GEOMETRIA
Prof. M. Spera
Addendum I
Richiami di ANALISI

CALCOLO DIFFERENZIALE PER FUNZIONI DI PIU' VARIABILI E SUE ESTENSIONI

Studieremo soprattutto funzioni

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad f = f(x, y)$$

Def. Un insieme $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ si dice aperto se ogni suo punto x_0 è interno a $\mathcal{U}$, ovvero esiste un disco di raggio sufficientemente piccolo di centro x_0 (interamente) contenuto in $\mathcal{U}$

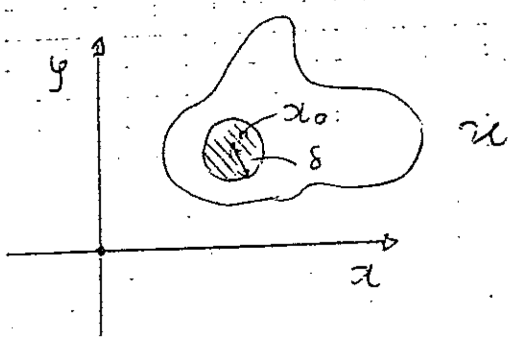
$$B(x_0, \delta) := \{ x \in \mathbb{R}^2 \,/\, \|x - x_0\| < \delta \} \qquad \delta > 0$$

(disco aperto o "palla" aperta)

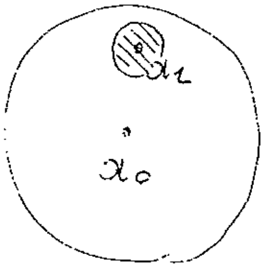
$$\overline{B(x_0, \delta)} := \{ x \in \mathbb{R}^2 \,/\, \|x - x_0\| \leq \delta \}$$

"disco chiuso"

[tali nozioni hanno senso in spazio metrico ...]

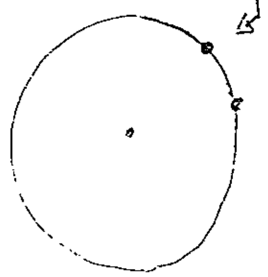


In particolare, $B(x_0, \delta)$ è aperto



$B(x_0, \delta)$

$\overline{B(x_0, \delta)}$ no



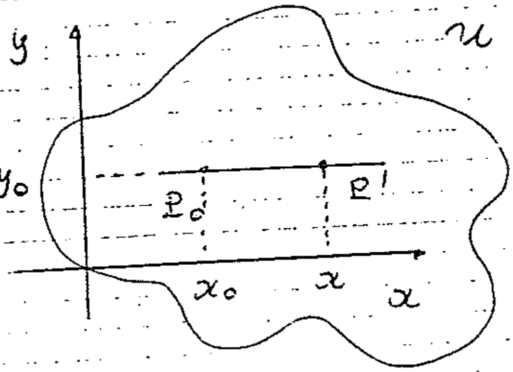
Definizione . $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
aperto

Si dice
derivabile parzialmente rispetto a x in $P_0 \in \mathcal{U}$
"(x_0, y_0)

se esiste finito il limite del
"rapporto incrementale parziale" ($P' = (x, y_0)$)

$$\frac{f(P') - f(P_0)}{x - x_0} = \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

per $x \to x_0$



In tal caso

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}}$$ è detto derivata

parziale di f rispetto a x in P_0 , ed è denotata

con f_x°, $f_x(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, ... $f'_x(x_0, y_0)$ .. $D_x f(x_0, y_0)$

usoremo queste notazioni

Analogamente, la derivata parziale di f
rispetto a y, in P_0 è, se esiste finito,

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} \quad (\equiv f_y^\circ \text{ .. etc...})$$

☆ Def. (Caso particolare della def. di continuità in spazi metrici)

$f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è detta continua in
(aperto)

$P_0 = (x_0, y_0)$ ($\in \mathcal{U}$) se $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \; \delta = \delta(\varepsilon, P_0)$

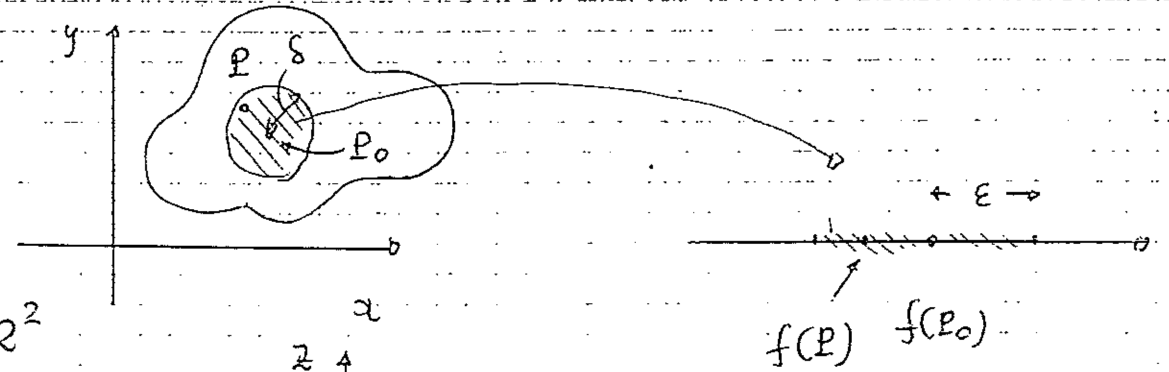
tale che se $\| P - P_0 \| < \delta$, ($P = (x, y)$ $\| \; \|$ distanza ordinaria)

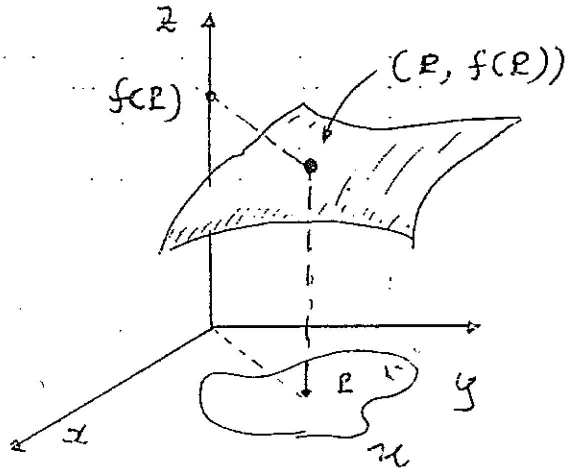
si ha

$$|f(P) - f(P_0)| < \varepsilon$$

$$(|f(x,y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon)$$

$$\| P - P_0 \| = \left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\right]$$



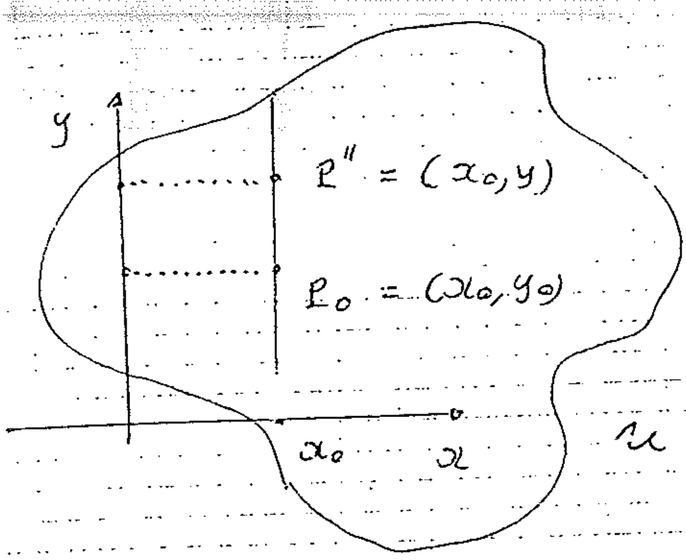


$z = f(x, y)$

grafico di f $= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (x, y) \in \mathcal{U} \,, \; z = f(x, y) \}$

"superficie" in $\mathbb{R}^3$

☆ combinazioni lineari, prodotti, composizioni di funzioni continue sono f. continue...

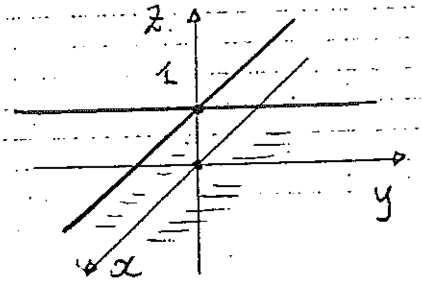


Definizioni analoghe si danno per $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ aperto ....

f si dice derivabile parzialmente in U (rispetto ad una variabile) se lo è in ogni punto di U.

Attenzione "f derivabile parzialmente (rispetto a x e y) $\not\Rightarrow$ f continua"

Esempio $f(x,y) = \begin{cases} 0 & xy \neq 0 \\ 1 & xy = 0 \end{cases}$



$P^0 = (0,0) \quad f(0,0) = 1$

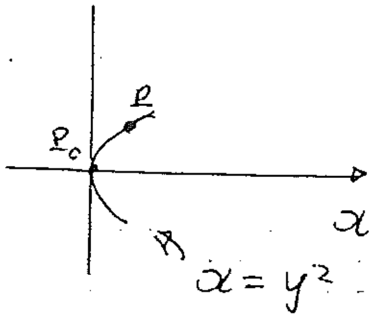
$f_x^0 = f_y^0 = 0$

Esempio $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$$f_x(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \ldots 0$$

$$f_y(0,0) = \ldots = 0$$

Se f fosse continua in $P_0 = (0,0)$, $f(P) \to f(P_0)$ in qualunque modo $P \to P_0$



parabola

Sia $P = (y^2, y)$ $\quad y \neq 0$

$$f(P) = f(y^2, y) = \frac{y^4}{y^4 + y^4} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow y \to 0 \Rightarrow f(P) \to \frac{1}{2} \neq 0 = f(P_0)$

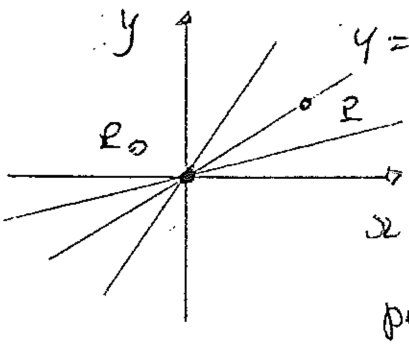
osservazione: se $P \to P_0$ lungo una retta (non verticale) $y = mx$ $\quad (P = (x, mx))$

è $$f(P) = f(x, mx) = \frac{m^2 x^3}{x^2 + m^4 x^4} = \frac{m^2 x}{1 + m^4 x^2}$$

$\to 0$ se $x \to 0$

$\Rightarrow$ f è "direzionalmente continua" in P_0

(se $x = 0$, $y \in \mathbb{R}$ è $f(P) = 0$)



($\Rightarrow$ ☆ la continuità direzionale non implica la continuità

☆ la f è anche separatamente continua (fissata una var., la funzione risultante è continua.., perciò ☆ f separ. continua $\not\Rightarrow$ f continua

Esercizio Far vedere che

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x y^3}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

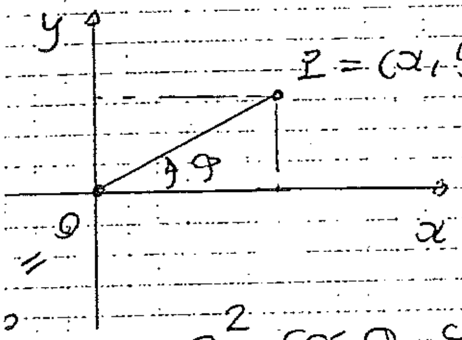
è continua in $\mathbb{R}^2$

Sol. Se $(x,y)\neq(0,0)$ questo è ovvio.

Esaminiamo il caso $(x,y)=(0,0)$.

Introduciamo coordinate polari centrate nell'origine

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \rho = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} \\ \varphi \in [0,2\pi) \end{array}$$



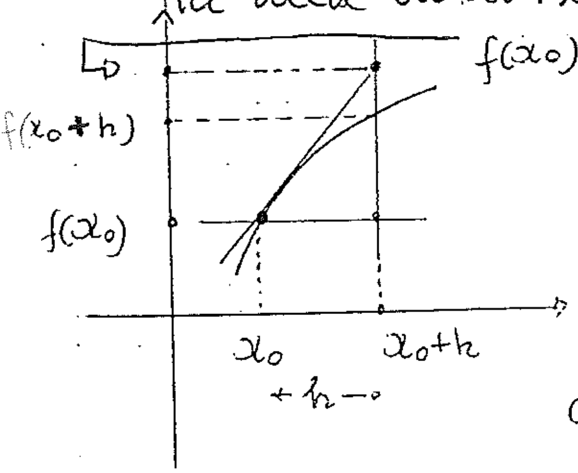
$$f(x,y) = \frac{\rho^4\cos\varphi\sin^3\varphi}{\rho^2} = \rho^2\cos\varphi\sin^3\varphi$$

$$|f(x,y)-f(0,0)| = |\rho^2\cos\varphi\sin^3\varphi| \le \rho^2$$

$\Rightarrow$ se $\rho\to 0$ è $f(P)\to f(P_0)=0$

$\Rightarrow$ f è continua in O.

☆ Reinterpretazione della differenziabilità in una variabile



$\Delta f = f(x_0+h) - f(x_0)$ incremento

$df = f'(x_0)h$ differenziale

$$\boxed{f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \sigma(h)}$$

con $\boxed{\frac{\sigma(h)}{h}\to 0}$ per $h\to 0$

ovvero: $$\boxed{\frac{|\Delta f - df|}{|h|}} \to 0 \quad \text{per } |h| \to$$

differenziale:

$$T_{x_0} : \underset{h}{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$$

$$T_{x_0} h := f'(x_0) \cdot h$$

☆ T_{x_0} è un operatore lineare

[... si giunge facilmente alla nozione di di differenziale secondo Fréchet ... per il momento limitiamoci al caso in esame $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ...]

☆ Sia $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$, $\mathcal{U}$ aperto, $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$

$P_0 = (x_0, y_0)$, $P = (x, y) \in \mathcal{U}$

Def. f si dice differenziabile in P_0 se esistono $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$|f(x,y) - f(x_0,y_0) - A(x-x_0) - B(y-y_0)| =$$

dove $d = \| P - P_0 \| = [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]^{\frac{1}{2}}$

$\Delta f = f(x,y) - f(x_0,y_0)$ incremento di f

$df := A\underbrace{(x-x_0)}_{h} + B\underbrace{(y-y_0)}_{k}$ differenziale

$T_{P_0} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad T_{P_0}(h,k) := Ah + Bk \ldots$

T_{P_0} è un operatore lineare ...
in particolare è
una forma lineare * ... T_{P_0} è ancora un
esempio di differenziale secondo Fréchet.

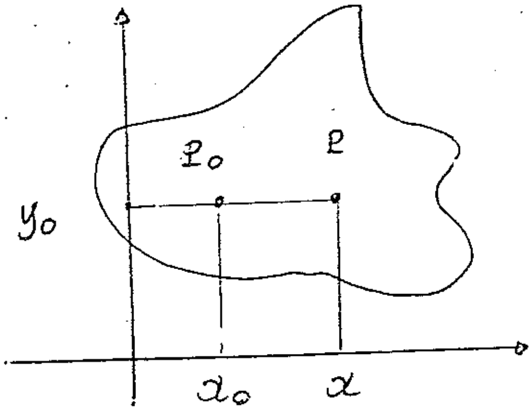
La condizione di differenziabilità prende
la forma

$$\boxed{\frac{|\Delta f - df|}{d}} \to 0 \qquad \text{se } d \to 0$$

<u>Lemma</u> f <u>differenziabile</u> in P_0 $\Rightarrow$
f <u>derivabile</u> <u>parzialmente</u> in P_0 e
$A = f_x^0$, $B = f_y^0$

(Il viceversa, come vedremo, è <u>falso</u>!)

<u>Dim</u>



Per ipotesi si ha:

$$\frac{|f(P) - f(P_0) - A(x - x_0)|}{|x - x_0|} \to 0$$

ovvero ... $f_x^0 = A$.

Analogamente $f_y^0 = B$ .. $\square$

<u>Proposizione</u> f <u>differenziabile</u> in P_0 $\Rightarrow$
f <u>continua</u> in P_0

<u>Dim</u>. $f(x,y) - f(x_0,y_0) = \underset{f_x^0}{A}(x-x_0) + \underset{}{B}(y-y_0) + o(d)$

da $|x-x_0| \leq d$ $\quad |y-y_0| \leq d$ segue che

se $P=(x,y) \to P_0=(x_0,y_0)$ è $f(P) \to f(P_0)$

$\left(\frac{o(d)}{d} \to 0 \Rightarrow o(d) \to 0 \ldots \right)$

☆ L'esistenza di funzioni non continue derivabili parzialmente ci mostra la falsità dell'inverso lemma...

Chiamiamo differenziale (in P_0) la quantità

$$\boxed{df = f_x^{\circ} \underbrace{(x-x_0)}_{\substack{\equiv\\ dx}} + f_y^{\circ} \underbrace{(y-y_0)}_{dy}} = f_x^{\circ}\,dx + f_y^{\circ}\,dy$$

$$\left(dx = 1 \cdot \underset{\substack{\| \\ x-x_0}}{\Delta x} = \Delta x \right)$$

☆ $f : \mathcal{U} \overset{\subset \mathbb{R}^2}{} \to \mathbb{R}$ si dice differenziabile in $\mathcal{U}$ se è tale in ogni punto di $\mathcal{U}$.

* [forme lineari $\equiv$ funzionali lineari su V sp. vettoriale di dimensione n.

$\mathcal{Y} : V \to \mathbb{R}$: $\mathcal{Y}$ sia lineare:

$\mathcal{Y}(a v_1 + b v_2) = a\,\mathcal{Y}(v_1) + b\,\mathcal{Y}(v_2)$

$V^* = \{ \mathcal{Y} \}$ è uno spazio vettoriale

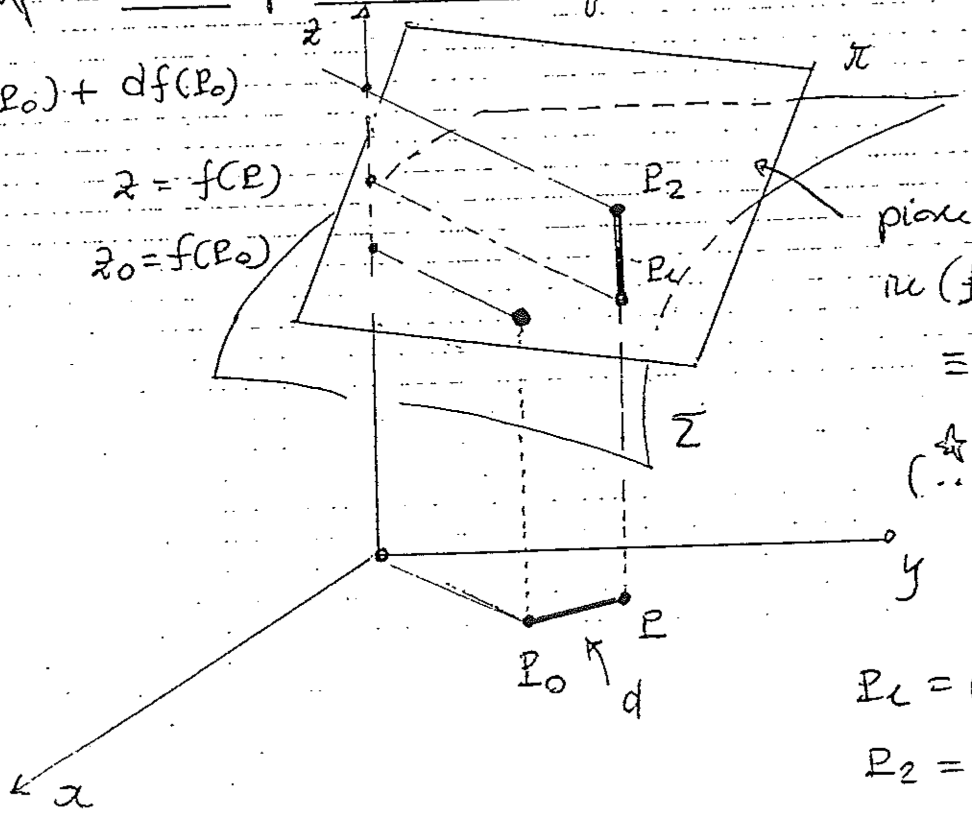
lo spazio vettoriale duale di V. Si trova subito $\dim V^* = \dim V = n$ ...

la base duale di V^*, associata con

$\{e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*\}$ è fornita da

$$e_i^*(e_j) := \delta_{ij} \quad \dots \quad]$$

☆ Interpretazione geometrica



$z = f(x, y)$

piano tangente a Σ

in $(P_0, f(P_0))$

$\equiv (x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0))$

(☆ … cf. eq. retta tangente …)

$P_1 = (x, y, f(x,y)) \in \Sigma$

$P_2 = (x, y, z_0 + f_x^0(x - x_0) + f_y^0(y - y_0))$

equazione di π:

$$\boxed{z - z_0 = f_x^0(x - x_0) + f_y^0(y - y_0)} \in \pi$$

$$\boxed{\frac{\overline{P_1 P_2}}{\overline{P_0 P}} = \left| \frac{\Delta f - df}{d} \right| \to 0 \ \text{se}\ d \to 0}$$

[☆ … caratterizzazione intrinseca del piano tangente …
.. una trattazione più soddisfacente si otterrà con la teoria delle superfici regolari … "]

Esercizi

1 Sia data

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = 0 \end{cases}$$

È differenziabile nell'origine?

Calcoliamo le derivate parziali in $(0,0)$...

Si trova subito $f_x^0 = f_y^0 = 0$.

Esame della differenziabilità:

$$(*) = \left| \frac{\Delta f - df}{d} \right| = \frac{|\Delta f|}{d} = \frac{|f(x,y)|}{(x^2+y^2)^{1/2}} =$$

$$(\ldots \text{in coord. polari}) = \left| \frac{\rho^4 \cos\varphi \sin^3\varphi}{\rho \cdot \rho^2} \right| \leq \rho.$$

$$\Rightarrow (*) \to 0 \text{ se } \rho \to 0.$$

$\Rightarrow$ f è diff. in 0

2

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

f è continua in 0

$\ldots \; |f(x,y)| \leq \rho \ldots$

Inoltre $f_x^0 = f_y^0 = 0$.

f non è differenziabile in 0

infatti $\dfrac{|\Delta f - df|}{d} = |\cos\varphi \sin^2\varphi| \not\to 0$ se $\rho \to 0$

Dunque:

f separatamente continua $\not\Rightarrow$ f continua (il viceversa è vero..)

f der. parzialmente $\not\Rightarrow$ f continua

f der. parzialmente e f continua $\not\Rightarrow$ f differenziabile

ma

f differenziabile $\Rightarrow$ f continua, f derivabile parzialmente

☆ Criterio di differenziabilità

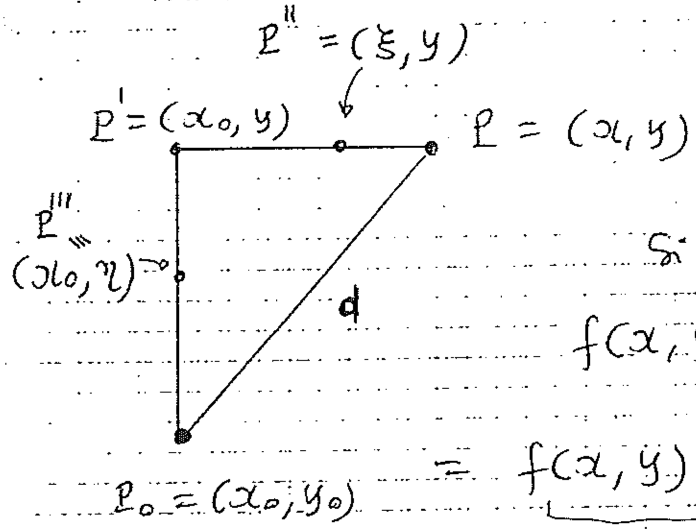
sia $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2$, Ω aperto, $\boxed{f \in \mathcal{C}^1(\Omega)}$

ovvero, f è continua, insieme alle sue derivate parziali. Allora f è differenziabile

☆ Questa è una condizione sufficiente (ma non necessaria, come vedremo) per la differenziabilità.

Dim. $\dfrac{|\Delta f - df|}{d} = \ldots$

$$= \frac{|f(x,y) - f(x_0,y_0) - f_x^0(x-x_0) - f_y^0(y-y_0)|}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]^{1/2}} = \ldots$$



Si ha:

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) =$$

$$= \underbrace{f(x,y) - f(x_0,y)}_{\text{"}} + \underbrace{f(x_0,y) - f(x_0,y_0)}_{\text{"}}$$

$$= (\text{Lagrange}) = f_x(\xi,y)(x-x_0) + f_y(x_0,\eta)(y-y_0)$$

$$\Rightarrow \frac{|\Delta f - df|}{d} = \frac{\left| [f_x(\xi,y) - f_x(x_0,y_0)](x-x_0) + [f_y(x_0,\eta) - f_y(x_0,y_0)](y-y_0) \right|}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\leq |f_x(\xi,y) - f_x(x_0,y_0)| \underbrace{\frac{|x-x_0|}{d}}_{\leq 1} +$$

$$+ |f_y(x_0,\eta) - f_y(x_0,y_0)| \underbrace{\frac{|y-y_0|}{d}}_{\leq 1}$$

Se $P \to P_0$, anche $P'' \to P_0$, $P''' \to P_0$

$\Rightarrow$ l'ultima quantità tende a 0 (per la continuità delle f_x, f_y) $\square$

☆ Tale condizione ($f \in \mathscr{C}^1(\mathcal{X})$) non è necessaria:

Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} + y^2 \sin\frac{1}{y} & x \neq 0,\ y \neq 0 \\ y^2 \sin\frac{1}{y} & x = 0 \quad y \neq 0 \\ x^2 \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \quad y = 0 \\ 0 & x = 0,\ y = 0 \end{cases}$$

Si vede subito che:

* f è continua in $(0,0)$
* $f_x^0 = f_y^0 = 0$
* f è differenziabile in $(0,0)$

Sia ora $x \neq 0$

$$f_x(x,y) = 2x \sin\frac{1}{x} + x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot \cos\frac{1}{x} =$$

$$= 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

se $x \to 0$ il primo addendo $\to 0$, il secondo non ha limite $\Rightarrow$ f_x non può essere continua in 0;

stesso discorso per f_y.

☆ Dunque: $\exists$ funzioni differenziabili ma non di classe $\mathscr{C}^1$

Esercizio Sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che

$$x^2 + y^2 \leq |f(x,y)| \leq (|x| + |y|)^2$$

Verifichiamo che:

a) f è continua in $(0,0)$

b) $\exists \; f_x(0,0)$ e $f_y(0,0)$

c) f è differenziabile in $(0,0)$

(È ovvio che negli altri punti non si può concludere nulla!)

a) $0 \leq |f(0,0)| \leq 0 \Rightarrow f(0,0) = 0$

ora $(|x| + |y|)^2 \leq \left[2 (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} \right]^2 = 4(x^2+y^2)$

$\Rightarrow \rho \to 0 \Rightarrow f(x,y) \to f(0,0) = 0$.

[* Meglio: $(|x| + |y|)^2 = (1 \cdot |x| + 1 \cdot |y|)^2 \leq$

$\left[\sqrt{2} \, (x^2+y^2)^{1/2} \right]^2 = 2(x^2+y^2) \ldots$]

(... Oppure si lavora in coordinate polari ...)

b) $\dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \dfrac{f(x,0)}{x}$

Si ha: $x^2 \leq |f(x,0)| \leq x^2$

$\Rightarrow |f(x,0)| = x^2 \quad \Rightarrow \left| \dfrac{f(x,0)}{x} \right| = \left| \dfrac{x^2}{x} \right| = |x|$

$\Rightarrow f_x(0,0) = 0$

Analogamente $f_y(0,0) = \ldots = 0$

c) $$\frac{|\Delta f|}{d} = \frac{|f(x,y)|}{\rho_{\,(\neq 0)}} \Rightarrow$$

$$\rho = \frac{\rho^2}{\rho} \leq \frac{|f(x,y)|}{\rho} \leq \frac{2\rho^2}{\rho} = 2\rho$$

$\Rightarrow \frac{|\Delta f|}{d} \to 0$ se $d \to 0$ $\square$

✱ Le derivate parziali obbediscono alle stesse regole delle derivate ordinarie...
Inoltre sorge spontanea la nozione di derivate parziali successive... ex.

$f_{xx}\ (\equiv (f_x)_x)$ $\quad f_{xy}\ (\equiv (f_x)_y)$,

$f_{yx}\ (\equiv (f_y)_x\ ..)$, f_{yy} $\qquad$ derivate parziali miste

$f_{xxy}\ (= (f_{xx})_y)$ etc...

Fondamentale è il seguente

✱ Teorema (Schwarz) Sia $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U})$
(f continua insieme alle sue derivate parziali fino all'ordine 2..). Allora

$$\boxed{f_{xy} = f_{yx}} \quad \text{in } \mathcal{U}$$

Vedremo in seguito una semplice dimostrazione di questo teorema per mezzo del calcolo integrale

Corollario Sia $f \in C^{\infty}(\mathcal{X})$

(f continua insieme a tutte le derivate parziali

Allora le derivate che differiscono per una permutazione delle variabili sono uguali

Ex: $f_{xyx} = f_{yxx} = f_{xxy}$

Il teorema di Schwarz esprime una condizione sufficiente per l'uguaglianza delle derivate parziali miste.

Esempio classico di funzione con derivate parziali miste diverse

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Lavoriamo in $(0,0)$
Si vede rapidamente che
(f è continua), $f_x^0 = f_y^0 = 0$, f è differenziabile

$$f_x(x,y) = \ldots \; y \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$\Rightarrow$ le derivate f_x, f_y sono continue in $(0,0)$

Si ha poi, dalla definizione

$$f_{xx}(0,0) = f_{yy}(0,0) = 0 \quad , e$$

$$\boxed{\begin{aligned} f_{xy}(0,0) &= -1 \\ f_{yx}(0,0) &= 1 \end{aligned}}$$

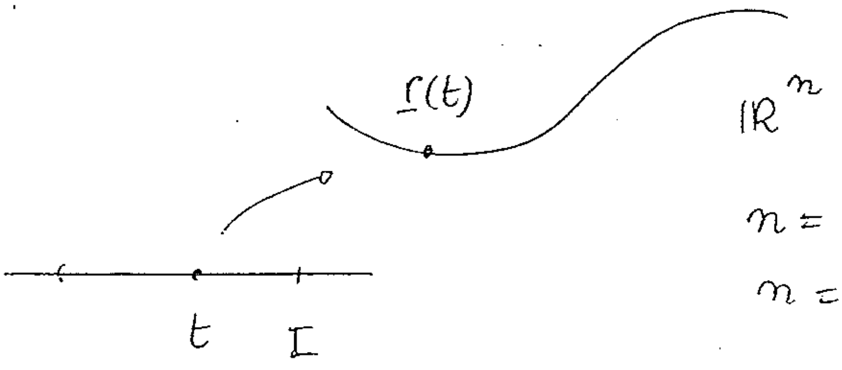
☆ Ovviamente, le derivate parziali miste non possono essere continue nell'origine!

☆ Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto.
Per curva (o curva parametrica, o parametrizzata) in $\mathbb{R}^n$ si intende una mappa

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{r} : \quad & I \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ & t \longmapsto \underline{r}(t) \end{aligned}} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \leftarrow \text{componenti}$$

$\leftarrow : \mathcal{C}$

Con abuso di linguaggio, spesso chiamiamo curva l'immagine della mappa $\underline{r}$.



$n = 2$: curva piana

$n = 3$ curva spaziale

("legge oraria di un punto mobile",

una curva è detta di classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 0$

se lo sono le sue componenti ($x_i \in \mathcal{C}^k(I)$, $i=$

$$\dot{\underline{r}}(t) := \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix} \qquad \cdot = \frac{d}{dt}$$

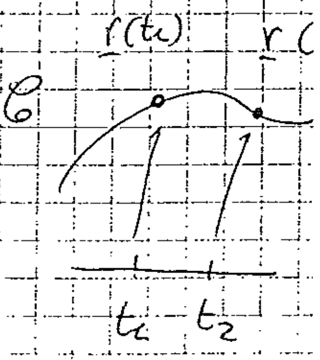
vettore velocità

Curve regolari

Sia $\underline{r} : I \to \mathbb{R}^n$ una curva che goda delle seguenti proprietà:

1. $\underline{r}$ è $\mathcal{C}^1$
2. $\underline{r}$ è iniettiva

$$(t_1 \neq t_2 \Rightarrow \underline{r}(t_1) \neq \underline{r}(t_2))$$



3. $\dot{\underline{r}}(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$

(velocità mai nulla)

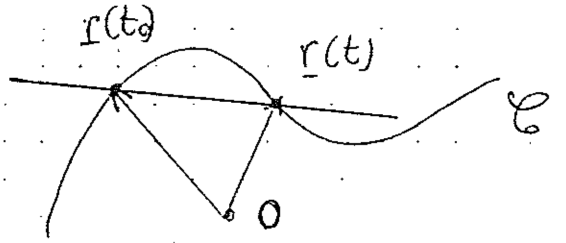
si dice regolare

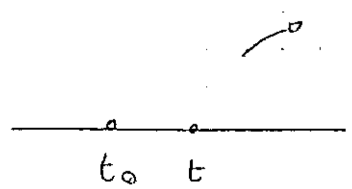
Se vale 2 si dice semplice

(Di regola assumiamo sempre 1.)

Una curva regolare è una curva semplice, e "la cui tangente esiste e varia con continuità"

retta tangente:





sia $t_0 \neq t$.

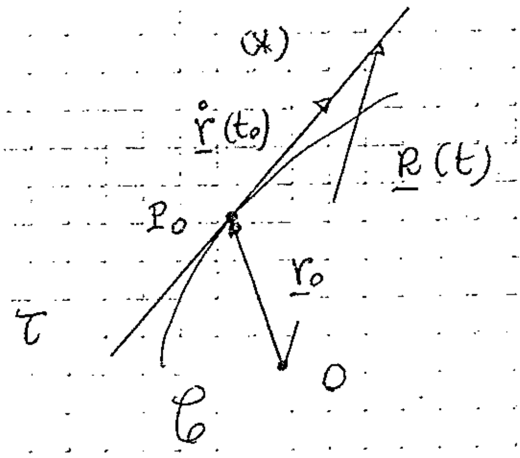
$\underline{r}(t_0) \neq \underline{r}(t) \Rightarrow \exists!$ retta (in $\mathbb{R}^n$) (secante)

congiungente tali punti.

Se $t \to t_0$ tale retta tende alla retta tangente a $\mathcal{C}$ in $r_0 \equiv \underline{r}(t_0)$,

definita da:

$$\boxed{\underline{R}(t) = \underline{r}(t_0) + \underbrace{\dot{\underline{r}}(t_0)}_{\equiv\, \dot{\underline{r}}_0}(t-t_0)}$$



[(*) $\dot{\underline{r}}(t_0)$ è qui applicato in P_0]

in componenti:

$$x_i = X_i(t) = \dot{x}_i(t_0)(t-t_0)$$

$i = 1, 2, \dots n$

☆ $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

non è regolare .. (non è iniettiva)

.. lo è in $(0, 2\pi)$ ...

.. tuttavia la tangente esiste e varia con continuità ...

☆ Notazione : $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$

$f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U})$ ($\Rightarrow$ è differenziabile)

nabla $\boxed{\nabla f(P_0) := (f_x(P_0), f_y(P_0))} \in \mathbb{R}^2$

vettore gradiente (in P_0)

che si pensa di regola applicato in P_0)

☆ Teorema di derivazione delle funzioni composte

Sia $\mathscr{C}$ una curva $\underline{r} : I \to \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ (n

di classe $\mathscr{C}^1$, e sia $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^2$, $f \in \mathscr{C}^1$

Allora la funzione $F : I \to \mathbb{R}$ definita

$$F(t) := f(\underline{r}(t)) \equiv f(x(t), y(t))$$

è continua e derivabile in I, e si ha

$$\forall t_0 \in I : \quad \boxed{F'(t_0) = \langle \nabla f(\underline{r}(t_0)) \mid \dot{\underline{r}}(t_0) \rangle}$$

$$= \boxed{f_x^{\circ} \, \dot{x}(t_0) + f_y^{\circ} \, \dot{y}(t_0)}$$ (di più: $F \in \mathscr{C}^1$

$$= f_x^{\circ} \dot{x}_0 + f_y^{\circ} \dot{y}_0$$

Dim. Dimostriamo direttamente la derivabilità

$$\frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = \frac{1}{t - t_0} \left\{ f(x(t), y(t)) - f(\underbrace{x(t_0)}_{= x_0}, y(t)) + f(x_0, y(t)) - f(x_0, y_0) \right\}$$

$0 \neq$

$$= \frac{1}{t - t_0} \left\{ \underbrace{f(x(t), y(t)) - f(x_0, y(t))} + \underbrace{f(x_0, y(t)) - f(x_0, y_0)} \right\}$$

$$= (\text{Lagrange}) \ \frac{1}{t - t_0} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t), y(t)) (x(t) - x_0) \right.$$

$$\left. + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \eta(t)) (y(t) - y_0) \right\} =$$

$$= f_x(\xi(t), y(t)) \frac{x(t) - x_0}{t - t_0} + f_y(x_0, \eta(t)) \frac{y(t) - y_0}{t - t_0}$$

che, se $t \to t_0$, per le ipotesi fatte

tende a $f^\circ_x \cdot \dot{x}(t_0) + f^\circ_y \cdot \dot{y}(t_0)$ $\square$

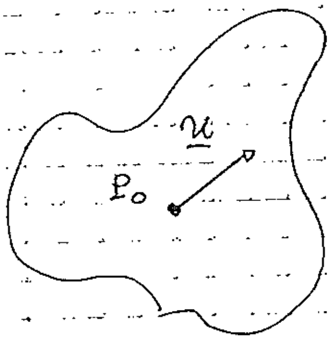
☆ <u>Derivata direzionale</u>

sia $\underline{u} = (u_1, u_2)$, $\|u\| = 1$.

La <u>derivata direzionale</u> di f in P_0 rispetto alla <u>direzione individuata da $\underline{u}$</u> è

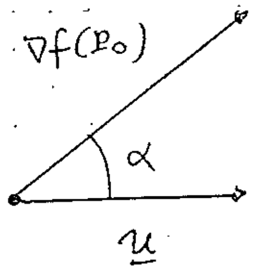
<u>not.</u>: $\frac{\partial f}{\partial \underline{u}}(P_0) := F'(0)$, con

$\boxed{F(t) =} \; f(P_0 + \underline{u}\, t)$ $\quad t \in I$ opportuno $\ni 0$



Si ricava:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \underline{u}}(P_0) = \langle \nabla f(P_0) \,|\, \underline{u} \rangle}$$



$= \|\nabla f(P_0)\| \cos\alpha$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial u}(P_0)$ è <u>massima</u> se $\alpha = 0$, <u>minima</u> se $\alpha = \pi$, <u>nulla</u> se $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\alpha = \frac{3}{2}\pi$.

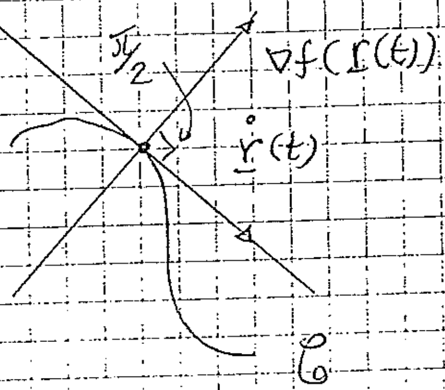
Corollario

Sia $F(t) = f(\underline{r}(t)) \equiv c$ (costante

($\mathscr{C}$ è una curva di livello di f)

Allora $F'(t) = \langle \nabla f(\underline{r}(t)) \mid \dot{\underline{r}}(t) \rangle \equiv 0$

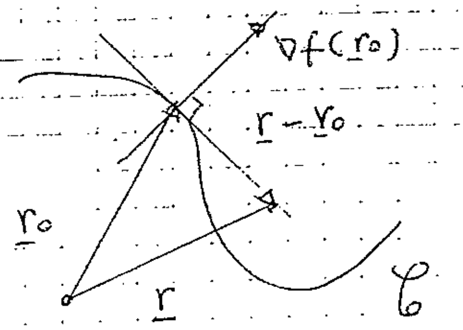
$\Rightarrow$ ☆ in ogni punto di una curva di livello il gradiente è ortogonale alla tangente



esplicitamente

$$\langle \nabla f(\underline{r}_0) \mid \underline{r} - \underline{r}_0 \rangle = 0$$

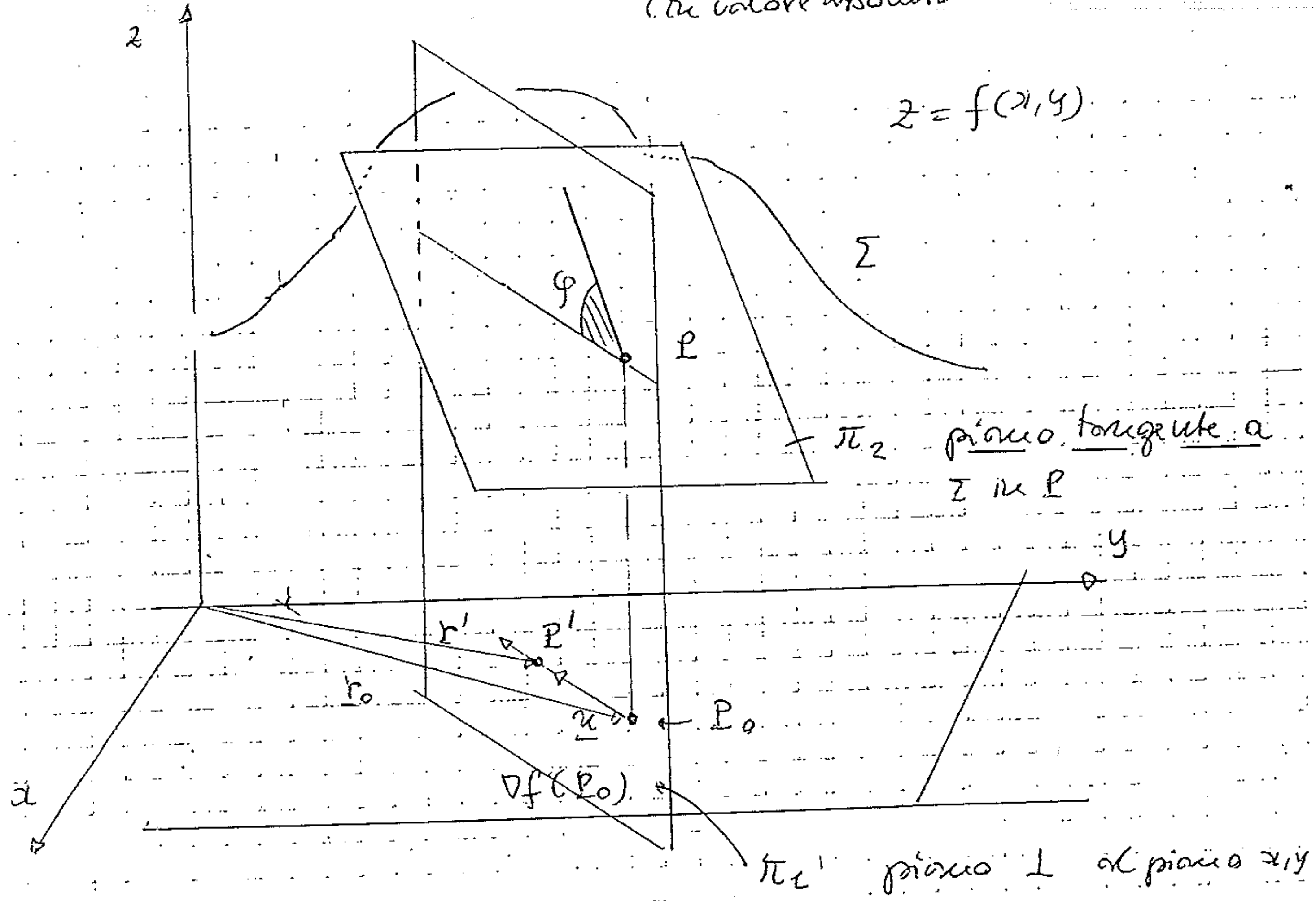
oppure $$\boxed{f_x^0 (x - x_0) + f_y^0 (y - y_0) = 0}$$



[Il teorema del Dini ci permetterà di "ricostruire" le curve di livello da f ...]

[... viceversa, conoscendo le curve di livello conosco f.

$$\text{"} \| \nabla f \| = \underline{\text{pendenza}}$$
(in valore assoluto



e contenente la retta per P_0 nella direzione di $\nabla f(P_0)$.

<u>pendenza in P</u>

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi} = \lim_{P' \to P_0} \frac{f(P') - f(P_0)}{\underset{\| \underline{r}' - \underline{r}_0 \|}{\overset{\|}{\| P' - P_0 \|}}} =$$

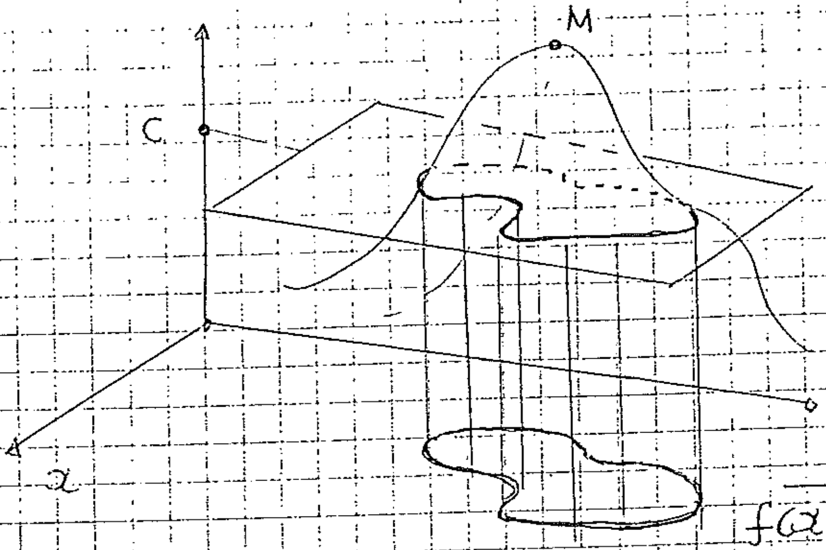
$$= \lim_{P' \to P_0} \left\{ \frac{f(P') - f(P_0) - \langle \nabla f(P_0) \mid \underline{r}' - \underline{r}_0 \rangle}{\| P' - P_0 \|} + \right.$$

$$\left. + \frac{\langle \nabla f(P_0) \mid r' - r_0 \rangle}{\| r' - r_0 \|} \right\}$$

$$= (\text{def di differenziale}) = \boxed{\| \nabla f(P_0) \|}$$

curve di livello

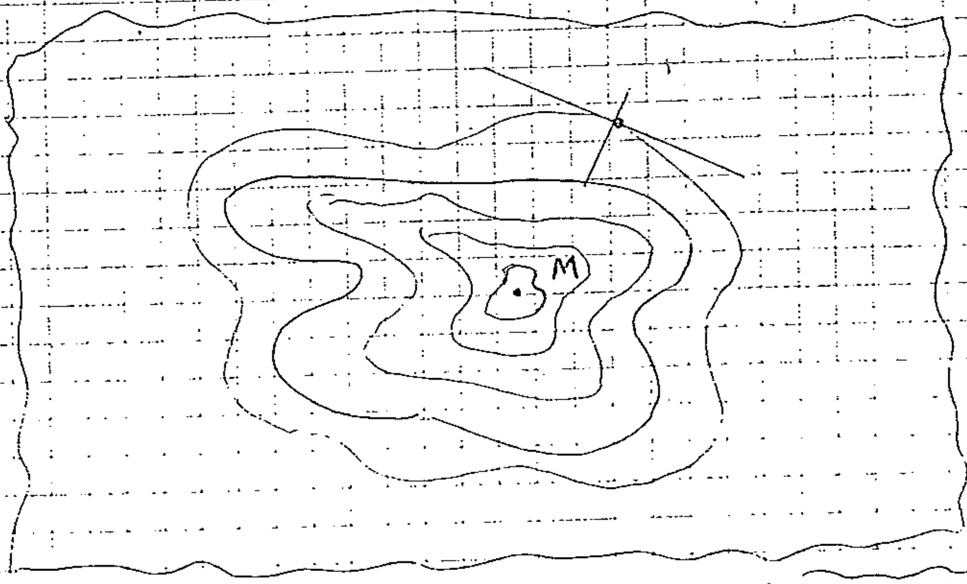
"considerazioni euristiche"

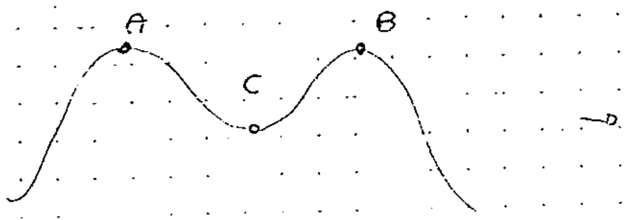


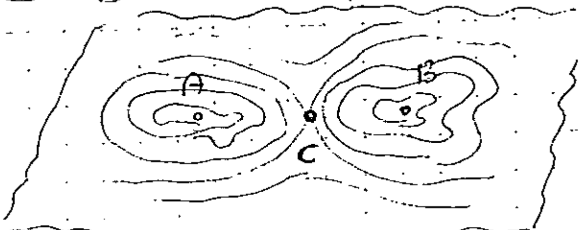
$$\begin{cases} z = f(x,y) \\ z = c \end{cases}$$

$\boxed{f(x,y) = c}$

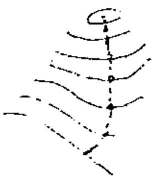
curva definita implicitamente







"commento: il metodo del gradiente"



C = passo di montagna ≡ sella

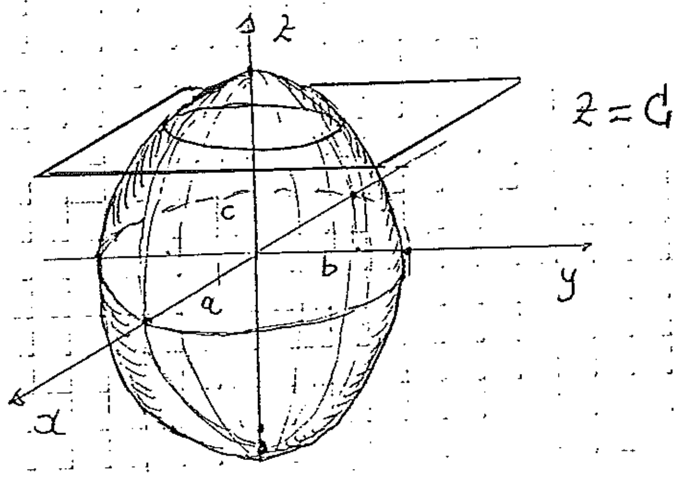
A, B, cime (massimi)

Esempi: quadriche

ellissoide
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}$$

$F(x,y,z)=0$ forma implicita

($a=b=c$, sfera $a=b$ ellissoide di rotazione



$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ z=c_1\end{cases}$$

per $|c_1|>c$
non vi sono intersezioni reali

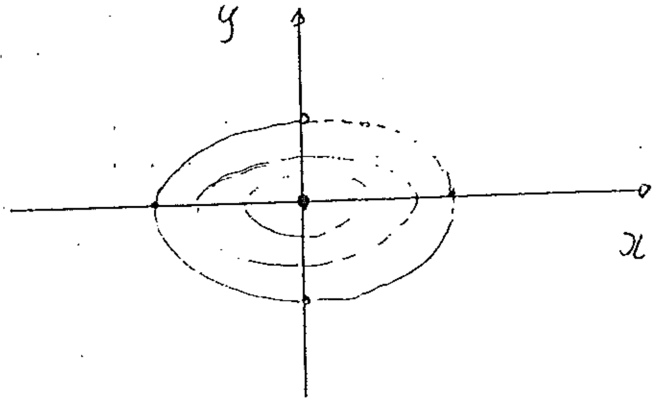
$|c_1|=c$, $c_1=\pm c$

origine (max, min

$|c_1|<c$

ellissi

nel piano: ellissi ....



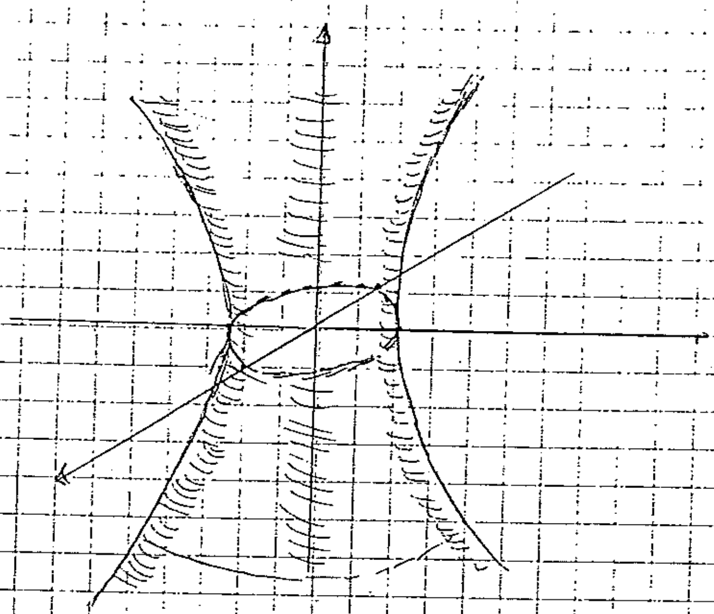
.. stessa struttura intersecando con piani $x=c_1$

o $y=c_1$ ....

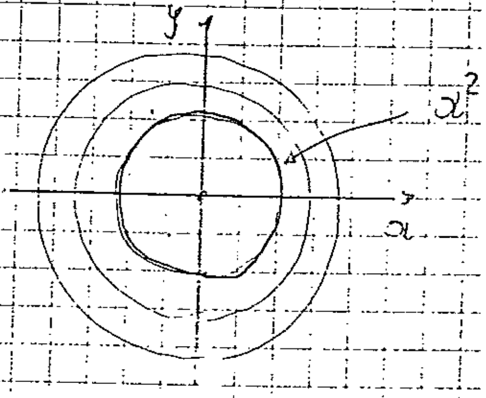
iperboloide ad una falda

(o iperboloide iperbolico

ex: $\boxed{x^2 + y^2 - z^2} = 1$



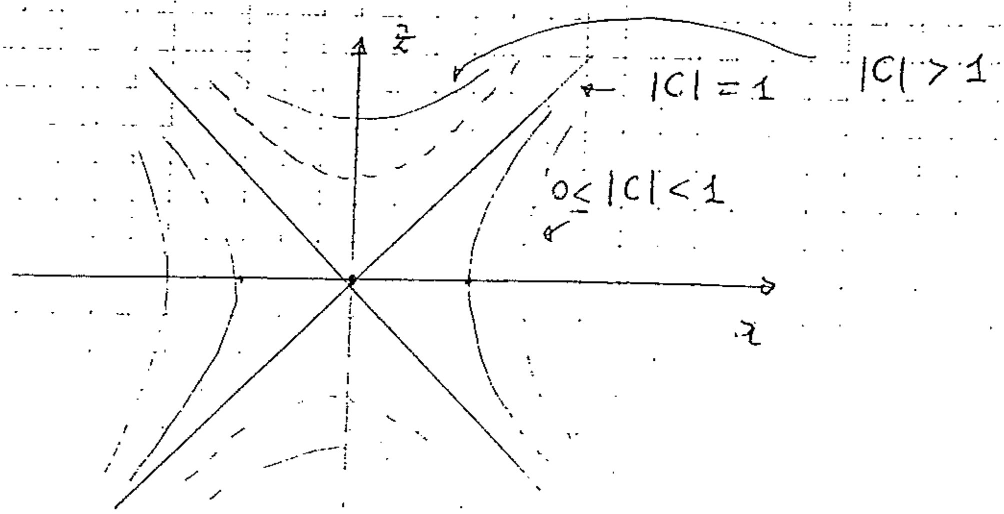
$$\begin{cases} x^2+y^2-z^2=1 \\ z = C_1 \end{cases}$$



$$x^2+y^2 = 1 + C_1^2$$

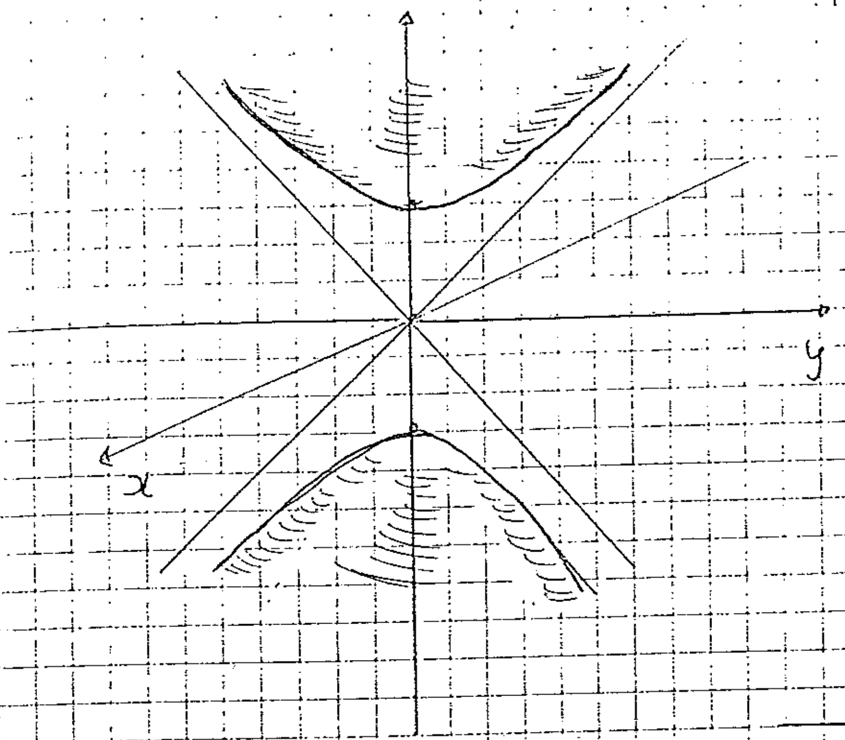
$$\begin{cases} x^2+y^2-z^2=1 \\ y = C_1 \end{cases}$$

$$x^2 - z^2 = 1 - C_1^2$$



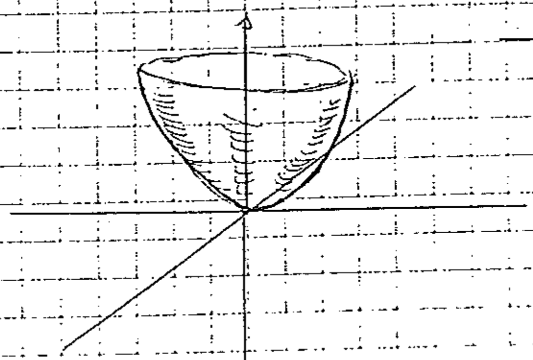
iperboloide a due falde
(iperboloide ellittico)

$$\boxed{-x^2 - y^2 + z^2 = 1}$$



paraboloide ellittico

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$



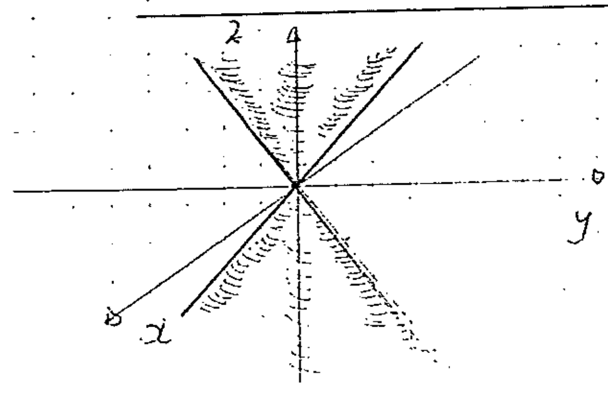
paraboloide iperbolico
("sella")

$$z = A x^2 - B y^2$$

$A > 0$
$B > 0$

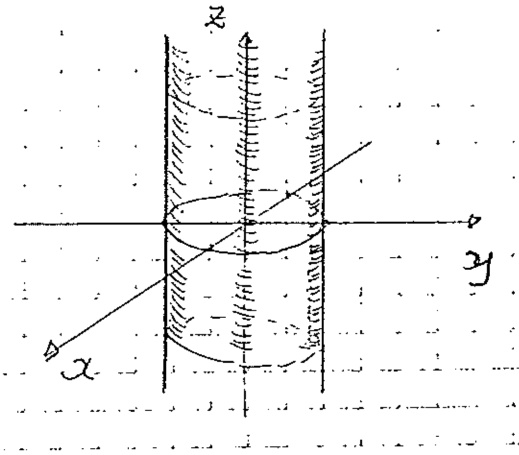
cono

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

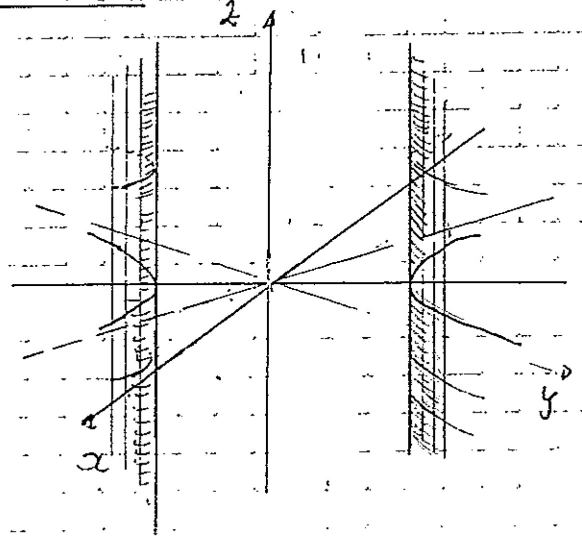


cilindri

cilindro ellittico $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

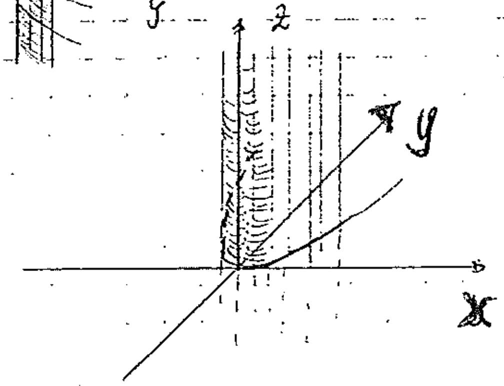


iperbolico $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



parabolico

$y = x^2 \ldots$



Sezioni coniche (Dandelin)

ellisse:

$$\overline{F_1 P} + \overline{F_2 P} = \overline{P_1 P} + \overline{P_2 P} = \text{costante}$$

(Costruzioni analoghe per iperbole e parabola ...)