Analisi del comportamento di sistemi ibridi

1. Automi deterministici
2. Automi auto-bloccanti
3. Automi zenoniani
4. Caos
5. Stabilità

Tempo di esecuzione

Il tempo di esecuzione $\tau_\infty(\chi)$ di una traiettoria χ è

$$\tau_\infty(\chi) = \Sigma_{i=0}^{N} \, (\tau_i{}' - \tau_i)$$

Una traiettoria χ è

finita se $N < \infty$ e $I_N = [\tau_N \, , \, \tau_N']$

infinita se $\tau_\infty(\chi) = \infty$ o $N = \infty$

zenoniana se $N = \infty$ ma $\tau_\infty(\chi) < \infty$

$\Omega_H(q_0, x_0)$: insieme di tutte le traiettorie di H con condizione iniziale $(q_0, x_0) \in \mathrm{Init}$

$\Omega_H^\infty(q_0, x_0)$: insieme di tutte le traiettorie infinite di H con condizione iniziale $(q_0, x_0) \in \mathrm{Init}$

$$\Omega_H = \cup_{(q_0, x_0) \in \mathrm{Init}} \Omega_H(q_0, x_0)$$

$$\Omega_H^\infty = \cup_{(q_0, x_0) \in \mathrm{Init}} \Omega_H^\infty(q_0, x_0)$$

Automi deterministici

Un automa H si dice deterministico se ad ogni condizione iniziale $(q_0, x_0) \in \mathrm{Init}$ corrisponde una unica traiettoria χ

Il non determinismo si deve a:

- reset di x non deterministici
- transizioni non deterministiche
- non unicità della soluzione continua $x(t)$
- inclusioni differenziali

Automi auto-bloccanti

Un automa H si dice non auto-bloccante se

$$\Omega_H^{\infty}(q_0\,, x_0) \neq \emptyset$$

per tutte le condizioni iniziali $(q_0\,, x_0) \in \mathrm{Init}$

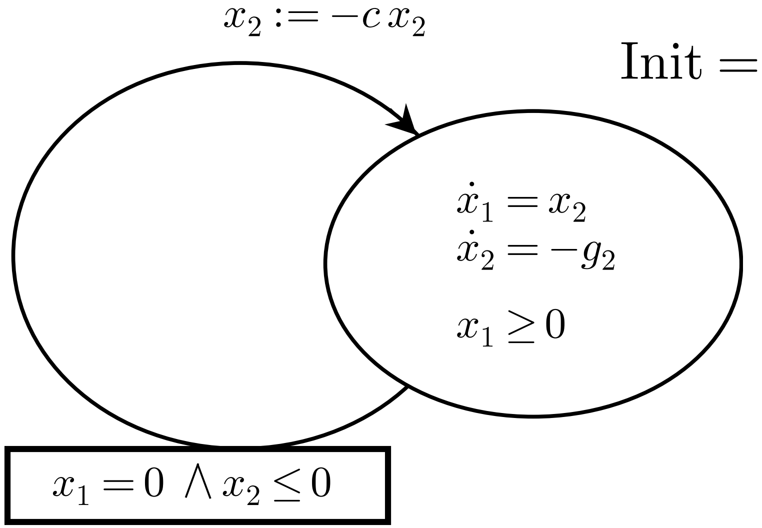
$$\mathrm{Reach}_H = \{(q,x) \in Q \times \mathbb{R}^n : \\ \exists\, \chi \in \Omega_H, (q(\tau'_N), x(\tau'_N)) = (q,x),\ N < \infty\}$$

$$\mathrm{Out}_H = \{(q,x) \in Q \times \mathbb{R}^n : \\ \forall \epsilon > 0,\ \exists\, t \in [\,0, \epsilon\,)\ :\ (q, \phi(t,x)) \notin \mathrm{Inv},\ \forall \phi(t,x)\}$$

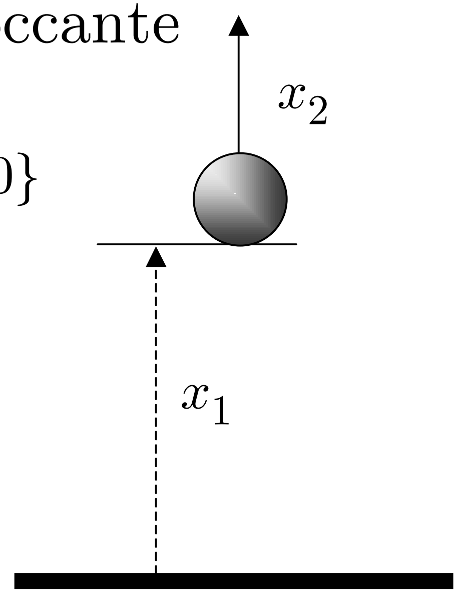
$\phi(t,x)$ soluzione (possibilmente non unica) dell'eq. differenziale associata a q con condizione iniziale x

> Un automa ibrido H è non auto-bloccante se
> $\forall (q,x) \in \mathrm{Out}_H \cap \mathrm{Reach}_H,\ \mathrm{Jump}(q,x) \neq \emptyset$

Es. Automa ibrido non auto-bloccante



$$\text{Init} = \{(q,x) : x_1 \geq 0\}$$

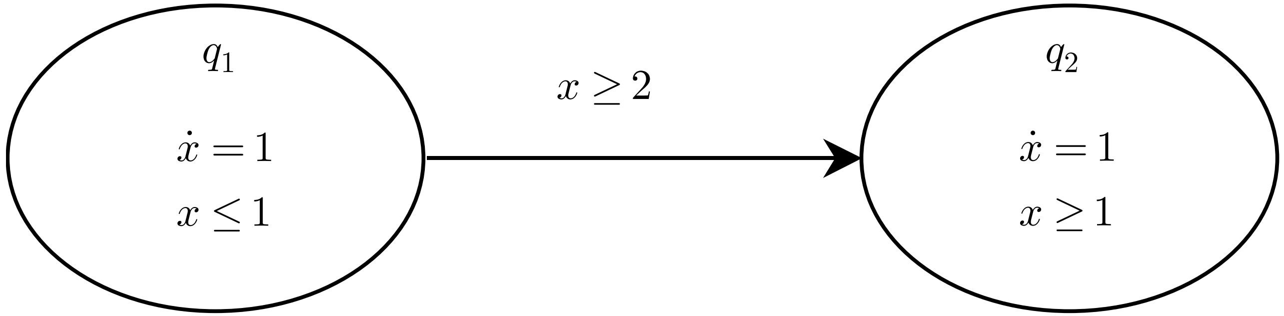


$$\text{Reach}_H = \{(q,x) : x_1 \geq 0\}$$

$$\text{Out}_H = \{(q,x) : x_1 < 0\} \cap \{(q,x) : x_1 = 0, x_2 \leq 0\}$$

$$\text{Out}_H \cap \text{Reach}_H = \{(q,x) : x_1 = 0, x_2 \leq 0\}$$

Es. Automa ibrido auto-bloccante



$$\mathrm{Init} \cap \{(q_1, x) : x < 2\} \neq \emptyset \quad ?$$

Automi zenoniani

Un automa H si dice zenoniano se

$\exists\,(q_0\,, x_0) \in \mathrm{Init}$ tale che almeno una

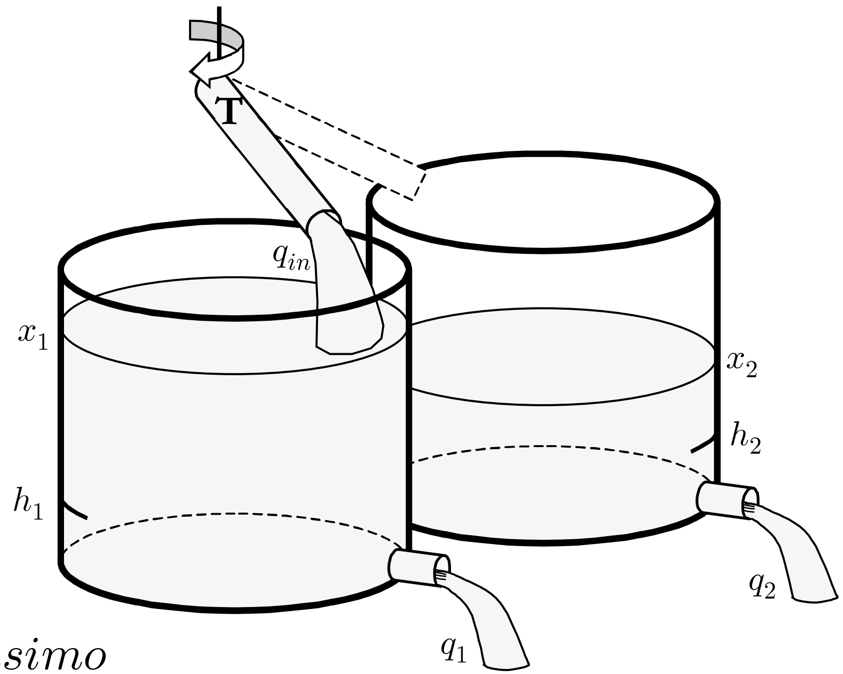
traiettoria in $\Omega_H^{\infty}(q_0\,, x_0)$ sia zenoniana

Non appena un serbatoio si svuota fino al livello h, il tubo **T** viene posizionato su quel serbatoio fino a quando l'altro serbatoio non si svuoti fino al livello h.

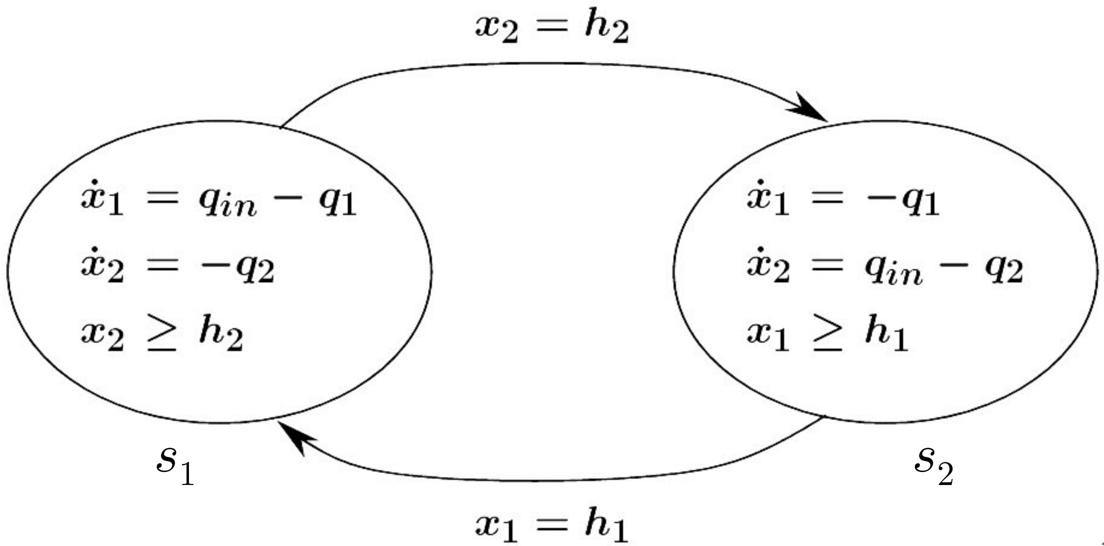
$$x_i(0) \geq h_i$$

$$\Sigma_i\, q_i > q_{in}$$

$$q_{in} > q_i$$

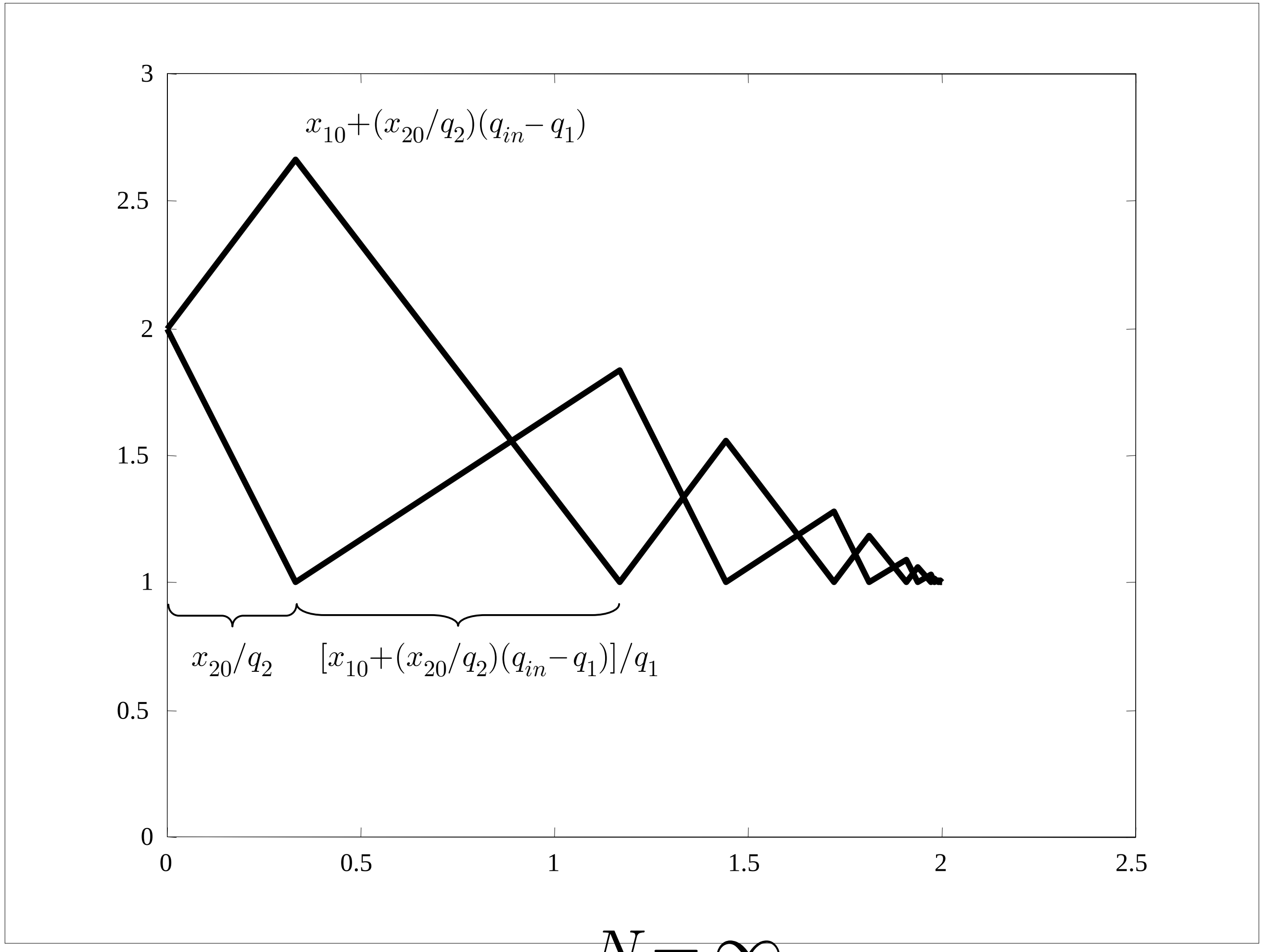


h_i *livello di guardia i-esimo*
x_i *livello serbatoio i-esimo*
q_i *portata in uscita serbatoio i-esimo*
q_{in} *portata in ingresso*



$$q_{in} = 4$$
$$q_1 = 2$$
$$q_2 = 3$$
$$h_1 = 1$$
$$h_2 = 1$$

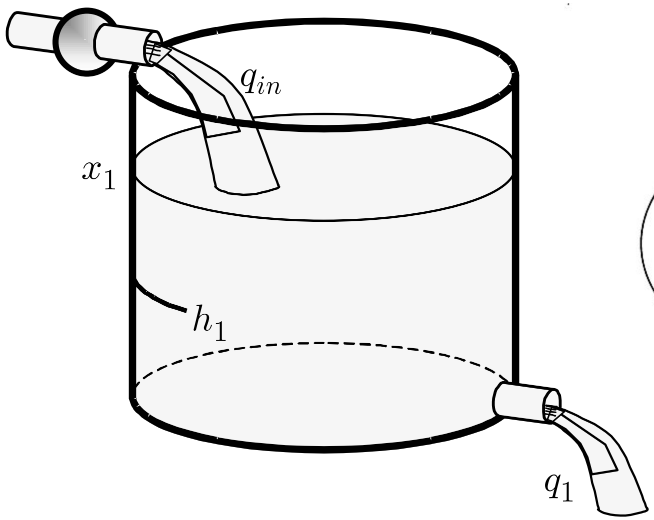
$$(q_0\,, x_0) = (s_1\,, (2\,,\,2\,))$$

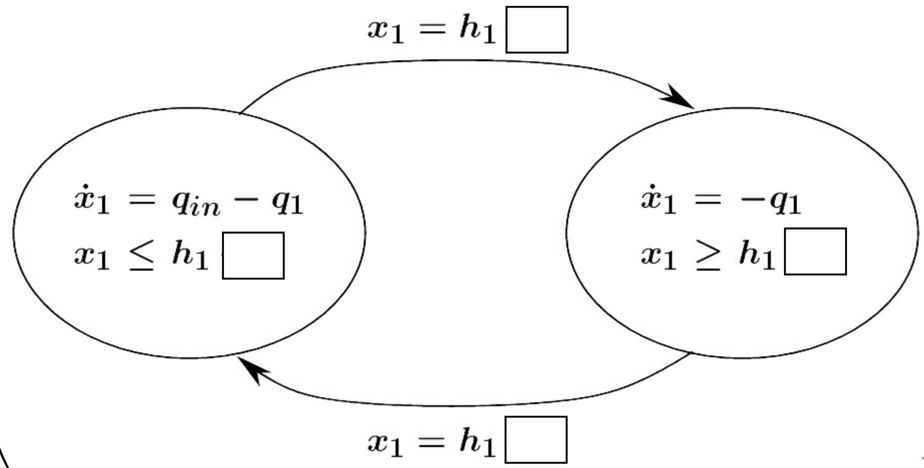


$$N=\infty$$

$$\tau_\infty(\chi)=(x_{10}+x_{20}-h_1-h_2)/(q_1+q_2-q_{in})<\infty$$

La valvola viene aperta se il livello è inferiore al livello h_1, chiusa se il livello è superiore al livello h_1.

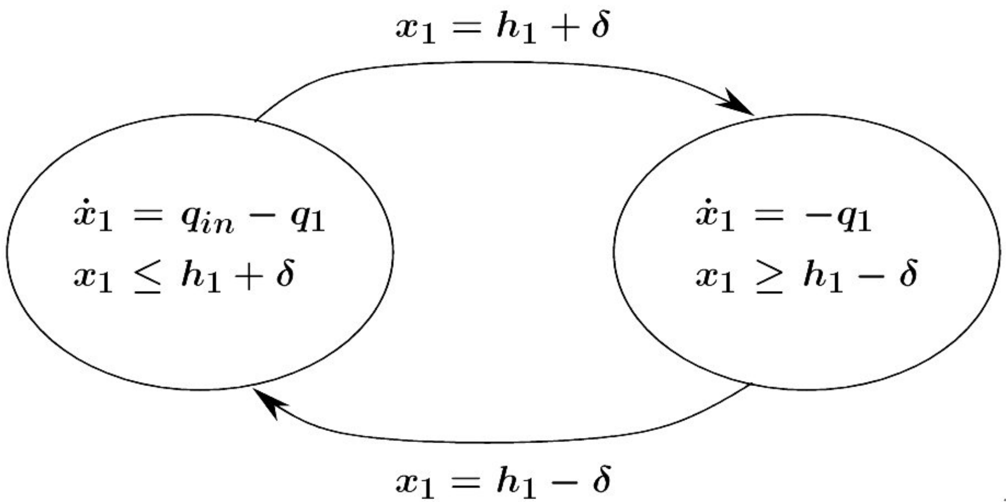


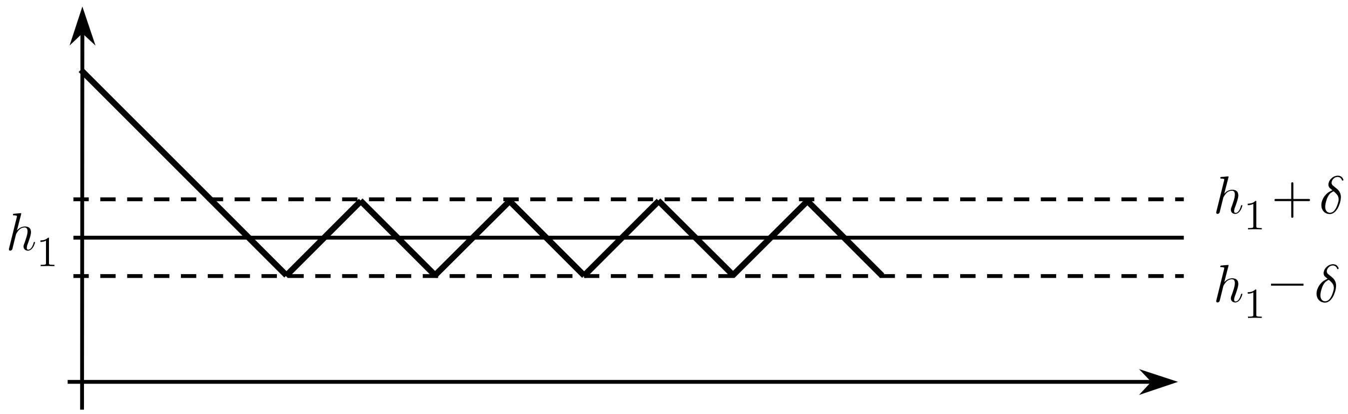


h_1 *livello di guardia*
x_1 *livello serbatoio*
q_1 *portata in uscita*
$q_{in}=2q_1$ *portata in ingresso*

$$N = \infty$$

$$\tau_\infty(\chi) = x_1(0)/q_1$$


$x_1 = h_1 + \delta$
$\dot{x}_1 = q_{in} - q_1$
$x_1 \leq h_1 + \delta$
$\dot{x}_1 = -q_1$
$x_1 \geq h_1 - \delta$
$x_1 = h_1 - \delta$


h_1
$h_1 + \delta$
$h_1 - \delta$

Un automa ibrido H è zenoniano solo se il grafo (Q, E) ha un ciclo

Se esiste una collezione finita di stati

$\{(q_i, x_i)\}_{i=1}^{K} \in Q \times \mathbb{R}^n$ tali che:

- $(q_1, x_1) = (q_K, x_K)$
- $\exists i \in \{1, \ldots, K\} : (q_i, x_i) \in \mathrm{Reach}_H$
- $\forall i \in \{1, \ldots, K-1\},\ (q_{i+1}, x_{i+1}) \in \mathrm{Jump}(q_i, x_i)$

allora l'automa ibrido H è zenoniano

Caos

Anche un automa ibrido con dinamiche continue del tipo $\dot{x} = cost$ può avere:

$\star$ forte sensibilità dalle condizioni iniziali

$\star$ orbite periodiche di periodo arbitrario

cioè un

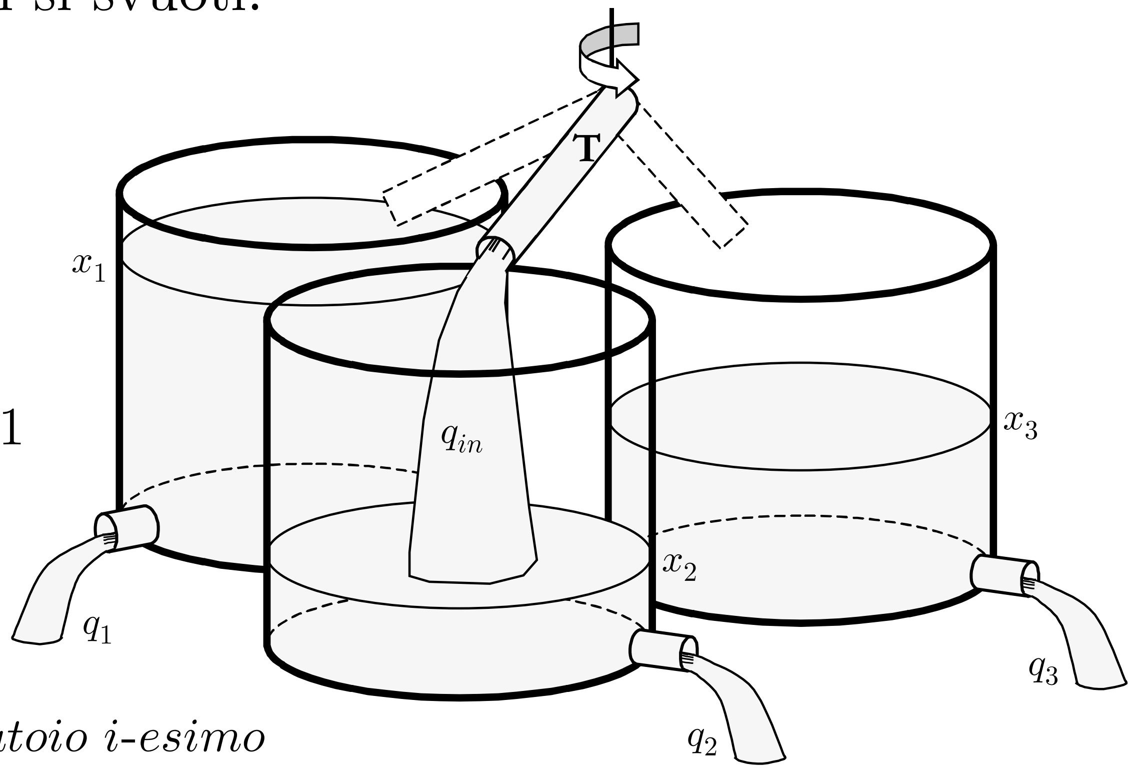
comportamento caotico

Non appena un serbatoio si svuota il tubo **T** viene posizionato su quel serbatoio fino a quando un altro serbatoio non si svuoti.

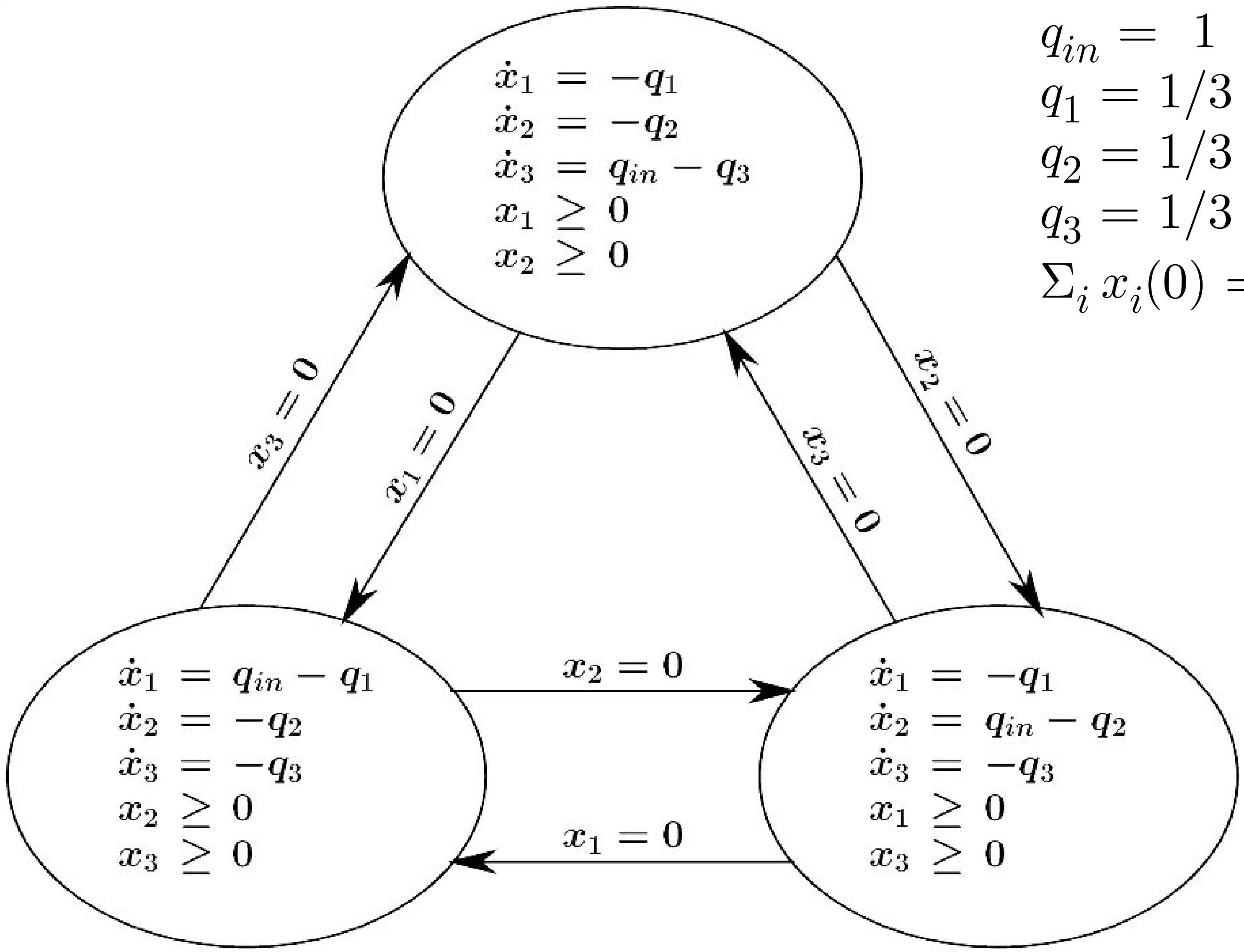
$x_i(0) \geq 0$

$\Sigma_i \, x_i(0) = 1$

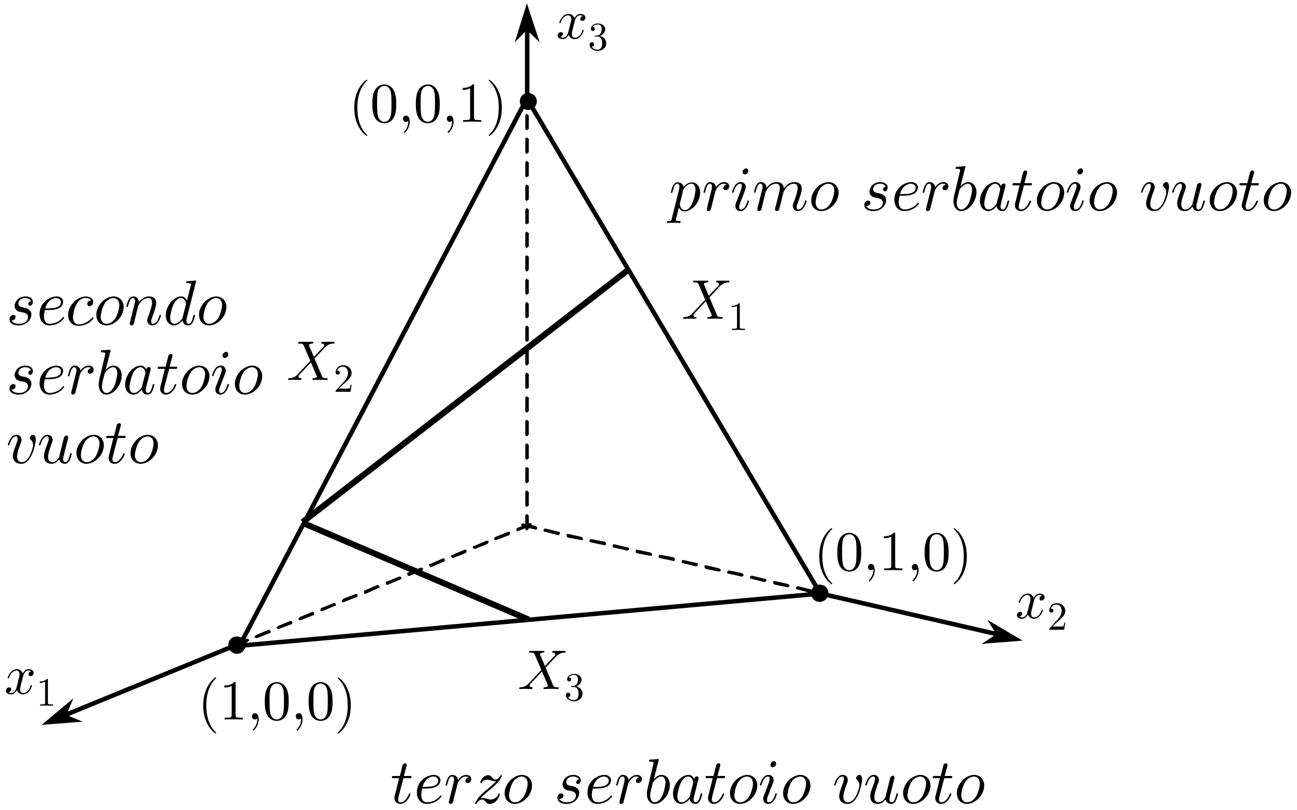
$\Sigma_i \, q_i = q_{in} = 1$



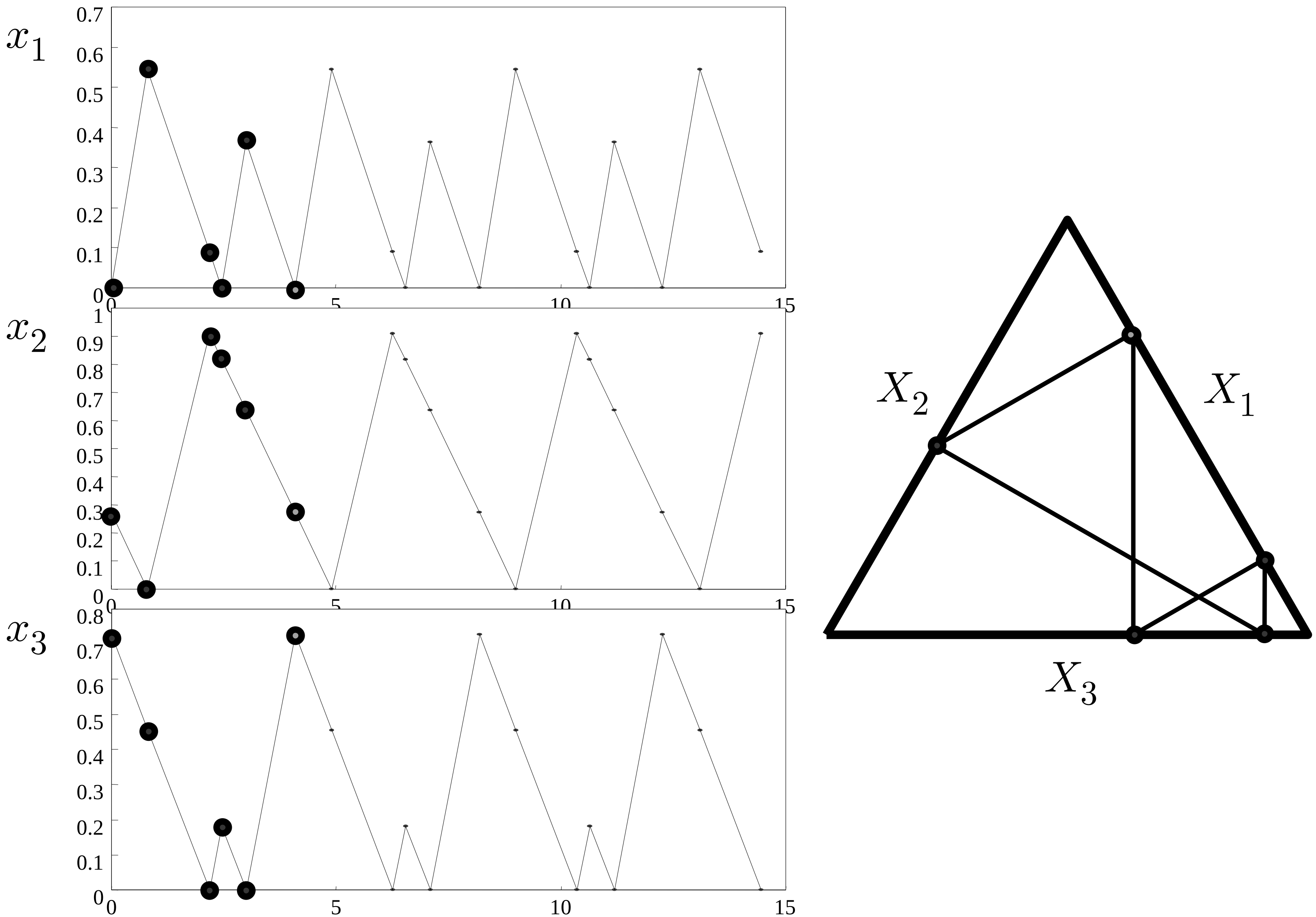
x_i *livello serbatoio i-esimo*
q_i *portata in uscita serbatoio i-esimo*
q_{in} *portata in ingresso*

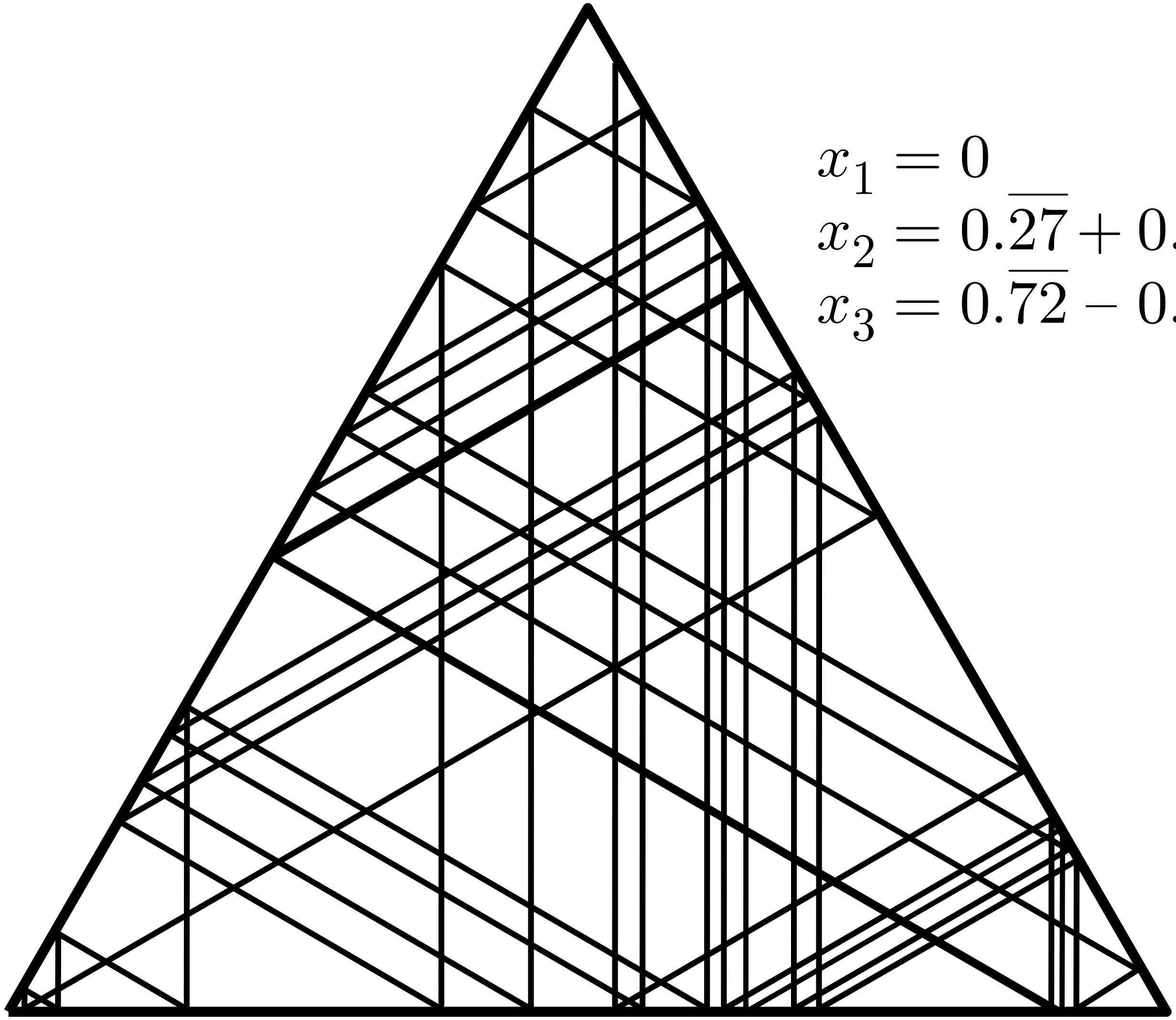


$$q_{in} = 1$$
$$q_1 = 1/3$$
$$q_2 = 1/3$$
$$q_3 = 1/3$$
$$\Sigma_i \, x_i(0) = 1$$

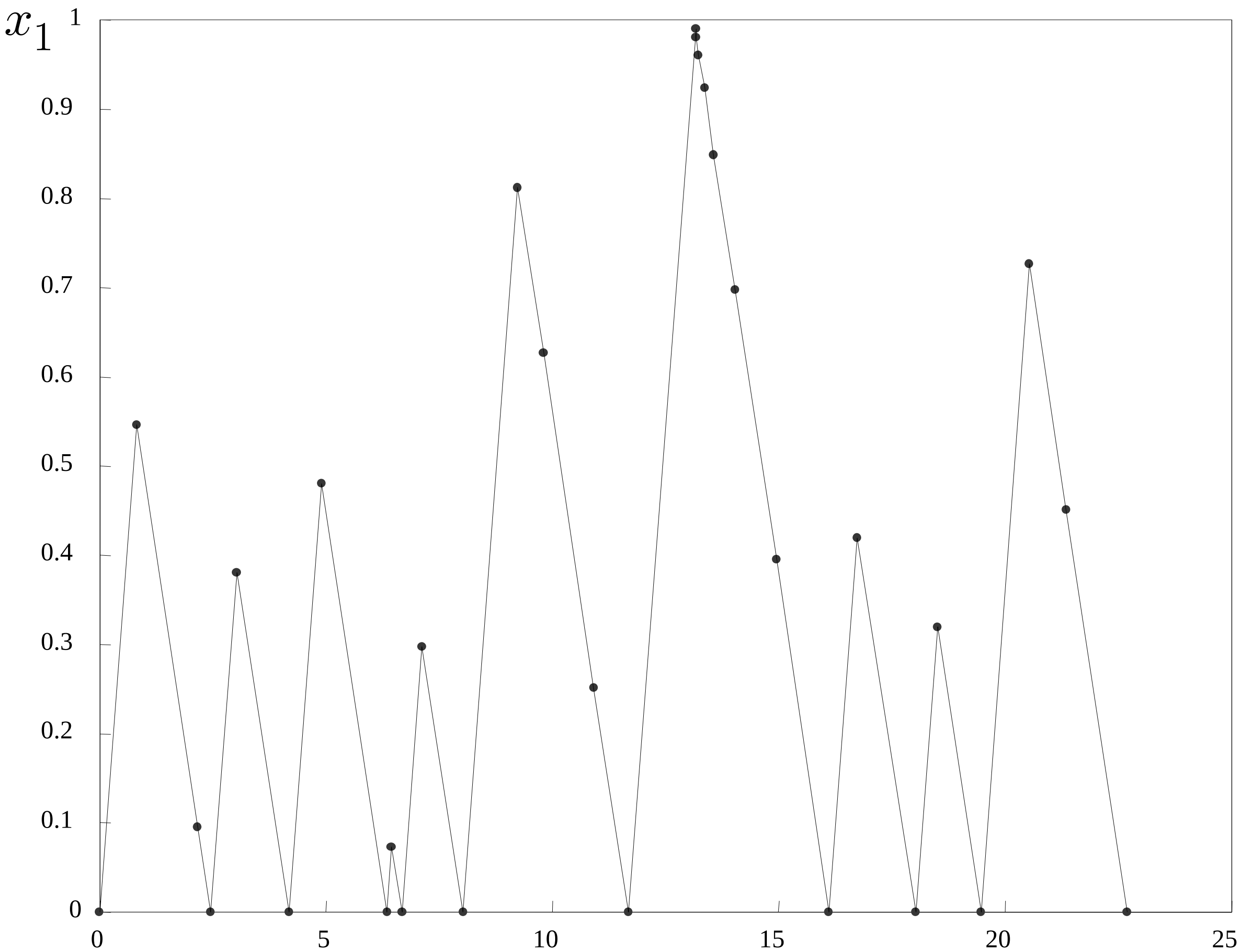


$$x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) = 1 \qquad x_1(t) \geq 0 \quad x_2(t) \geq 0 \quad x_3(t) \geq 0$$

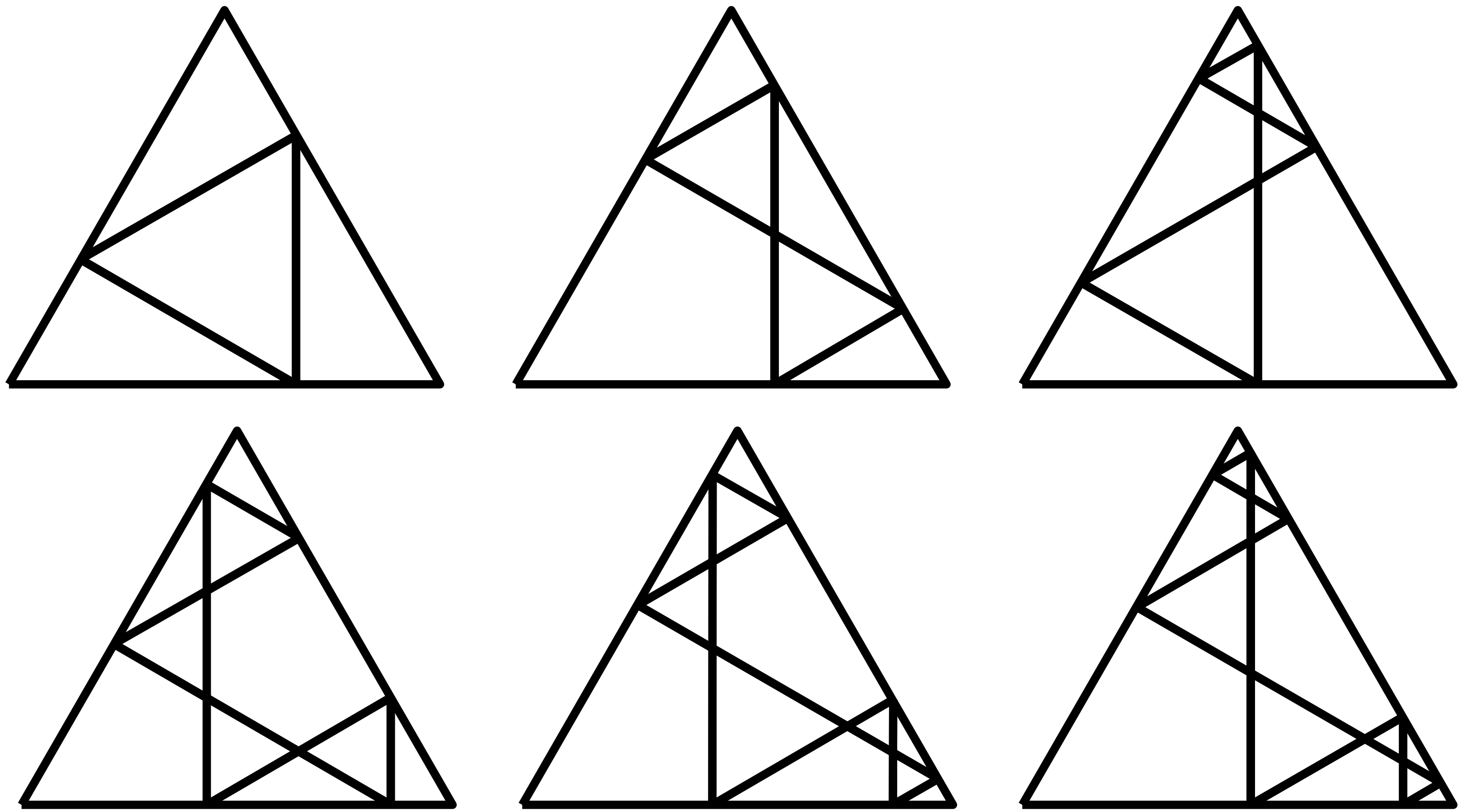

x_1
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
5
10
15
x_2
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
5
10
15
x_3
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
5
10
15
X_2
X_1
X_3



$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 0.\overline{27} + 0.001$$
$$x_3 = 0.\overline{72} - 0.001$$


x_1
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
5
10
15
20
25

Traiettorie periodiche



E´ possibile dimostrare che ci sono orbite periodiche di periodo arbitrario

Stabilità

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \qquad x(0) = x_0$$

Lo stato $x = x_e$ è uno stato di equilibrio per f se $f(x_e) = 0$

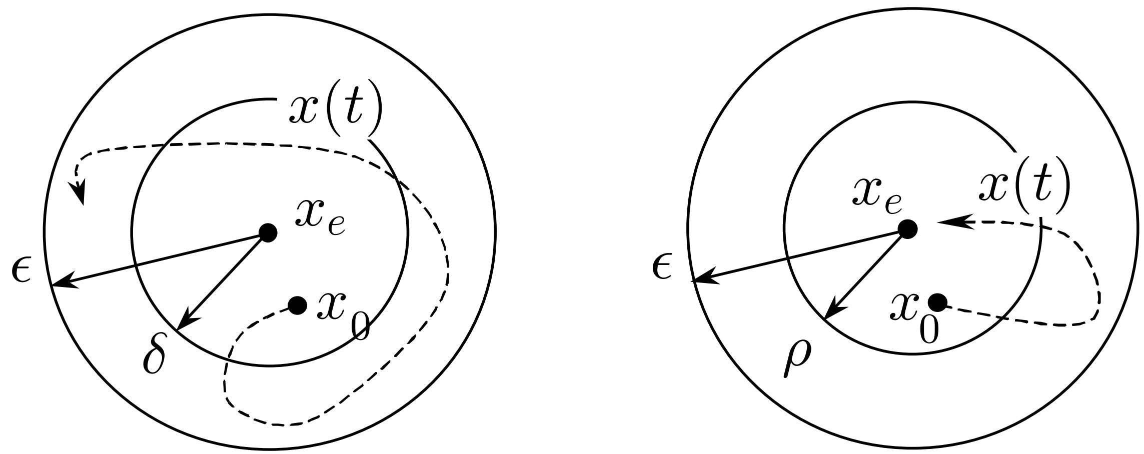
Se $x_0 = x_e$ allora $x(t) = x_e$ per ogni t

Lo stato di equilibrio x_e si dice stabile se

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 : \|x_0 - x_e\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x_e\| < \epsilon, \; \forall t \geq 0$$

Lo stato di equilibrio x_e si dice asintoticamente stabile se è stabile e se

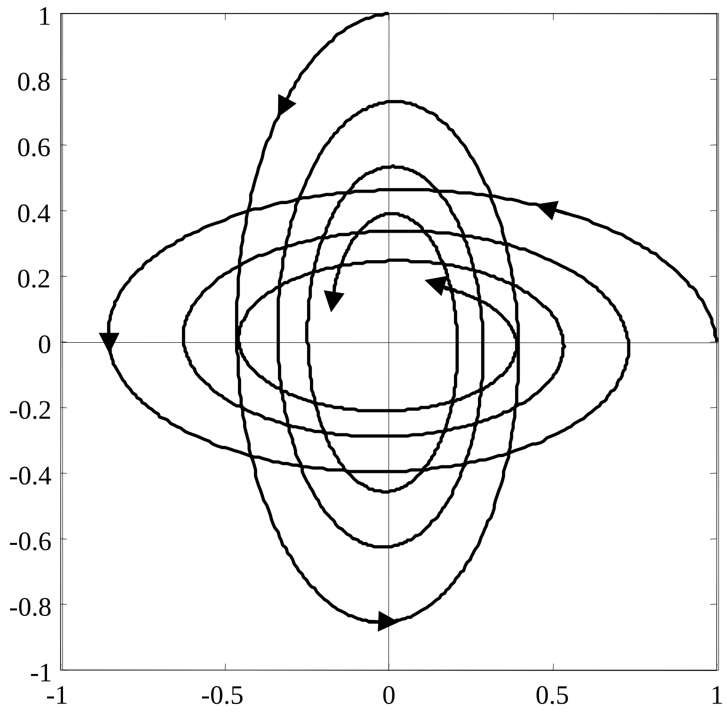
$$\exists\, \rho > 0 : \|x_0 - x_e\| < \rho \Rightarrow \lim_{t \to \infty} \|x(t) - x_e\| = 0$$



Stabilità di automi ibridi

$$A = \begin{pmatrix} -0.1 & -4 \\ 1 & -0.1 \end{pmatrix}$$

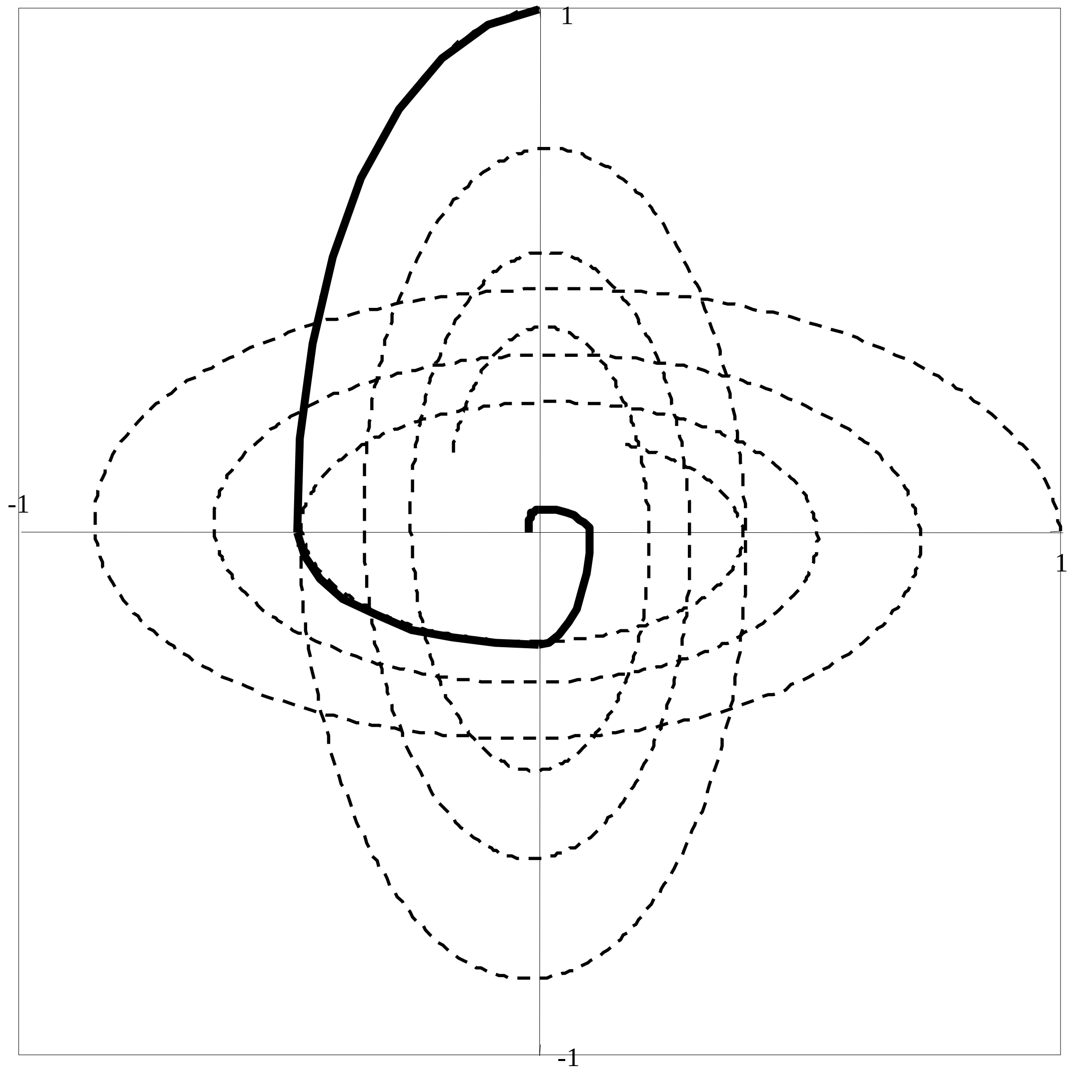
$$A = \begin{pmatrix} -0.1 & -1 \\ 4 & -0.1 \end{pmatrix}$$



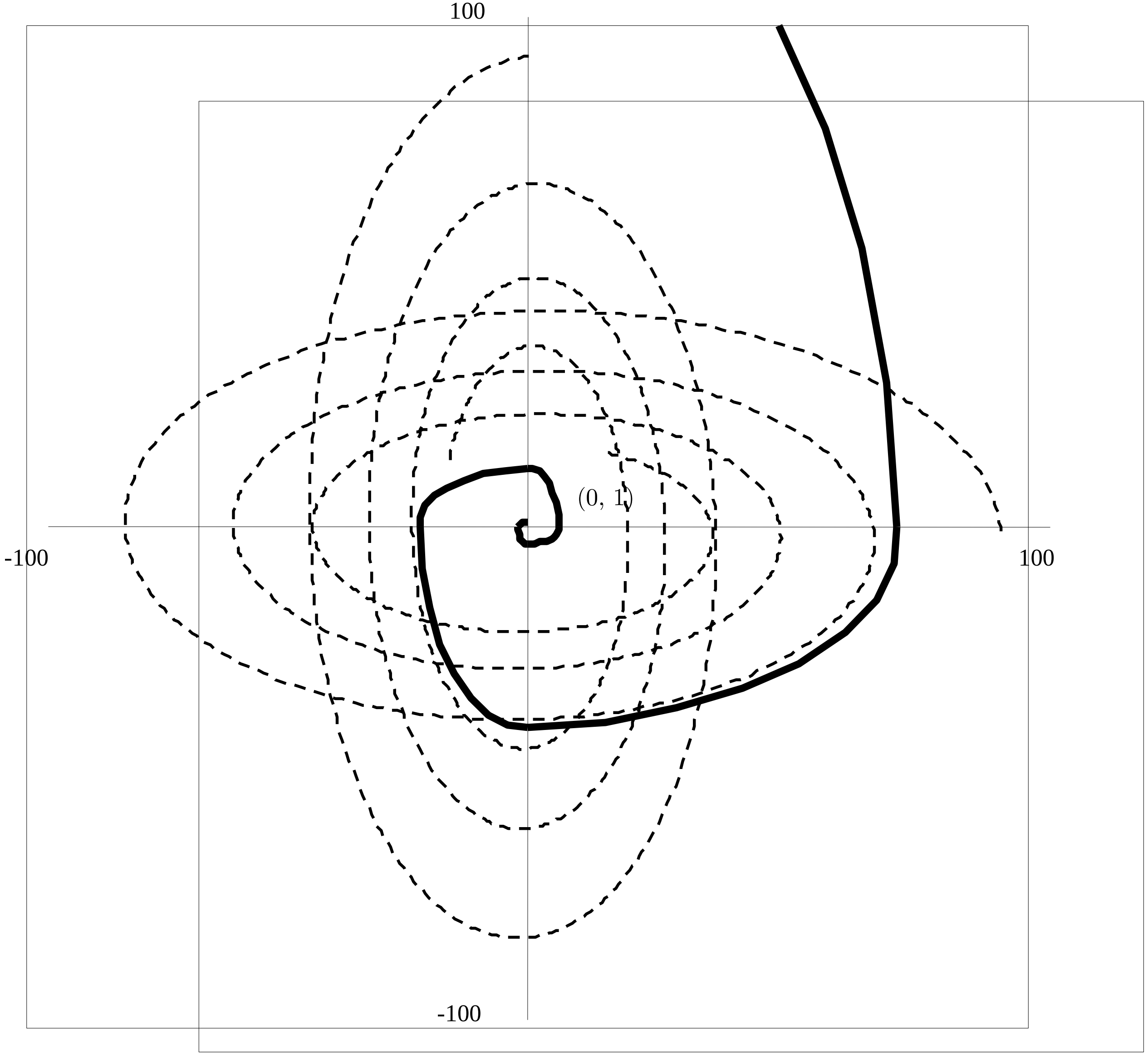
$$\dot{x}(t) = A\,x(t)$$

$$x(t) = e^{At}$$

$$e^{At} = I + A\,t + A^2\,t^2/2 + A^3\,t^3/3! + \ldots$$



1
-1
1
-1


100
-100
100
-100
(0, 1)

Lo stato continuo $x = x_e$ si dice uno stato di equilibrio per l'automa ibrido H se

esiste un insieme non vuoto $\hat{Q} \in Q$ tale che:

$\forall q \in \hat{Q}$

$(\hat{q}, \hat{x}) \in \text{Jump } (q, x_e) \Rightarrow \hat{x} = x_e$ e $\hat{q} \in \hat{Q}$

$f(q, x_e) = 0$

Lo stato di equilibrio x_e si dice stabile se

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 : \forall \chi \in \Omega_H(q_0, x_0) \text{ con } \|x_0 - x_e\| < \delta$$

$$\Downarrow$$

$$\|x(t) - x_e\| < \epsilon,\ \forall t \in \tau$$

Lo stato di equilibrio x_e si dice asintoticamente stabile se è stabile e se

$$\exists\, \rho > 0 : \forall \chi \in \Omega_H^\infty(q_0, x_0) \text{ con } \|x_0 - x_e\| < \delta$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{t \rightarrow\ \tau_\infty} \|x(t) - x_e\| = 0$$

Teorema di Lyapunov

$$(\star)\ \dot{x}(t) = f(x(t)) \qquad x(0) = x_0 \qquad f(x_e) = 0$$

Se esiste (in un intorno $\mathcal{D}$ di x_e) una funzione $\mathcal{V}$ di classe C^1 tale che

$$\mathcal{V}(x_e) = 0$$

$$\mathcal{V}(x) > 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}/\{x_e\}$$

$$\dot{\mathcal{V}}(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}/\{x_e\}$$

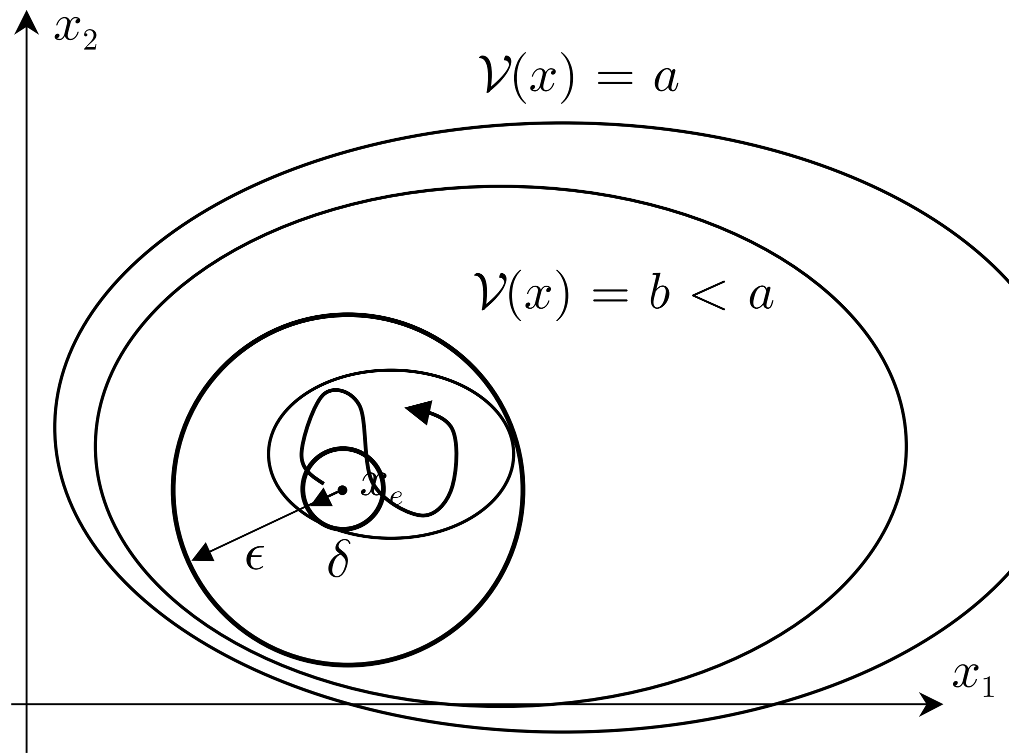
con $\dot{\mathcal{V}}(x)$ calcolata sulle soluzioni $x(t)$ della $(\star)$

allora x_e è un punto di equilibrio asintoticamente stabile

$$\mathcal{V}(x_e) = 0$$

$$\mathcal{V}(x) > 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}/\{x_e\}$$

$$\dot{\mathcal{V}}(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}$$



Cosa dire per automi ibridi? Bisogna trovare o

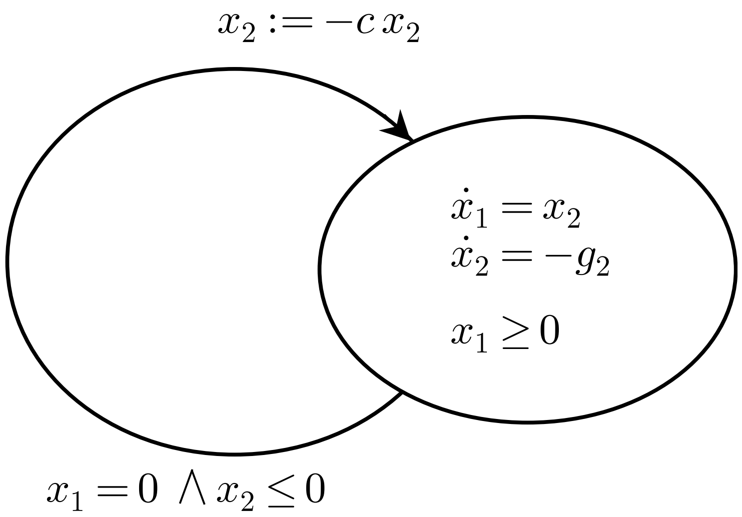
1) una sola funzione di Lyapunov $\mathcal{V}(x)$ valida per ogni stato q e tale che per ogni salto possibile $x_- \rightarrow x_+$

$$\mathcal{V}(x_+) \leq \mathcal{V}(x_-)$$

o

2) diverse funzioni di Lyapunov $\mathcal{V}(q,x)$ ognuna valida solo nel corrispondente q e tali che per ogni salto possibile $q_- \rightarrow q_+$, $x_- \rightarrow x_+$

$$\mathcal{V}(q_+, x_+) \leq \mathcal{V}(q_-, x_-)$$



$$\mathcal{V}(x) = \mathcal{E} = \mathcal{U} + \mathcal{T}$$

in un intervallo $[\tau_i \, , \, \tau_i{}']$, $\mathcal{V}(x) = \text{cost}$

in ogni transizione, $\mathcal{V}(x_+) = c^2 \, \mathcal{V}(x_-)$

$$c < 1 \;\; \Rightarrow \;\; \text{stabilità asintotica}$$

Bibliografia

J. Zhang, Dynamical systems revisited: hybrid systems with Zeno executions, *Masters's thesis*, Dept of EECS, University of California at Berkeley, 1999.

A. van der Schaft, and H. Schumacher, An introduction to hybrid dynamical systems, *Lecture Notes in Control and Information Sciences,* 251, Springer-Verlag, London, 2000.

C. Chase, J. Serrano, and P. J. Ramadge, Periodicity and chaos from switched flow systems: contrasting examples of discretely controlled continuous systems, *IEEE Trans. Automatic Control*, 38, 70-83, 1993.

H. Ye, A. Michel, and L. Hou, Stability theory for hybrid dynamical systems, *IEEE Trans. Automatic Control*, 43, 461-474, 1998.

M. Branicky, Multiple Lyapunov functions and other tools for switched and hybrid systems, *IEEE Trans. Automatic Control*, 43, 475-482, 1998.