

# Analisi Matematica per Bio-Informatici

## Esercitazione 01 – a.a. 2007-2008

Dott. Simone Zuccher

26 Ottobre 2007

**Nota.** Queste pagine potrebbero contenere degli errori: chi li trova è pregato di segnalarli all'autore ([zuccher@sci.univr.it](mailto:zuccher@sci.univr.it)).

### 1 Numeri complessi

Definizioni utili per gli esercizi:

- Chiamiamo numero complesso  $z$  la coppia ordinata  $(x, y)$  tale che  $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Scriveremo  $z \in \mathbb{C}$ .
- Per definizione:  $0 := (0, 0)$ ,  $1 := (1, 0)$ ,  $i := (0, 1)$ .
- Definite le operazioni di somma, differenza, prodotto e divisione tra numeri complessi, si verifica facilmente che  $i^2 = -1$ .
- Parte reale di  $z$ :  $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(x, y) = x$ ; parte immaginaria di  $z$ :  $\operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(x, y) = y$ .
- Forma cartesiana equivalente.  $z = (x, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = (x, 0) + i \cdot (y, 0) = x + iy$
- Complesso coniugato di  $z \in \mathbb{C}$ .  $\bar{z} := (x, -y) = x - iy$
- Modulo di  $z \in \mathbb{C}$ .  $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$
- *Piano di Gauss*: sistema di riferimento cartesiano ortogonale in cui si riporta in ascissa  $\operatorname{Re}(z)$  e in ordinata  $\operatorname{Im}(z)$ . Pertanto,  $z = x + iy$  è rappresentato dal punto  $P(\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z)) = P(x, y)$ .
- Forma trigonometrica equivalente. Indicando con  $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  e con  $\theta$  l'angolo formato, sul piano di Gauss, dal segmento orientato  $OP$  con il semiasse positivo delle ascisse, sfruttando le relazioni trigonometriche sui triangoli rettangoli si ha:

$$z = x + iy = \rho(\cos \theta + i \sin \theta).$$

$\rho$  e  $\theta$  si chiamano, rispettivamente, *modulo* e *argomento (principale)* del numero complesso  $z$ .

- Passaggio dalla forma cartesiana alla forma trigonometrica.

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta, \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arcsin\left(\frac{y}{\rho}\right) = \arccos\left(\frac{x}{\rho}\right), \rho \neq 0. \end{cases}$$

- Forma esponenziale equivalente. Si può dimostrare che  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ . Pertanto, il generico numero complesso  $z$  può essere riscritto come:

$$z = x + iy = \rho e^{i\theta}.$$

Questa semplice formula risulta particolarmente comoda ogniqualvolta si debbano eseguire prodotti o divisioni tra numeri complessi in quanto si basa sulla mera applicazione delle elementari proprietà delle potenze. Si noti che la formula  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ , detta anche formula di Eulero, nel caso  $\theta = \pi$  si riduce a

$$1 + e^{i\pi} = 0,$$

formula di particolare bellezza che racchiude in sé le 5 entità fondamentali della matematica.

- Potenze e radici  $n$ -esime di numeri complessi. Dalla formula di Eulero si ricava immediatamente

$$z^n = \rho^n e^{in\theta} = \rho^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]$$

$$\sqrt[n]{z} = z^{1/n} = \rho^{1/n} \left[ \cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right], k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Le formule precedenti sono dette anche *formule di De Moivre*. Si noti che le radici  $n$ -esime del numero complesso  $z$  non sono altro che i vertici del poligono regolare di  $n$  lati inscritto nella circonferenza con centro nell'origine e raggio  $\sqrt[n]{\rho}$ , dove il primo vertice ha come argomento principale l'angolo  $\theta/n$  ottenuto per  $k = 0$ .

**Esercizio 1.1** Dati  $z = 1 + 2i$  e  $w = 2 - i$ , utilizzando la forma cartesiana, determinare  $z + w$ ,  $w - z$ ,  $zw$ ,  $\bar{z}w$ ,  $|z|$ ,  $|w|$ ,  $z\bar{z}$ ,  $z^2$ ,  $z^2w$ ,  $z/w$ ,  $w/z$ .

**Risoluzione.**

- $z + w = (1 + 2i) + (2 - i) = 3 + i$
- $w - z = (2 - i) - (1 + 2i) = 1 - 3i$
- $zw = (1 + 2i) \cdot (2 - i) = 2 - i + 4i - 2i^2 = 2 + 3i + 2 = 4 + 3i$
- $\bar{z}w = (1 - 2i) \cdot (2 - i) = 2 - i - 4i + 2i^2 = 2 - 5i - 2 = -5i$
- $|z| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$
- $|w| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$
- $z\bar{z} = (1 + 2i) \cdot (1 - 2i) = 1^2 - 4i^2 = 1 + 4 = 5$

- $z^2 = (1 + 2i)^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 2i + 4i^2 = 1 + 4i - 4 = -3 + 4i$
- $z^2 w = (1 + 2i)^2 \cdot (2 - i) = (-3 + 4i) \cdot (2 - i) = -6 + 3i + 8i - 4i^2 = -2 + 11i$
- $\frac{z}{w} = \frac{1 + 2i}{2 - i} = \frac{1 + 2i}{2 - i} \cdot \frac{2 + i}{2 + i} = \frac{2 + i + 4i + 2i^2}{4 - i^2} = \frac{5i}{5} = i$
- $\frac{w}{z} = \frac{2 - i}{1 + 2i} = \frac{2 - i}{1 + 2i} \cdot \frac{1 - 2i}{1 - 2i} = \frac{2 - 4i - i + 2i^2}{1 - 4i^2} = \frac{-5i}{5} = -i$ , oppure si noti che  
 $\frac{z}{w} = \frac{1}{\frac{w}{z}} = \frac{1}{-i} = i$

■

**Esercizio 1.2** Scrivere i numeri complessi  $z = 1 + i\sqrt{3}$  e  $w = -1 - \frac{i}{\sqrt{3}}$  in forma trigonometrica ed esponenziale. Quindi, utilizzando tali forme, calcolare  $zw$ ,  $\bar{z}w$ ,  $z^2$ ,  $z/w$ . Infine, verificare i risultati utilizzando la forma cartesiana.

**Risoluzione.**

1.  $z = 1 + i\sqrt{3}$ .  $\rho = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$ ;  $(\cos \theta = 1/2 \wedge \sin \theta = \sqrt{3}/2) \Rightarrow \theta = \pi/3 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , ovvero  $z = 2[\cos(\pi/3) + i \sin(\pi/3)] = 2e^{i\pi/3}$ .
2.  $w = -1 - \frac{i}{\sqrt{3}}$ .  $\rho = \sqrt{(-1)^2 + (-1/\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 1/3} = 2/\sqrt{3}$ ;  $(\cos \theta = -1/(2/\sqrt{3}) = -\sqrt{3}/2 \wedge \sin \theta = (-1/\sqrt{3})/(2/\sqrt{3}) = -1/2) \Rightarrow \theta = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , ovvero  $w = \frac{2}{\sqrt{3}}[\cos(\frac{7}{6}\pi) + i \sin(\frac{7}{6}\pi)] = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{7}{6}\pi}$ .
  - $zw = [2e^{i\frac{\pi}{3}}] \cdot [\frac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{7}{6}\pi}] = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{3} + i\frac{7}{6}\pi} = \frac{4}{\sqrt{3}}e^{i\frac{3}{2}\pi} = \frac{4}{\sqrt{3}}[\cos(\frac{3}{2}\pi) + i \sin(\frac{3}{2}\pi)] = -\frac{4}{\sqrt{3}}i$ . Utilizzando la forma cartesiana si ha  $zw = (1 + i\sqrt{3}) \cdot (-1 - \frac{i}{\sqrt{3}}) = -1 - \frac{i}{\sqrt{3}} - i\sqrt{3} - i^2 = -\frac{4}{\sqrt{3}}i$
  - $\bar{z}w = [2e^{-i\frac{\pi}{3}}] \cdot [\frac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{7}{6}\pi}] = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-i\frac{\pi}{3} + i\frac{7}{6}\pi} = \frac{4}{\sqrt{3}}e^{i\frac{5}{6}\pi} = \frac{4}{\sqrt{3}}[\cos(\frac{5}{6}\pi) + i \sin(\frac{5}{6}\pi)] = \frac{4}{\sqrt{3}}[-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i] = -2 + \frac{2}{\sqrt{3}}i$ . La verifica è immediata:  $\bar{z}w = (1 - i\sqrt{3}) \cdot (-1 - \frac{i}{\sqrt{3}}) = -1 - \frac{i}{\sqrt{3}} + i\sqrt{3} + i^2 = -2 + \frac{2}{\sqrt{3}}i$ .
  - $z^2 = [2e^{i\frac{\pi}{3}}]^2 = 4e^{i\frac{2}{3}\pi} = -2 + 2\sqrt{3}i$ . Si lascia allo studente verificare che  $(1 + i\sqrt{3})^2 = -2 + 2\sqrt{3}i$ .
  - $\frac{z}{w} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\frac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{7}{6}\pi}} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{3} - i\frac{7}{6}\pi} = \sqrt{3}e^{-i\frac{5}{6}\pi} = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ . Si lascia allo studente la verifica nella forma cartesiana.

■

**Esercizio 1.3** Sia  $w = z + z\bar{z} - z^2 + 2i + \bar{z} - 2(\operatorname{Im}(z))^2$ . Determinare il luogo geometrico dei punti del piano complesso (piano di Gauss) tali che  $\operatorname{Re}(w) = 3$  e  $\operatorname{Im}(w) = 0$ .

**Risoluzione.**  $w = z + z\bar{z} - z^2 + 2i + \bar{z} - 2(\operatorname{Im}(z))^2 = x + iy + x^2 + y^2 - (x^2 + 2xyi - y^2) + 2i + x - iy - 2y^2 = 2x - 2xyi + 2i = 2x + (-2xy + 2)i$ . Pertanto:

$\operatorname{Re}(w) = 3 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = 3/2$ , ossia retta verticale.

$\operatorname{Im}(w) = 0 \Leftrightarrow -2xy + 2 = 0 \Leftrightarrow xy = 1$ , ossia iperbole equilatera riferita ai propri asintoti.

■

**Esercizio 1.4** Risolvere in  $\mathbb{C}$  l'equazione

$$2iz + 3 - 4i = 0$$

**Risoluzione.** Il modo più veloce è di ricavare  $z$  seguendo il procedimento tipico delle equazioni di primo grado. Si ha quindi  $2iz = -3 + 4i$  da cui  $z = (-3 + 4i)/2i$  e quindi (moltiplicando numeratore e denominatore per  $i$ )  $z = 2 + 3i/2$ .

Un altro modo consiste nel sostituire  $z = x + iy$  e separare la parte reale dell'equazione da quella immaginaria, ottenendo in tal modo un sistema di due equazioni in due incognite.

Nel caso in esame si ha quindi  $2i(x + iy) + 3 - 4i = 0 \Leftrightarrow 2ix - 2y + 3 - 4i = 0 \Leftrightarrow (3 - 2y) + (2x - 4)i = 0$ , ossia:

$$\begin{cases} 3 - 2y = 0 \\ 2x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3/2 \end{cases} \Leftrightarrow z = 2 + 3i/2$$

Si noti che, se ci si limita ai numeri complessi in forma cartesiana, questo ultimo metodo risulta talvolta l'unico o quantomeno il più efficace (si veda l'esercizio seguente). ■

**Esercizio 1.5** Risolvere in  $\mathbb{C}$  le equazioni

$$z^2 - 4 = 0 \qquad z^2 + 4 = 0$$

**Risoluzione.**  $z^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow z^2 = 4 \Rightarrow z = \pm 2$ .

$z^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow z^2 = -4 \Rightarrow z = \pm\sqrt{-2} = \pm\sqrt{-1}\sqrt{2} = \pm i\sqrt{2}$ . ■

**Esercizio 1.6** Risolvere in  $\mathbb{C}$  l'equazione

$$z^2 - 5 - 12i = 0$$

**Risoluzione.** Risolvendo classicamente l'equazione di secondo grado si ottiene  $z = \pm\sqrt{5 + 12i}$ . Tuttavia,  $\sqrt{5 + 12i}$  non è facilmente determinabile nemmeno ricorrendo alla forma trigonometrica o esponenziale in quanto  $5 + 12i = \rho e^{i\theta}$  con  $\rho = 13$  e  $\theta =$

$\arcsin(5/12) \approx 1.176 \approx 67.38^\circ$  e quindi le formule di De Moivre non possono essere applicate. Tornando all'equazione iniziale, la risolviamo in forma cartesiana introducendo  $z = x + iy$  ottenendo  $z^2 - 5 - 12i = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2xyi - y^2 = 5 + 12i$ , ossia

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ 2xy = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6/y \\ 36/y^2 - y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6/y \\ y^4 + 5y^2 - 36 = 0 \end{cases}$$

$y^4 + 5y^2 - 36 = 0 \Rightarrow y^2 = -9 \vee y^2 = 4$  ma si noti che  $x, y \in \mathbb{R}$  e quindi  $y^2 = -9$  non è accettabile.  $y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2 \Rightarrow x = \pm 3$  Quindi,  $z^2 - 5 - 12i = 0 \Rightarrow z = \pm(3 + 2i)$ . Si noti che le soluzioni si trovano su un cerchio con centro nell'origine e raggio  $\sqrt{13}$ , l'una diametralmente opposta all'altra. ■

**Esercizio 1.7** Risolvere in  $\mathbb{C}$  l'equazione

$$iz^2 - z - 3 + i = 0$$

**Risoluzione.** Applicando la formula per le equazioni di secondo grado si ottiene

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(i) \cdot (-3 + i)}}{2i} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 12i + 4}}{2i} = \frac{1 \pm \sqrt{5 + 12i}}{2i}$$

Siccome dall'esercizio 6 è noto il valore di  $\sqrt{5 + 12i}$ , le soluzioni sono

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{5 + 12i}}{2i} = \frac{1 \pm (3 + 2i)}{2i} \Rightarrow z = (1 - 2i) \vee z = (-1 + i)$$

Si noti che, in generale,  $\sqrt{\Delta}$  nell'equazione di secondo grado in  $z$  non è noto e il suo calcolo richiede la soluzione di un sistema nonlineare di due equazioni in due incognite. Pertanto, il lavoro richiesto è equivalente a sostituire direttamente nell'equazione di partenza  $z = x + iy$ . Così facendo si ottiene  $iz^2 - z - 3 + i = 0 \Leftrightarrow i(x^2 + 2xyi - y^2) - x - iy - 3 + i \Leftrightarrow (-2xy - x - 3) + (x^2 - y^2 - y + 1)i = 0$ , ossia

$$\begin{cases} -2xy - x - 3 = 0 \\ x^2 - y^2 - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3/(2y + 1) \\ (-3/(2y + 1))^2 - y^2 - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dots$$

Che porta, come si verifica facilmente, a  $z = (1 - 2i) \vee z = (-1 + i)$ . ■

**Esercizio 1.8** Risolvere in  $\mathbb{C}$  l'equazione

$$iz^2 - z\bar{z} + 9 + 3i = 0$$

**Risoluzione.** L'equazione diventa  $i(x^2 + 2xyi - y^2) - (x^2 + y^2) + 9 + 3i = 0$ , da cui  $-(x^2 + y^2 + 2xy - 9) + (x^2 - y^2 + 3)i = 0$ , ovvero

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2xy - 9 = 0 \\ x^2 - y^2 + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 = 9 \\ (x + y)(x - y) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \pm 3 \\ (x + y)(x - y) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = -1 \end{cases} \cup \begin{cases} x + y = -3 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \cup \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$$

da cui  $z = \pm(1 + 2i)$ . ■

**Esercizio 1.9** Calcolare, in  $\mathbb{C}$ , le radici terze di  $i$ .

**Risoluzione.** In questo caso risulta estremamente conveniente utilizzare la forma esponenziale e le formule di De Moivre:  $i = e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow i^{1/3} = \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right)$ ,  $k = 0, 1, 2$ . Pertanto,  $z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}/2 + i/2$ ,  $z_2 = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}/2 + i/2$ ,  $z_3 = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -i$ . Si noti che le soluzioni trovate sono i vertici del triangolo equilatero inscritto nella circonferenza con centro nell'origine e raggio unitario ( $\rho = 1$ ) per il quale il segmento congiungente il primo vertice con l'origine forma un angolo  $\theta/n = (\pi/2)/3 = \pi/6$  con il semiasse positivo dell'ascisse.

Considerando il problema dal punto di vista cartesiano, le radici cercate sono le soluzioni dell'equazione  $z^3 = i$ , ovvero

$$(x + iy)^3 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 + y^3i^3 - i = 0 \Leftrightarrow (x^3 - 3xy^2) + (3x^2y - y^3 - 1)i = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 0 \\ 3x^2y - y^3 - 1 = 0 \end{cases}$$

Dalla prima si ha  $x(x^2 - 3y^2) = 0$ , il che implica  $x = 0$  oppure  $x = \pm\sqrt{3}y$  che, sostituiti nella seconda danno rispettivamente  $y = -1$  e  $y = 1/2$ . Le tre radici sono quindi  $z_1 = \sqrt{3}/2 + i/2$  e  $z_2 = -\sqrt{3}/2 + i/2$  e  $z_3 = -i$ . ■

**Esercizio 1.10** Calcolare, in  $\mathbb{C}$ , le radici quarte di  $i$ .

**Risoluzione.** Si proceda come nell'esercizio precedente. Per la forma esponenziale si ottiene  $i = e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow i^{1/4} = \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{4}\right)$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ . Pertanto, le quattro radici sono i vertici del quadrato inscritto nella circonferenza con centro nell'origine e raggio 1 per i quali il segmento che congiunge il primo vertice del quadrato con l'origine forma l'angolo  $\theta/4 = \pi/8$  con l'asse delle ascisse.

Per quanto riguarda la forma cartesiana, si ricorra, per il calcolo di  $(x + iy)^4$ , o al triangolo di Tartaglia o al binomio di Newton ( $(a + b)^4 = \dots$ ). ■

**Esercizio 1.11** Calcolare, in  $\mathbb{C}$ , le radici quarte di  $-4$ .

**Risoluzione.** In forma esponenziale,  $-4 = 4e^{i\pi} \Rightarrow (-4)^{1/4} = \sqrt[4]{4} \left[ \cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) \right]$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ . Pertanto,  $z_1 = 1 + i$ ,  $z_2 = -1 + i$ ,  $z_3 = -1 - i$ ,  $z_4 = 1 - i$ . Si noti che le soluzioni sono i quattro vertici del quadrato inscritto nel cerchio con centro nell'origine e raggio  $\sqrt{2}$ , con il primo di essi avente argomento  $\pi/4$ .

Dal punto di vista cartesiano, bisogna risolvere l'equazione  $z^4 = -4$ , che implica  $z^2 = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$ . Dall'equazione  $z^2 = 2i$  si ottiene  $x^2 + 2xyi - y^2 - 2i = 0 \Rightarrow z = \pm(1 + i)$ .

Da  $z^2 = -2i$  si ottiene  $x^2 + 2xyi - y^2 + 2i = 0 \Rightarrow z = \pm(1 - i)$ . Le quattro radici sono quindi  $z = \pm(1 + i)$  e  $z = \pm(1 - i)$ . ■

**Esercizio 1.12** Risolvere in  $\mathbb{C}$  l'equazione

$$\frac{z^3 + 1}{z^3 - 1} = \frac{1}{i}$$

.

**Risoluzione.** Dopo aver posto  $z^3 \neq 1 \Rightarrow (z \neq 1) \wedge (z \neq -1/2 + \sqrt{3}/2i) \wedge (z \neq -1/2 - \sqrt{3}/2i)$ , si osservi che  $1/i = -i$  e quindi l'equazione si riduce a  $z^3 + 1 = -i(z^3 - 1)$ , da cui si procede come al solito (ponendo  $z = x + iy$  e mettendo a sistema parte reale dell'equazione con parte immaginaria) ottenendo  $z_1 = \sqrt{3}/2 + i/2$ ,  $z_2 = -\sqrt{3}/2 + i/2$ ;  $z_3 = -i$  (si noti che  $y \in \mathbb{R}$  e, pertanto,  $y = (1 \pm \sqrt{3}i)/2$  non è accettabile). ■

**Esercizio 1.13** Risolvere in  $\mathbb{C}$  l'equazione

$$|z - 1| = |z + 1|$$

.

**Risoluzione.** Si osservi che  $(z - 1) = (x - 1) + iy$  e quindi  $|z - 1| = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2}$ . Analogamente,  $|z + 1| = \sqrt{(x + 1)^2 + y^2}$ , per cui si ottiene  $x = 0$  (asse delle ordinate). Intuitivamente, l'esercizio consiste nel trovare i punti del piano che hanno ugual distanza dal punto  $(1; 0)$  e  $(-1; 0)$ . Evidentemente, questo è l'asse del segmento che ha per estremi tali punti, ossia proprio la retta  $x = 0$ . ■

**Esercizio 1.14** Risolvere in  $\mathbb{C}$  e rappresentare graficamente la soluzione della disequazione

$$z + \bar{z} \leq |z|^2$$

.

**Risoluzione.** Si ha  $x + iy + x - iy \leq x^2 + y^2$ , ovvero  $x^2 + y^2 - 2x \geq 0$ . Questi sono tutti i punti del piano esterni o coincidenti con la circonferenza di centro  $C(1; 0)$  e raggio 1. ■

## 2 Principio di induzione

Supponiamo di avere una successione  $P_n$  di proposizioni ( $n \in \mathbb{N}$ ).  $P_n$  è vera per ogni  $n \in \mathbb{N}$  se

(i)  $P_0$  è vera

(ii)  $\forall k \in \mathbb{N} : P_k \Rightarrow P_{k+1}$

**Esercizio 2.1** *Facendo uso del principio di induzione dimostrare la formula*

$$\sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1$$

**Risoluzione.**

- La formula è certamente vera per  $n = 0$  in quanto  $\sum_{k=0}^0 2^k = 2^0 = 1$  e  $2^{0+1} - 1 = 2 - 1 = 1$ .
- Supponiamo che la formula sia vera per  $n = k$  e dimostriamo che questo implica la veridicità anche per  $n = k + 1$ . Per ipotesi, quindi,  $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$ . Sommando a entrambi i membri  $2^{k+1}$  si ha  $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 = 2 \cdot 2^{k+1} - 1 = 2^{k+2} - 1$ . In conclusione, abbiamo dimostrato che se la formula è vera per  $n = k$  allora lo è anche per  $n = k + 1$ .

■

**Esercizio 2.2** *Facendo uso del principio di induzione dimostrare la formula*

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

**Risoluzione.**

- Si noti che in questo caso la formula considera solo  $n \geq 1$ , per cui la prima verifica va fatta per  $n = 1$ . In questo caso la formula è certamente vera in quanto  $\sum_{k=1}^1 k = 1$  e  $\frac{1(1+1)}{2} = 1$ .
- Supponiamo che la formula sia vera per  $n = k$  e dimostriamo che questo implica la veridicità anche per  $n = k + 1$ . Per ipotesi, quindi,  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + k = k(k+1)/2$ . Sommando a entrambi i membri  $k + 1$  si ha  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + k + (k + 1) = k(k+1)/2 + (k + 1) = (k + 1)(k/2 + 1) = (k + 1)(k + 2)/2$ . Quest'ultima espressione non è altro che la formula calcolata in  $n = k + 1$ , pertanto abbiamo dimostrato che  $P_k \Rightarrow P_{k+1}$ .

■

**Esercizio 2.3** *Facendo uso del principio di induzione dimostrare che per  $q \neq 1$  si ha*

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

**Risoluzione.**



- Per  $n = 0$  la formula è vera perché  $\sum_{k=0}^0 q^k = 1$  e  $\frac{1 - q^{0+1}}{1 - q} = \frac{1 - q}{1 - q} = 1$ .
- Supponiamo che la formula sia vera per  $n = k$  e dimostriamo che questo implica la veridicità anche per  $n = k + 1$ . Per ipotesi, quindi,  $1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^k = (1 - q^{k+1})/(1 - q)$ . Sommando a entrambi i membri  $q^{k+1}$  si ha  $1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^k + q^{k+1} = (1 - q^{k+1})/(1 - q) + q^{k+1} = (1 - q^{k+1} + q^{k+1} - q \cdot q^{k+1})/(1 - q) = (1 - q^{k+2})/(1 - q)$ . Quest'ultima espressione non è altro che la formula calcolata in  $n = k + 1$ , pertanto abbiamo dimostrato che  $P_k \Rightarrow P_{k+1}$ .

■

**Esercizio 2.4** *Facendo uso del principio di induzione dimostrare le seguenti formule*

$$(a) \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (b) \sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2 \quad (c) \sum_{k=1}^n 2k = n(n+1)$$

**Risoluzione.** Eseguire gli stessi passi degli esercizi precedenti. La (c) si può dimostrare velocissimamente anche in altro modo: quale? ■

**Esercizio 2.5** *Facendo uso del principio di induzione dimostrare che  $\forall n \in \mathbb{N} : 2^n > n$ .*

**Risoluzione.**

- Per  $n = 0$  si ha  $2^0 > 0 \Leftrightarrow 1 > 0$ , che è vera.
- Supponiamo che la formula sia vera per  $n = k$  e dimostriamo che questo implica la veridicità anche per  $n = k + 1$ . Per ipotesi, quindi,  $2^k > k$ . Moltiplicando per 2 la disuguaglianza a destra e sinistra ( $2 > 0$ ) si ha  $2^{k+1} > 2k$ . Si osservi ora che,  $\forall k \geq 1$ , è sempre  $2k \geq k + 1$ . Pertanto  $2^{k+1} > 2k \geq k + 1 \Rightarrow 2^{k+1} > k + 1$ . Abbiamo quindi dimostrato che  $P_k \Rightarrow P_{k+1}$ .

■

**Esercizio 2.6** *Facendo uso del principio di induzione dimostrare che  $\forall n \in \mathbb{N}, a \geq -1 : (1 + a)^n \geq 1 + na$  (disuguaglianza di Bernoulli).*

**Risoluzione.**

- Per  $n = 0$  si ha  $(1 + a)^0 \geq 1 + 0 \Leftrightarrow 1 \geq 1$ , che è vera.
- Supponiamo che la formula sia vera per  $n = k$  e dimostriamo che questo implica la veridicità anche per  $n = k + 1$ . Per ipotesi, quindi,  $(1 + a)^k \geq 1 + ka$ . Moltiplicando per  $(1 + a)$  la disuguaglianza a destra e sinistra ( $1 + a > 0$ ) si ha  $(1 + a)^{k+1} \geq (1 + ka)(1 + a) = 1 + a + ka + ka^2 = 1 + (k + 1)a + ka^2$ . Si osservi ora che,  $\forall k \geq 0$ , è sempre  $ka^2 \geq 0$  e quindi  $1 + (k + 1)a + ka^2 \geq 1 + (k + 1)a$ . Sfruttando quest'ultima disuguaglianza si ha quindi  $(1 + a)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)a$ , ossia  $P_k \Rightarrow P_{k+1}$ .

■

**Esercizio 2.7** *Facendo uso del principio di induzione dimostrare che  $\forall n \in \mathbb{N}$  valgono i seguenti raffinamenti della disuguaglianza di Bernoulli:*

$$(a) \quad (1+a)^n \geq 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2 \quad a \geq 0$$

$$(b) \quad (1+a)^n \geq 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}a^3 \quad a \geq -1$$

**Risoluzione.** Si seguano gli stessi passi dell'esercizio 6, osservando nel caso (a) che  $a^3 \geq 0$  e nel caso (b)  $a^4 \geq 0$ . ■

**Esercizio 2.8** *Facendo uso del principio di induzione dimostrare che  $\forall n \in \mathbb{N}$  il numero  $n^2 + n$  è pari.*

**Risoluzione.** Per  $n = 1$  è certamente vero:  $1^2 + 1 = 2$ , pari.

Assumendo che sia vero per  $n = k$ , dimostriamo che lo è anche per  $n = k + 1$ . Se  $k^2 + k$  è pari, allora la proposizione valutata in  $n = k + 1$  diventa  $(k+1)^2 + (k+1) = k^2 + 3k + 2 = (k^2 + k) + 2(k+1)$ , ma questo è un numero pari essendo pari sia  $k^2 + k$  (per ipotesi) sia  $2(k+1)$ . ■

**Esercizio 2.9** *Facendo uso del principio di induzione dimostrare l'uguaglianza delle formule*

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left( \sum_{k=1}^n k \right)^2$$

**Risoluzione.** Si dimostri dapprima che  $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$  (vedi esercizio 2) e quindi che

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

■

**Esercizio 2.10** *Facendo uso del principio di induzione dimostrare che*

$$\sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$$

**Risoluzione.** Si proceda come noto. ■