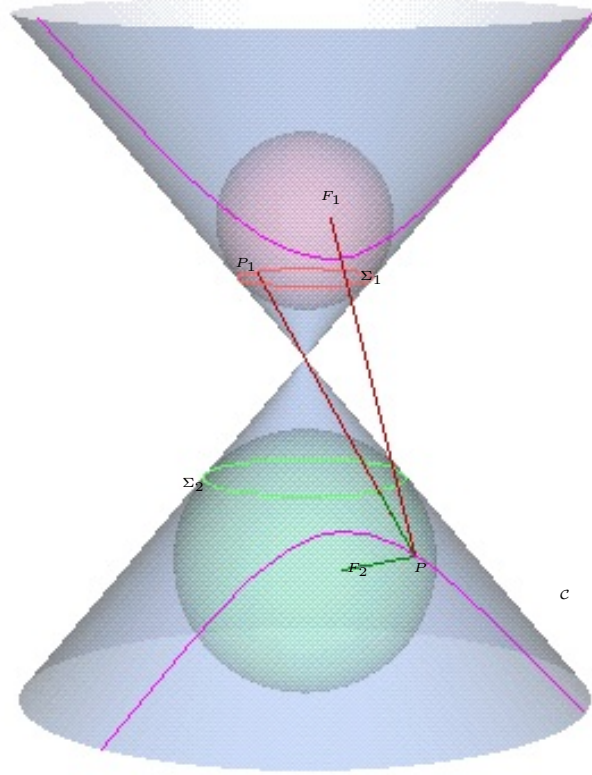
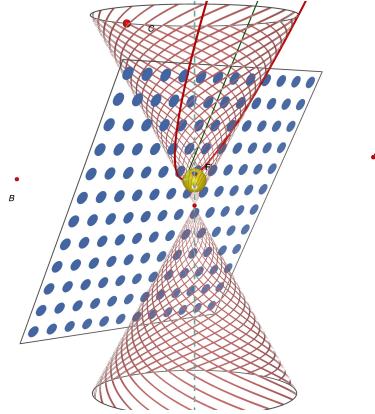


Figura 3: Costruzione di Dandelin per l'iperbole e proiezione piana della costruzione di Dandelin dell'iperbole



proiezione ortogonale di H sulla retta d_F . Infine sia O il punto di intersezione tra l'asse del cono e il piano π , α l'angolo $H\hat{P}P'$ e β l'angolo $H\hat{P}P''$.

Osserviamo che per il teorema 2 e per le proprietà usuali dei triangoli

$$\frac{\overline{PF}}{\text{dist}(P, d_F)} = \frac{\overline{PF}}{\overline{PP''}} = \frac{\overline{PH} \frac{1}{\cos \alpha}}{\overline{PH} \frac{1}{\cos \beta}} = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$$

Osserviamo, però che α e β non dipendono dal generico punto P della sezione conica $\mathcal{E}$. da cui l'affermazione nella definizione 7 $\square$

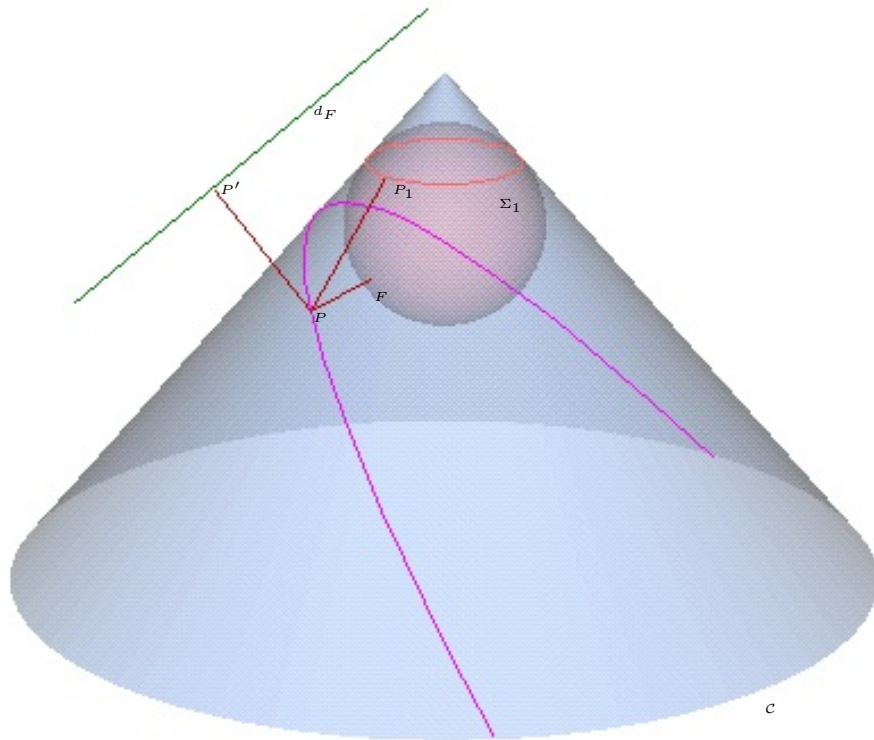


Figura 4: Sezione piana della costruzione di Dandelin per la parabola

Dimostriamo ora che la costante del rapporto (2) è l'eccentricità $e = \frac{c}{a}$ in cui c è la semidistanza focale e a il semiasse maggiore. Applicando la relazione (2) prima a A e poi ad A' e poi la proposizione 2 si ricava

$$e = \frac{\overline{AF}}{\overline{AA''}} = \frac{\overline{A'F}}{\overline{A'A''}}$$

Per le proprietà dell'ellisse quindi

$$e = \frac{\overline{A'F} - \overline{AF}}{\overline{A'A''} - \overline{AA''}} = \frac{2\overline{OF}}{2\overline{OA}} = \frac{\overline{OF}}{\overline{OA}} = \frac{c}{a}$$

3 Geogebra e alcune proprietà delle coniche

Geogebra è un software libero di geometria dinamica piana, che si può scaricare e usare gratuitamente dalla pagina web www.geogebra.com. Come abbiamo già visto per il caso tridimensionale un software di geometria dinamica non effettua dimostrazioni, tuttavia permette molto altro, in particolare rende accessibile un nuovo mondo, quello del dinamismo, del movimento in geometria. Essi nascono come software che permettono di costruire figure geometriche usando (sostanzialmente) **riga e compasso** (virtuali) con l'aggiunta che è possibile definire dei comandi (ossia delle macro) una volta che una costruzione è già stata effettuata. Le costruzioni con riga e compasso non sono però il fine ultimo di tali software, ma essi permettono di introdurre il movimento per mezzo della funzione **trascinamento**, cioè di una funzione che fa variare la posizione di alcune parti (le parti libere), mantenendo però invariate le relazioni costruite. I software di geometria dinamica possono essere usati per diverse ragioni, non ultima la possibilità di visualizzare e di congetturare ossia di

sperimentare in matematica. Geogebra inoltre possiede la possibilità di effettuare un controllo o un approccio analitico.

In questa sezione dimostreremo un'importante proprietà delle coniche, prima però effettueremo con Geogebra la costruzione della figura da analizzare e poi verificheremo la plausibilità della affermazione, cercando di cogliere i punti centrali del teorema e quindi gli snodi della dimostrazione.

Teorema 8. I raggi focali passanti per un punto di una conica *sono bisecati* dalla tangente e dalla normale alla conica in quel punto.

Caso Ellisse.

Si consideri un'ellisse $\mathcal{E}$ di fuochi F_1 e F_2 . I raggi focali² $\overline{F_1P}$ e $\overline{F_2P}$ formano con la tangente τ a $\mathcal{E}$ in un suo punto P angoli congruenti. Inoltre anche gli angoli che tali raggi focali formano con la normale ad $\mathcal{E}$ in P sono congruenti.³

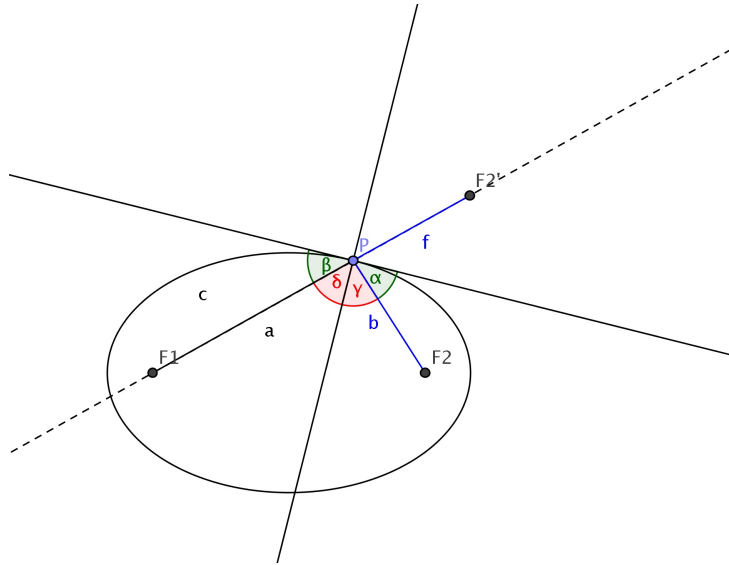


Figura 5: Figura del teorema di bisezione dei raggi focali per l'ellisse.

Dimostrazione. La costruzione con Geogebra della figura ?? viene effettuata seguendo e interpretando i passi descritti di seguito, in riferimento alla figura base del teorema. In appendice a questa lezione viene riportato il protocollo di costruzione della figura 5 con Geogebra.⁴ Sul prolungamento di $\overline{F_1P}$ si consideri il punto F'_2 tale che $\overline{F_2P} = \overline{F'_2P}$, sicché $\overline{F_1F'_2} = \overline{F_1F_2} = 2a$, in cui a denota il semiasse maggiore dell'ellisse. Si consideri la bisettrice PM all'angolo $F_2\hat{P}F'_2$. Per ogni punto Q di PM , $Q \neq P$ si ha

$$\overline{F_1Q} + \overline{QF'_2} > \overline{F_1F'_2} = 2a$$

per la disuguaglianza triangolare. Quindi Q non è un punto dell'ellisse e cioè PM è tangente ad $\mathcal{E}$. Osserviamo ora che $F_2\hat{P}M$ è congruente a $F'_2\hat{P}M$ poiché PM è bisettrice di $F_2\hat{P}F'_2$ ed è congruente anche a $F_1\hat{P}\tau$, in quanto angoli opposti al vertice, quindi $F_1\hat{P}\tau$ è congruente a $F_2\hat{P}M$ $\square$

Lasciamo al lettore le dimostrazioni per i casi dell'iperbole (analogo a quella dell'ellisse) e della parabola (leggermente diverso dall'ellisse).

4 Problemi

In questa sezione vengono proposti dei problemi sulle proprietà delle coniche. In ognuno dei problemi oltre alla dimostrazione vi sono due domande “*facoltative*” che chiedono di verificare con il

²Ricordiamo che ogni segmento congiungente il fuoco di una conica con un suo punto si dice *raggio focale*.

³In quanto complementari di angoli congruenti.

⁴Chi volesse la scheda guida o il file usato in classe per poi cimentarsi e sperimentare con Geogebra, mi può contattare per e-mail.

software di geometria dinamica (geogebra) la “plausibilità” dei varie affermazioni e di formulare delle congetture in base alle costruzioni effettuate.

Problema 1. Il luogo dei punti medi delle corde CD di una ellisse, tutte parallele ad una data retta r , è un segmento, detto **diametro**, con estremi sull'ellisse.

- i.* Verificare la precedente proposizione mediante l'uso del software di geometria dinamica.
- ii.* È possibile trarre qualche congettura dal problema 1?
- iii.* Dimostrare la proposizione precedente.

Problema 2. Data un'iperbole $\mathcal{I}$ si consideri il luogo dei punti medi K delle corde CD parallele ad una data retta r . Allora tale luogo è una coppia di semirette se le corde hanno gli estremi su un solo ramo di iperbole, una retta se le corde hanno gli estremi su due rami distinti. Tale luogo K è detto **diametro**.

- i.* Verificare la plausibilità dell'affermazione 2 mediante l'uso del software di geometria dinamica.
- ii.* Dimostrare il problema precedente.

Problema 3. Sia r una retta del piano e sia $\mathcal{C}$ una conica a centro non-degenere. Allora le rette parallele a r e passanti per gli estremi dei diametri sono tangenti la conica.

- i.* Verificare il problema 3 mediante l'uso del software di geometria dinamica.
- ii.* Dimostrare il problema precedente.

Problema 4. I problemi 1, 2 e 3 si possono estendere anche alla parabola? Se sì perchè? È possibile verificare la “plausibilità” di tale affermazione con il software di geometria dinamica?

Problema 5. L'esperienza ci insegna che un raggio di luce che colpisce una superficie viene riflesso, ossia rimandato indietro. Gli studi sulle onde di Huygens assicurano che la direzione che il raggio riflesso percorre dipende dall'angolo di incidenza del raggio incidente e dalla forma della superficie riflettente. Se la superficie è un normale specchio e il raggio colpisce lo specchio perpendicolarmente, allora il raggio riflesso ripercorre la stessa direzione del raggio incidente. Diversamente, se il raggio arriva sullo specchio obliquamente, esso viene riflesso di un angolo che forma con la perpendicolare al piano un angolo uguale all'angolo di incidenza. La stessa legge vale anche nel caso la superficie riflettente sia una curva.

Si consideri un'ellisse $\mathcal{E}$. Si dimostri che un raggio proveniente da uno dei fuochi viene riflesso

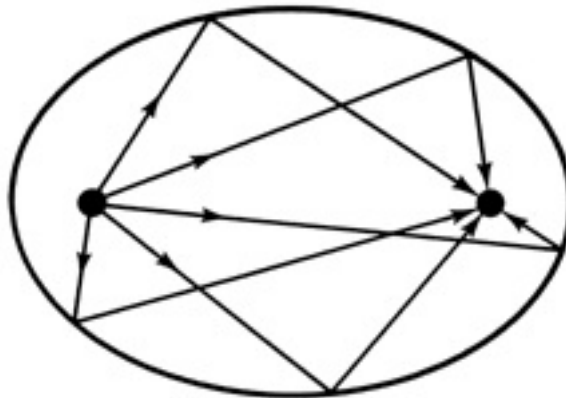


Figura 6: Raggi riflessi all'interno di un'ellisse.

dall'ellisse in un raggio passante per l'altro fuoco.

Problema 6. Si consideri una ellisse $\mathcal{E}$, si dimostri che se t è una retta tangente all'ellisse $\mathcal{E}$ in un suo generico punto P , allora l'ellisse è tutta contenuta in uno dei due semipiani che la retta t individua.

Problema 7. Si consideri una parabola $\mathcal{P}$, si dimostri che se t è una retta tangente alla parabola $\mathcal{P}$ in un suo generico punto P , allora la parabola è tutta contenuta in uno dei due semipiani che la retta t individua.

Problema 8. Quali curve si ottengono intersecando un cilindro con un piano? Giustificare adeguatamente la risposta. (Sugg. La figura del Planetario Tycho Brahe di Copenhagen, può aiutare).



Figura 7: Foto del Planetario “Tycho Brahe” di Copenhagen.

Problema 9. Si consideri un cono retto, ma non a base circolare. Intersecando tale cono con un piano si ottengono tutte le coniche non-degeneri? Giustificare adeguatamente le risposte.

5 Introduzione storica alle sezioni coniche

Questa lezione è dedicata ad un approfondimento storico della teoria delle sezioni coniche. Il breve percorso che viene proposto abbraccia gli inizi di tale teoria, che risalgono alla matematica greca e soprattutto a quella ellenistica.⁵ Non tratteremo, se non molto marginalmente, lo sviluppo delle vicende avvenuto in seguito all’età ellenistica⁶ e non faremo riferimento alla riscoperta delle opere ellenistiche (quindi anche delle opere sulle sezioni coniche) avvenuta alla fine del '500 e che ha portato, in seguito, a grandi scoperte come le leggi di Kepler, il metodo di Viète prima e di Descartes poi fino alla mirabile opera di Newton (in particolare i *Principia*).

Le sezioni coniche furono probabilmente introdotte tra il 360-350 a.C. dal platonico Menecmo e in (relativamente) poco tempo divennero uno dei principali terreni di indagine dei *matematici* greci. Dopo la loro introduzione da parte di Menecmo nell’arco di un secolo e mezzo circa furono proposte due esposizioni generali sulle sezioni coniche, una ad opera di Aristeo il vecchio (*Luoghi solidi*) e un’altra ad opera di Euclide (*Coniche*) (si veda ad esempio [4] per un approfondimento a riguardo). Tuttavia, fu con gli otto libri delle *Coniche* di Apollonio di Perga (260?-200? a.C.) che la trattazione delle coniche raggiunse il più alto livello di generalità nell’antichità. (In realtà l’opera di Apollonio restò l’opera di riferimento fino al 1600 e oltre). Degli otto libri di Apollonio solamente sette sono arrivati fino a noi, per di più solamente i primi quattro libri sono pervenuti in greco, mentre i tre libri successivi sono stati (fortunatamente) tramandati per mezzo di una traduzione araba ad opera del matematico Thabit ibn Qurra.

Prima di Apollonio le tre sezioni coniche (non-degeneri) venivano costruite come sezioni (rette) di tre diversi tipi di cono circolare retto: con angolo al vertice, rispettivamente, *ottuso* per l’ellisse, *retto* per la parabola e *acuto* per l’iperbole. Fu Apollonio, probabilmente, a mostrare per la prima volta che non era necessario prendere sezioni perpendicolari ad un elemento del cono e, invece, che le curve in questione potevano essere ottenute mediante sezioni diverse di un unico cono circolare

⁵Menecmo, Aristeo, Eudossio, Euclide, Apollonio e Archimede

⁶Fino al tardo rinascimento, l’unico personaggio veramente rilevante del mondo occidentale fu Pappo.

non necessariamente retto, semplicemente variando l'inclinazione del piano di intersezione. Inoltre Apollonio introdusse un ulteriore aspetto di generalizzazione e cioè egli sostituì il cono ad una falda con il cono a due falde.⁷ Questo cambiamento fece sì che l'iperbole assumesse la forma di quella curva a due rami che è oggi familiare.

Apollonio è anche colui che ha coniato (probabilmente cogliendo un suggerimento di Archimede) i moderni nomi delle sezioni coniche, infatti precedentemente esse erano indicate con gli appellativi riferiti ai tipi di cono (acutangolo, rettangolo e ottusangolo) di cui erano sezioni. I termini *ellisse*, *iperbole* e *parabola* rappresentavano adattamenti di termini precedentemente usati, forse dai pitagorici, nella soluzione di equazioni di secondo grado mediante "l'applicazione di aree" (si vede [4] per una discussione sul termine). Il termine **parabola**, che significa "*confrontare*", era usato quando un rettangolo di area data veniva adagiato su un segmento dato in modo che l'area del rettangolo e l'area del quadrato di lato tale segmento fossero uguali⁸, il termine **ellipsis**, che significa "*difetto*", indicava che il rettangolo dato differiva dal quadrato per difetto di un quadrato, infine **hyperbola**, che significa "*eccesso*", indicava il caso in cui il rettangolo differisse dal quadrato per eccesso di un quadrato.

Ora renderemo ragione di tali nomi, in particolare mostreremo che la sezione di un cono circolare mediante un piano parallelo ad una generatrice del cono stesso è una parabola e renderemo esplicita la precedente nota a piè pagina.

Teorema 9. La sezione di un cono circolare mediante un piano parallelo ad una generatrice del cono stesso è una parabola.

Dimostrazione. Consideriamo la seguente costruzione geometrica (vedi figura 8) Siano $\mathcal{C}$ un cono circolare (non necessariamente retto) a due falde e π un piano che seziona il cono. Sia ABC un triangolo assiale in cui BC è il lato che sta nella base del cono, DE la retta che individua il piano π nel piano della base del cono, inoltre si assuma che DE sia perpendicolare a BC .⁹ Indichiamo con M il punto di intersezione tra la retta BC , con P il punto di intersezione tra il piano della sezione e il triangolo assiale. Sia quindi PM la retta congiungente P con M . Inoltre sia QQ' una qualsiasi corda della sezione, che risulta parallela a DE .

Ora il segmento QQ' è bisecato¹⁰ nel punto V dalla retta PM , cioè $QV = VQ'$ o, equivalentemente, PM è un asse di simmetria della sezione.

Usiamo ora l'ipotesi che il piano è parallelo ad una generatrice del cono. Dalla costruzione che abbiamo fatto ciò equivale a chiedere che PM sia parallela ad AC . Si tracci quindi la retta PL , perpendicolare a PM e appartenente al piano della sezione, tale che la lunghezza di PL (pensato come segmento) sia tale che

$$PL : PA = BC^2 : (BA \cdot AC)$$

Ora, per le proprietà dei triangoli simili, si dimostra che

$$QV^2 = PV \cdot PL$$

e cioè che il quadrato di lato QV è uguale al rettangolo di base PL e altezza PV , che è proprietà che caratterizza la parabola.

Non è però difficile tradurre la proprietà individuata (da Apollonio) nelle equazioni della geometria analitica di Descartes e Fermat. Poniamo $k = PL$ ("parametro"), $x = PV$ e $y = QV$, allora

⁷L'introduzione del cono a due falde dipendeva dalla definizione di cono di Apollonio: "Se una retta, prolungantesi all'infinito e passante sempre per un punto fisso, viene fatta ruotare lungo la circonferenza di un cerchio che non si trovi nello stesso piano del punto, in modo che passi successivamente attraverso ogni punto di quella circonferenza, la retta che ruota tratterà la superficie di un cono doppio".

⁸La parabola, infatti, è quella curva con la proprietà per cui, qualunque punto della curva si scelga, il quadrato costruito sull'ordinata è equivalente al rettangolo formato dall'ascissa e dal parametro della parabola. Oltre spiegheremo meglio tale concetto.

⁹Notiamo che questa assunzione non è restrittiva. Perché?

¹⁰Questo fatto non difficile va adeguatamente motivato.

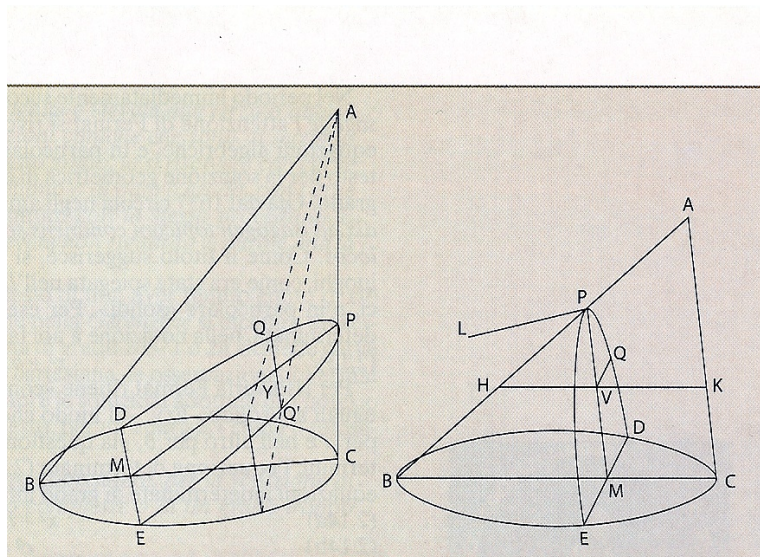


Figura 8:

si ha

$$y^2 = kx$$

che è l'equazione di una parabola. □

Terminiamo questa sezione osservando che Apollonio non raggiunse il più alto grado di generalità possibile in materia di coniche, non introdusse il concetto di fuoco nè il concetto numerico di eccentricità, sebbene tali concetti implicitamente emergono dalle sue opere, tuttavia ciò non toglie nulla alla grandiosità della sua opera, che con questa introduzione abbiamo solamente potuto lambire. Inoltre dobbiamo ricordare che *“così grande è la parte della matematica antica andata perduta, che una argomentazione e silention appare molto precaria”* (Boyer, [4]); Leibniz, infatti, afferma: *“Chi capisce Archimede e Apollonio, ammirerà meno le conquiste dei più eminenti matematici di tempi successivi.”*

Appendice A: Protocollo di costruzione con Geogebra della figura 5

No.	Nome	Definizione	Algebra
1	Ellisse c	Ellisse con Fuochi (-3, 0), (3, 0) e Lunghezza asse maggiore 4	c: $6.25x^2 + 14.29y^2 = 100$
2	Punto F1	Fuoco di c	F1 = (-3, 0)
2	Punto F2	Fuoco di c	F2 = (3, 0)
3	Punto P	Punto su c	P = (1.41, 2.47)
4	Segmento a	Segmento[F1, P]	a = 5.06
5	Segmento b	Segmento[P, F2]	b = 2.94
6	Retta d	Retta per F1, P	d: $2.47x - 4.41y = -7.42$
7	Circonferenza e	Circonferenza con centro P per F2	e: $(x - 1.41)^2 + (y - 2.47)^2 = 8.64$
8	Punto F2'	Punto di intersezione e, d	F2' = (3.98, 3.91)
8	Punto B	Punto di intersezione e, d	B = (-1.15, 1.04)
9	Retta τ	Bisettrice di F2, P, F2'	τ: $0.24x + 0.97y = 2.74$
10	Retta n	Retta per P perpendicolare a τ	n: $0.97x - 0.24y = 0.77$
11	Punto A	Punto su τ	A = (-4.62, 3.98)
12	Punto D	Punto su n	D = (3.04, 8.99)
13	Angolo β	Angolo tra F1, P, A	β = 43.31°
14	Segmento f	Segmento[P, F2']	f = 2.94
15	Punto C	Punto su τ	C = (5.93, 1.35)
16	Punto E	Punto su n	E = (-0.33, -4.52)
17	Angolo α	Angolo tra F2, P, C	α = 43.31°
18	Angolo γ	Angolo tra E, P, F2	γ = 46.69°
19	Angolo δ	Angolo tra F1, P, E	δ = 46.69°

Creato con [GeoGebra](#)

Appendice B: Softwares di geometria dinamica

Nel corso di questa lezione abbiamo introdotto e usato alcuni softwares di geometria dinamica, in particolare Cabri3D® e Geogebra. Cabri3D è un software a pagamento che si può acquistare anche online; è anche possibile scaricare sia una versione demo della durata di un mese sia un reader dalla pagina www.cabri.com. Geogebra, invece, è un software libero che si può scaricare gratuitamente dalla pagine web www.Geogebra.org. Esistono altri softwares sia di geometria dinamica che non molto utili, tra questi voglio citarne alcuni di liberi: *Dr Geo* che tra l'altro permette di scrivere macro e piccoli programmi in Python, Maxima¹¹ simile al più famoso Derive®.

¹¹Attualmente solo per utenti Linux e Microsoft, mentre altri sono disponibili anche per Mac

Riferimenti bibliografici

- [1] V.I. Arnol'd, *On teaching Mathematics*. Discussion on teaching of mathematics in Palais de Dcouverte in Paris on 7 March 1997.
- [2] V.I. Arnol'd, *The antiscientifical revolution and mathematics*. (Talk at the meeting of the Pontifical Academy at Vatican, 26 October 1998, Changing concepts of nature at the turn of the millennium.)
- [3] M. Audin, *Geometry*. Springer.
- [4] C.B. Boyer, *Storia della Matematica*. Oscar Saggi Mondadori.
- [5] *Fermat. I grandi della scienza*. Collana de Le scienze.
- [6] R. Feynman, *Sta Scherzando Mr Feyman?* Zanichelli.
- [7] L. Lamberti, L. Mereu e A. Nanni, *Nuovo Matematica uno; elementi di geometria analitica*. Etas Libri.
- [8] U. Margiotta, *Riforma del curriculum e formazione dei talenti. Linee metodologiche e operative*. Roma, Armondo.
- [9] G. Polya, *La scoperta matematica. Capire, imparare e insegnare a risolvere i problemi*. Vol. I, II. Feltrinelli (1971), fuori commercio.
- [10] Documento UMI, *Matematica 2003*. Scaricabile dalla pagina web <http://www.dm.unibo.it/UMI>.
- [11] M. Spera, *Geometria*. Note del corso di geometria per il corso in ingegneria gestionale.