Elementi di logica

1. L'esigenza di studiare un linguaggio formale

La matematica ha bisogno di un modo di esprimersi che eviti le ambiguità linguistiche.

Consideriamo qualche esempio.

- *Questa frase è falsa* è una frase vera o falsa?
- *Ogni cempo è fristo; un dunco è un cempo; quindi un dunco è fristo.*
- *Mus syllaba est. Mus autem caseum rodit. Ergo syllaba caseum rodit.*
- *Mus syllaba est. Syllaba autem caseum non rodit. Ergo mus caseum non rodit.*
- Ogni insieme non vuoto di numeri naturali ha minimo. È evidente che esiste almeno un numero naturale che non sia definibile con meno di venti parole. *Sia n il minimo numero naturale non definibile con meno di venti parole.* Abbiamo appena definito questo numero n con meno di venti parole.

Il primo esempio è noto come *paradosso del mentitore* e ha una storia lunghissima.

Il secondo esempio è un *sillogismo*. Nella sua struttura questo è simile al famoso *Ogni uomo è mortale; Socrate è un uomo; dunque Socrate è mortale* che riconosciamo come vero. Ma che dire del nostro esempio?

Anche il terzo e quarto esempio sono sillogismi. Occorre dirli in latino (è una citazione da Seneca, *Lettere a Lucilio*); 'mus' è 'topo', 'syllaba' è 'sillaba', 'caseum' è 'formaggio', 'rodit' è 'rosicchia'; 'autem' e 'ergo' sono avverbi irrilevanti che si possono tradurre 'del resto' e 'dunque'. È facile confutare il terzo, perché da un'affermazione particolare si deduce una conclusione generale, come in *Ogni uomo è bipede; una gallina è bipede; dunque una gallina è un uomo.* Il quarto esempio invece non è così facilmente confutabile: dove sta il problema?

Il quinto esempio è noto come *paradosso di Richard.* Lo possiamo confutare osservando che non è per niente chiaro che cosa significhi 'definibile' né che cosa sia 'parola'. Sono note le seguenti 'parole' pronunciate dall'americano alla corte di re Artù nel famoso romanzo di Mark Twain:

Constantinopolitanischerdudelsackspfeifenmachersgesellschafft

Nihilistendynamittheaterkästchenssprengungsattentatversuchungen

Transvaaltruppentropentransporttrampelthiertreibertrauungsthränentragödie

Mekkamuselmannenmassenmenschenmördermohrenmuttermarmormonumentenmacher

che non significano nulla, ma sono costruite secondo le regole della lingua tedesca e apparentemente sono una sola parola. In tedesco è comune creare parole uniche componendone altre. Che cos'è una parola? In quale lingua la dobbiamo interpretare? Se in un contesto inglese leggiamo la parola 'dice', non la interpretiamo certo come verbo, perché significa 'dadi'; ma se la vedessimo priva di contesto, come dovremmo interpretarla? Come verbo italiano o come sostantivo inglese? O forse in un'altra lingua ancora?

Come possiamo allora evitare le ambiguità? Come possiamo essere certi che un'affermazione matematica o una dimostrazione siano corrette?

Facciamo altri esempi. Se consideriamo l'equazione $4x^2 = 9$, quante soluzioni ha? La domanda è mal posta, sebbene siamo abituati a domande del genere.

L'equazione non ha soluzioni nell'insieme dei numeri interi, ma ne ha due nell'insieme dei numeri razionali. La domanda, di per sé, è ambigua. Torneremo su questo problema.

Un altro campo nel quale il problema del linguaggio è molto rilevante è quello dell'informatica. Non possiamo certo 'parlare' a un calcolatore usando il linguaggio naturale, ma solo con linguaggi codificati e precisi. Il linguaggio naturale è ambiguo, non esisterebbe la poesia, altrimenti. Invece per scrivere un programma da inserire in un calcolatore dobbiamo precisare le istruzioni in modo che abbiano un significato univoco.

2. Strutture

Cercheremo dunque di costruire un linguaggio artificiale che sia adatto a discutere le questioni matematiche. Un tale linguaggio avrà le sue espressioni, che saranno successioni finite di simboli precedentemente introdotti. Dovrà anche essere possibile riconoscere in modo effettivo quali espressioni abbiano significato e quali no.

Un tale linguaggio formale sarà usato per descrivere una certa situazione matematica, per esempio i numeri naturali.

DEFINIZIONE 2.1. Una *struttura* $\mathfrak{A}$ consiste di

- un insieme non vuoto A, detto *universo* della struttura;
- un insieme non vuoto di relazioni su A;
- un insieme di funzioni su A;
- un insieme di elementi di A che saranno chiamati *costanti*.

Chiariamo subito che le relazioni che consideriamo non sono necessariamente binarie, ma possono essere anche ternarie, quaternarie, eccetera. Una relazione n-aria su A è un sottoinsieme di $A^n = A \times A \times \cdots \times A$ (n volte).

Anche le funzioni su A possono essere unarie, binarie, eccetera. Una funzione n-aria su A è una funzione totale di A^n in A, cioè

$$\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ volte}} \to A$$

Per evitare altri dubbi, chiariamo che tutte le funzioni considerate in queste note saranno *totali*.

Come esempio, che ci guiderà in tutta la trattazione, considereremo la struttura dei numeri naturali $\mathfrak{N}$ dove

- l'universo è l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali;
- le relazioni che consideriamo sono l'identità (binaria) e l'essere minore (binaria);
- le funzioni che consideriamo sono l'addizione (binaria), la moltiplicazione (binaria) e il successore (unaria);
- le costanti che consideriamo sono il numero zero e il numero uno.

L'altro esempio che considereremo sarà quello della geometria del piano $\mathfrak{P}$ dove

- l'universo è l'insieme P dei punti e delle rette del piano;
- le relazioni che consideriamo sono l'identità (binaria), essere un punto (unaria), essere una retta (unaria), appartenere (binaria)
- non consideriamo funzioni;
- non consideriamo costanti.

Si potrebbe economizzare nella descrizione di ciò che costituisce una struttura, perché una funzione è una particolare relazione e un elemento è una particolare funzione; tuttavia non si guadagna in chiarezza economizzando così e quindi non lo faremo.

3. Il linguaggio

Data una struttura $\mathfrak{A}$, vogliamo un linguaggio adatto a descriverla. Introdurremo i simboli un po' alla volta, intanto uno per ciascun costituente specifico della struttura:

- un *simbolo di relazione* (o *predicato*) per ogni relazione;
- un *simbolo di funzione* per ogni funzione;
- un *simbolo di costante* per ogni costante.

Di ogni simbolo di relazione o funzione si sa che si riferisce a una relazione o funzione n-aria.

Per esempio, il linguaggio adatto alla struttura dei numeri naturali $\mathfrak{N}$ avrà i seguenti simboli:

- $\mathbf{=}$ per l'identità;
- $\mathbf{<}$ per 'essere minore';
- $\mathbf{+}$ per l'addizione;
- $\mathbf{\times}$ per la moltiplicazione;
- $\mathbf{s}$ per la funzione successore;
- $\mathbf{0}$ per il numero zero;
- $\mathbf{1}$ per il numero uno.

Un linguaggio può essere adatto a più strutture. Per esempio, considereremo anche la struttura $\mathfrak{R}$ dei numeri reali in cui prenderemo la relazione di identità, quella di 'essere minore', l'addizione, la moltiplicazione, la funzione 'aggiungere uno', il numero zero e il numero uno nell'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$. O anche la struttura $\mathfrak{Z}$ dei numeri interi, con analoghi costituenti. Va notato che la relazione di 'essere minore' nei numeri reali o nei numeri naturali sono diverse e così per tutti gli altri costituenti.

Definizione 3.1. Sia $\mathfrak{A}$ una struttura e $\mathscr{L}$ un linguaggio adatto a essa. L'interpretazione di un simbolo di relazione, funzione o costante $\mathbf{S}$ è $\mathbf{S}^{\mathfrak{A}}$, la relazione, funzione o costante a esso associata.

Per esempio, $\mathbf{+}^{\mathfrak{N}}$ è la funzione binaria addizione nei numeri naturali, $\mathbf{0}^{\mathfrak{N}}$ è il numero naturale zero.

4. Termini e loro interpretazione

Cominciamo a introdurre alcune espressioni del linguaggio. I termini saranno espressioni che intuitivamente indicano un elemento dell'universo; più precisamente sono 'nomi' per tali elementi. Ricordiamo che un'espressione del linguaggio è una successione finita di simboli del linguaggio.

Definizione 4.1 (provvisoria). Un *termine* è una successione finita di simboli del linguaggio costruita mediante le seguenti regole:

(T1) ogni simbolo di costante è un termine;
(T2) se $t_1, t_2, \dots, t_n$ sono termini e $\mathbf{f}$ è un simbolo di funzione n-aria, allora $\mathbf{f}t_1t_2\dots t_n$ è un termine.

Una definizione del genere richiede parecchi commenti. Apparentemente, infatti, il concetto di termine è definito mediante sé stesso, in un circolo vizioso. Non è così, naturalmente. La definizione va letta come una procedura per stabilire se una certa successione di simboli è un termine oppure no. Un altro aspetto da tenere presente:

con t_i rappresentiamo un'intera successione di simboli, non necessariamente un solo simbolo.

Vediamo allora qual è la procedura da seguire. Un solo simbolo è un termine se e solo se è un simbolo di costante. Una successione di più di un simbolo è un termine se e solo se:

- il primo simbolo (da sinistra) è un simbolo di funzione;
- cancellando questo simbolo, ciò che resta è una successione di n termini (quando il simbolo è di funzione n-aria).

Esempio 4.2. Nel linguaggio dei numeri naturali, le seguenti espressioni sono termini:

$$\mathbf{0} \quad \mathbf{1} \quad \mathbf{+01} \quad \mathbf{\times 11} \quad \mathbf{++111} \quad \mathbf{\times{+}11{+}01}.$$

Siamo in realtà più abituati a scrivere queste espressioni in un altro modo; per esempio la terza sarebbe più familiare nella forma $0 + 1$. Tuttavia è più comodo impiegare la notazione che abbiamo introdotto, perché rende più facili le regole per stabilire se un'espressione è un termine.

Analizziamo l'ultima; comincia con un simbolo di funzione binaria $\times$. Se lo cancelliamo, vediamo che ciò che resta sono due termini: $\mathbf{+11}$ e $\mathbf{+01}$. Per riconoscere questi due come termini, dobbiamo applicare ancora una volta la regola (T2).

Per chiarire meglio, abbiamo in questo caso $\times$ come simbolo di funzione binaria, dove t_1 e t_2 sono rispettivamente $\mathbf{+11}$ e $\mathbf{+01}$. Ciascuno di questi due termini è a sua volta costruito da termini secondo la regola (T2).

Il concetto di termine sarà esteso in seguito. Ora vogliamo introdurre quello di *interpretazione di un termine*.

Definizione 4.3 (provvisoria). Sia $\mathfrak{A}$ una struttura e sia $\mathscr{L}$ un linguaggio adatto a essa.

(IT1) L'interpretazione $\mathbf{c}^{\mathfrak{A}}$ di un simbolo di costante $\mathbf{c}$ è la costante associata al simbolo.

(IT2) Se $\mathbf{f}t_1t_2\dots t_n$ è un termine secondo la regola (T2), la sua interpretazione è

$$(\mathbf{f}t_1t_2\dots t_n)^{\mathfrak{A}} = \mathbf{f}^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}, t_2^{\mathfrak{A}}, \dots, t_n^{\mathfrak{A}}).$$

Esempio 4.4. Calcoliamo l'interpretazione del termine $\mathbf{\times{+}11{+}01}$ del linguaggio dei numeri naturali nella struttura dei numeri naturali:

$$\begin{aligned}(\mathbf{\times{+}11{+}01})^{\mathfrak{N}} &= \times^{\mathfrak{N}}((\mathbf{+11})^{\mathfrak{N}}, (\mathbf{+01})^{\mathfrak{N}}) \\ &= \times^{\mathfrak{N}}(+^{\mathfrak{N}}(\mathbf{1}^{\mathfrak{N}}, \mathbf{1}^{\mathfrak{N}}), +^{\mathfrak{N}}(\mathbf{0}^{\mathfrak{N}}, \mathbf{1}^{\mathfrak{N}})) \\ &= \times^{\mathfrak{N}}(+^{\mathfrak{N}}(1,1), +^{\mathfrak{N}}(0,1)) \\ &= \times^{\mathfrak{N}}(2,1) = 2.\end{aligned}$$

Analogamente, l'interpretazione del termine $\mathbf{++++11111}$ è il numero cinque. Anche $(\mathbf{s+++1111})^{\mathfrak{N}}$ è il numero cinque, come è facile vedere e anche il termine $\mathbf{sssss0}$ ha come interpretazione il numero cinque.

Come nella definizione di termine, anche il calcolo dell'interpretazione avviene ricorsivamente, da sinistra verso destra, scomponendo un termine via via.

5. Formule atomiche

I termini sono 'nomi per elementi'; ora vogliamo introdurre ciò che ci serve per dire qualcosa di questi 'elementi'.

Definizione 5.1. Se $\mathbf{P}$ è un simbolo di relazione n-aria e t_1, t_2,..., t_n sono termini, allora

$$\mathbf{P}t_1t_2\dots t_n$$

è una formula atomica.

Dunque una formula atomica si riconosce in modo analogo a un termine: è un'espressione che comincia con un simbolo di relazione che deve essere seguito dal numero corretto di termini.

Esempio 5.2. Nel linguaggio dei numeri naturali, le seguenti espressioni sono formule atomiche:

$$\mathbf{=00} \quad \mathbf{=01} \quad \mathbf{<10} \quad \mathbf{<s0{+}11}$$

L'interpretazione di una formula atomica non è un elemento dell'universo; del resto una formula deve dirci un fatto che riguarda certi elementi dell'universo. Per parlare di interpretazione di una formula atomica, introdurremo due simboli ai quali non attribuiamo alcun significato formale: $\mathbf{V}$ e $\mathbf{F}$.

Per essere onesti, la forma assegnata a questi simboli dovrebbe ricordarci 'vero' e 'falso'. Tuttavia non è necessario assumere questi significati, anche se è opportuno tenerli presente.

Definizione 5.3. L'interpretazione della formula atomica $\mathbf{P}t_1t_2\dots t_n$ è

$$(\mathbf{P}t_1t_2\dots t_n)^{\mathfrak{A}} = \begin{cases} \mathbf{V} & \text{se } (t_1^{\mathfrak{A}}, t_2^{\mathfrak{A}}, \dots, t_n^{\mathfrak{A}}) \in \mathbf{P}^{\mathfrak{A}} \\ \mathbf{F} & \text{se } (t_1^{\mathfrak{A}}, t_2^{\mathfrak{A}}, \dots, t_n^{\mathfrak{A}}) \notin \mathbf{P}^{\mathfrak{A}} \end{cases}$$

Se ci pensiamo, questa è una definizione ragionevole: l'interpretazione di $\mathbf{P}$ è una relazione n-aria su A e perciò ha senso domandarsi se una certa n-pla di elementi appartiene o no a $\mathbf{P}^{\mathfrak{A}}$. La n-pla di elementi è fornita dalle interpretazioni degli n termini che compaiono nella formula atomica.

Esempio 5.4. Calcoliamo le interpretazioni delle formule precedenti:

$$(\mathbf{=00})^{\mathfrak{N}} = \mathbf{V}$$
$$(\mathbf{=01})^{\mathfrak{N}} = \mathbf{F}$$
$$(\mathbf{<10})^{\mathfrak{N}} = \mathbf{F}$$
$$(\mathbf{<s0{+}11})^{\mathfrak{N}} = \mathbf{V}$$

Infatti $(0,0) \in \mathbf{=}^{\mathfrak{N}}$, $(0,1) \notin \mathbf{=}^{\mathfrak{N}}$, $(1,0) \notin \mathbf{<}^{\mathfrak{N}}$, $(1,2) \in \mathbf{<}^{\mathfrak{N}}$.

6. Connettivi

Con gli strumenti che abbiamo a disposizione, siamo in grado di esprimere ben poco. Prendiamo il caso dei numeri naturali: possiamo nominare ogni numero (con un termine opportuno, per esempio $\mathbf{s}\dots\mathbf{s0}$); se t_1 e t_2 sono termini, possiamo esprimere la loro uguaglianza (con la formula $\mathbf{=}t_1t_2$) o se uno è minore dell'altro (con la formula $\mathbf{<}t_1t_2$).

Non possiamo però esprimere molte altre cose interessanti, per esempio che un termine rappresenti un numero "minore o uguale" a un altro, oppure che un numero sia divisore di un altro. Eppure questi concetti sono ovviamente esprimibili usando la relazione di minore, quella di uguaglianza e la funzione moltiplicazione. Il problema è che occorre "mettere insieme" più formule.

Cominciamo in astratto, perché il nostro scopo è di evitare di assegnare significati intuitivi a ciò che facciamo: il nostro linguaggio deve essere non ambiguo. Vogliamo studiare le funzioni $\{\mathbf{V},\mathbf{F}\} \to \{\mathbf{V},\mathbf{F}\}$ e le funzioni $\{\mathbf{V},\mathbf{F}\}^2 \to \{\mathbf{V},\mathbf{F}\}$. Possiamo sintetizzarle in due tabelle:

	f_1	f_2	f_3	f_4
V	**V**	**V**	**F**	**F**
F	**V**	**F**	**V**	**F**

per le funzioni di $\{\mathbf{V},\mathbf{F}\}$ in $\{\mathbf{V},\mathbf{F}\}$ e

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}	g_{11}	g_{12}	g_{13}	g_{14}	g_{15}	g_{16}
$(\mathbf{V},\mathbf{V})$	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**
$(\mathbf{V},\mathbf{F})$	**V**	**V**	**V**	**V**	**F**	**F**	**F**	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**	**F**	**F**	**F**	**F**
$(\mathbf{F},\mathbf{V})$	**V**	**V**	**F**	**F**	**V**	**V**	**F**	**F**	**V**	**V**	**F**	**F**	**V**	**V**	**F**	**F**
$(\mathbf{F},\mathbf{F})$	**V**	**F**	**V**	**F**	**V**	**F**	**V**	**F**	**V**	**F**	**V**	**F**	**V**	**F**	**V**	**F**

per le funzioni di $\{\mathbf{V},\mathbf{F}\}^2$ in $\{\mathbf{V},\mathbf{F}\}$.

Fra le funzioni della prima tabella ce n'è una che ha un certo interesse ed è la f_3: quella che "scambia i valori di verità". Nella seconda tabella ce ne sono varie che ci possono interessare, già dalla g_2 che corrisponde alla nostra idea di "oppure", così come la g_8 corrisponde alla nostra idea di "e".

È interessante notare come tutte le funzioni della tabella possono essere espresse con composizioni delle funzioni f_3 e g_2. Per esempio, si consideri la g_5; dati comunque $x_1, x_2 \in \{\mathbf{V},\mathbf{F}\}$, vogliamo verificare che

$$g_5(x_1, x_2) = g_2(f_3(x_1), x_2).$$

Si dovrebbero esaminare i quattro casi possibili per i valori di x_1 e x_2; il tutto può essere riassunto con la seguente tabella:

$g_2\,($	$f_3\,($	$x_1\,),$	$x_2\,)$
V	**F**	**V**	**V**
F	**F**	**V**	**F**
V	**F**	**F**	**V**
V	**F**	**F**	**F**

In modo analogo si può verificare che, per ogni $x_1, x_2 \in \{\mathbf{V},\mathbf{F}\}$,

$$g_8(x_1, x_2) = f_3(g_2(f_3(x_1), f_3(x_2))).$$

Scriviamo ancora la tabella:

$f_3\,($	$g_2\,($	$f_3\,($	$x_1\,),$	$f_3\,($	$x_2\,)\,)\,)$
V	**F**	**F**	**V**	**F**	**V**
F	**V**	**F**	**V**	**V**	**F**
F	**V**	**V**	**F**	**F**	**V**
F	**V**	**V**	**F**	**V**	**F**

e leggiamo sotto all'ultima funzione applicata il valore associato alla coppia in esame. Siccome i valori coincidono con quelli delle funzioni g_5 e g_8, abbiamo dimostrato la tesi. Si provi a ottenere anche le altre funzioni come composizione di f_3 e g_2.

Forse le tabelle precedenti sono più chiare se indichiamo quelle funzioni con simboli più consueti: useremo $\neg$ per f_3, $\vee$ per g_2, $\wedge$ per g_8, $\to$ per g_5 e $\leftrightarrow$ per g_7.

Esempio 6.1. Dimostriamo che la $g_7 = \leftrightarrow$ si può esprimere come composizione di $\to$ e $\wedge$: calcoliamo infatti la tabella corrispondente a $\wedge(\to(x_1, x_2), \to(x_2, x_1))$:

$\wedge\,($	$\to\,($	$x_1\,,$	$x_2\,),$	$\to\,($	$x_2\,,$	$x_1\,)\,)$
V	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**
F	**F**	**V**	**F**	**V**	**F**	**V**
F	**V**	**F**	**V**	**F**	**V**	**F**
F	**V**	**F**	**F**	**V**	**F**	**F**

Come $\to$ traduce l'idea intuitiva di "implicazione" ("se... allora"), $\leftrightarrow$ traduce quella di "se e solo se".

Definizione 6.2. I *connettivi* $\boldsymbol{\vee}$ e $\boldsymbol{\neg}$ sono simboli del linguaggio. Li leggiamo "o" e "non" rispettivamente.

Avendo introdotto nuovi simboli nel linguaggio, vogliamo usarli per estendere il concetto di formula.

Definizione 6.3 (provvisoria). In ogni linguaggio valgono le seguenti regole:

(F1) ogni formula atomica è una formula;
(F2) se φ è una formula, allora $\boldsymbol{\neg}\varphi$ è una formula;
(F3) se φ e ψ sono formule, allora $\boldsymbol{\vee}\varphi\psi$ è una formula.

Esempio 6.4. Abbiamo già visto che **=00**, **=01**, **<10** e **<s0+11** sono formule atomiche nel linguaggio dei numeri naturali. Perciò

$$\boldsymbol{\neg{=}01}$$
$$\boldsymbol{\neg{<}10}$$
$$\boldsymbol{\vee{<}10{<}s0{+}11}$$

sono formule del linguaggio.

Osserviamo di nuovo che le regole appena stabilite sono ricorsive; per verificare che un'espressione del linguaggio è una formula occorre "smontarla":

- un'espressione è una formula solo se comincia con un simbolo di relazione, con $\boldsymbol{\vee}$ oppure con $\boldsymbol{\wedge}$;
- nel primo caso deve essere una formula atomica;
- nel secondo caso ciò che rimane cancellando $\boldsymbol{\vee}$ deve essere una formula;
- nel terzo caso ciò che rimane devono essere due formule.

La verifica, se l'espressione non è una formula atomica, riduce sempre il numero di simboli, quindi termina: data un'espressione, siamo in grado di dire se è una formula oppure no.

Ora che abbiamo esteso il concetto di formula, dobbiamo anche dire come le interpretiamo in una certa struttura $\mathfrak{A}$.

Definizione 6.5 (provvisoria). Sia $\mathfrak{A}$ una struttura e sia $\mathscr{L}$ un linguaggio adatto a essa.

(IF1) L'interpretazione di una formula atomica è come già definita.
(IF2) L'interpretazione di una formula del tipo $\boldsymbol{\neg}\varphi$ è

$$(\boldsymbol{\neg}\varphi)^{\mathfrak{A}} = \neg(\varphi^{\mathfrak{A}}).$$

(IF3) L'interpretazione di una formula del tipo $\boldsymbol{\vee}\varphi\psi$ è

$$(\boldsymbol{\vee}\varphi\psi)^{\mathfrak{A}} = \vee(\varphi^{\mathfrak{A}}, \psi^{\mathfrak{A}}).$$

Per essere del tutto rigorosi, non potremmo usare lo stesso simbolo per indicare i connettivi e le funzioni mediante le quali calcoliamo le interpretazioni. Tuttavia la pignoleria a volte non aiuta la chiarezza e basterà un minimo di attenzione per capire con quale significato usiamo i simboli. In effetti, guardando attentamente, possiamo vedere che in queste note si usa un peso diverso dei caratteri.

Esempio 6.6. Vogliamo calcolare l'interpretazione della formula

$$\boldsymbol{\vee\neg{<}10{<}s0{+}11}$$

e, per evitare troppi simboli, identifichiamo le formule atomiche e le abbreviamo: scriviamo φ per **<10** e ψ per **<s0+11**. La formula da esaminare diventa allora

$$\vee\neg\varphi\psi$$

e le interpretazioni delle formule atomiche sono:

$$(\varphi)^{\mathfrak{N}} = \mathbf{F},$$

perché $(1,0) \notin \mathbf{<}^{\mathfrak{N}}$;

$$(\psi)^{\mathfrak{N}} = \mathbf{V}$$

perché $(1,2) \in \mathbf{<}^{\mathfrak{N}}$. Ora la regola per l'interpretazione delle formule dice:

$$(\vee\neg\varphi\psi)^{\mathfrak{N}} = \vee((\neg\varphi)^{\mathfrak{N}}, (\psi)^{\mathfrak{N}}) = \vee(\neg((\varphi)^{\mathfrak{N}}), (\psi)^{\mathfrak{N}}) = \vee(\neg(\mathbf{F}), \mathbf{V}) = \vee(\mathbf{V}, \mathbf{V}) = \mathbf{V}.$$

Intuitivamente la formula dice che "non è $1 < 0$ oppure è $1 < 2$" e l'interpretazione è "vero", come ci aspettiamo.

Useremo anche altri connettivi come abbreviazioni di formule che compaiono spesso; non saranno strettamente simboli del linguaggio, ma è comodo usarli per maggiore espressività.

Definizione 6.7. Se φ e ψ sono formule, allora

$$\begin{array}{lll} \wedge\varphi\psi & \text{sta per} & \neg\vee\neg\varphi\neg\psi, \\ \rightarrow\varphi\psi & \text{sta per} & \vee\neg\varphi\psi, \\ \leftrightarrow\varphi\psi & \text{sta per} & \wedge\rightarrow\varphi\psi\rightarrow\psi\varphi. \end{array}$$

Leggeremo i simboli $\wedge$ e $\rightarrow$ come "e" e "implica" rispettivamente.

Per come abbiamo definito le cose, se φ e ψ sono formule, allora anche $\wedge\varphi\psi$ e $\rightarrow\varphi\psi$ sono formule e possiamo usare regole analoghe alla (F3) per smontare espressioni in cui compaiono questi simboli, perché sappiamo che queste espressioni vanno in realtà sostituite con altre che sono formule.

L'interpretazione di una formula abbreviata è facile da calcolare:

$$\begin{aligned}(\wedge\varphi\psi)^{\mathfrak{A}} &= (\neg\vee\neg\varphi\neg\psi)^{\mathfrak{A}} = \neg((\vee\neg\varphi\neg\psi)^{\mathfrak{A}}) = \neg(\vee((\neg\varphi)^{\mathfrak{A}}, (\neg\psi)^{\mathfrak{A}})) \\ &= \neg(\vee(\neg(\varphi^{\mathfrak{A}}), \neg(\psi^{\mathfrak{A}}))) = \wedge(\varphi^{\mathfrak{A}}, \psi^{\mathfrak{A}})\end{aligned}$$

per quanto visto quando abbiamo dimostrato che $g_8 = \wedge$ si può esprimere come composizione di $f_3 = \neg$ e di $g_2 = \vee$. Analogamente, come abbiamo visto che $g_5 = \rightarrow$ si può esprimere come composizione di $\neg$ e $\vee$, abbiamo

$$(\rightarrow\varphi\psi)^{\mathfrak{A}} = (\vee\neg\varphi\psi)^{\mathfrak{A}} = \vee((\neg\varphi)^{\mathfrak{A}}, \psi^{\mathfrak{A}}) = \vee(\neg(\varphi^{\mathfrak{A}}), \psi^{\mathfrak{A}}) = \rightarrow(\varphi^{\mathfrak{A}}, \psi^{\mathfrak{A}}).$$

In altre parole, per calcolare le interpretazioni di formule abbreviate, possiamo usare le funzioni corrispondenti, esattamente come si fa per i connettivi $\neg$ e $\vee$. Allo stesso modo si opera per $\leftrightarrow$.

7. Variabili

Nel linguaggio formale che stiamo via via definendo possiamo esprimere già alcune cose. Ci manca però un ingrediente fondamentale, il modo di indicare un oggetto "arbitrario". Inoltre possiamo osservare che abbiamo un problema: se nella struttura considerata non ci sono costanti (e quindi non abbiamo simboli di costanti nel linguaggio), non abbiamo nemmeno formule! Infatti la definizione di termine, sulla quale poggia quella di formula atomica e di seguito quella di formula, richiede che termini esistano; ma se non ci sono simboli di costante, la definizione precedente non ce ne fornisce.

DEFINIZIONE 7.1. In ogni linguaggio ammettiamo una infinità numerabile di simboli, detti *variabili*, che indicheremo con $\mathbf{v}_0$, $\mathbf{v}_1, \ldots$, $\mathbf{v}_n, \ldots$, uno per ogni numero naturale.

Ogni variabile sarà un termine. Perciò amplieremo la definizione precedente e questa sarà la versione definitiva. Ci occuperemo in seguito dell'interpretazione.

DEFINIZIONE 7.2. Un *termine* è un'espressione del linguaggio costruita secondo le seguenti regole:
(T1) ogni simbolo di costante è un termine;
(T2) ogni variabile è un termine;
(T3) se $\mathbf{f}$ è un simbolo di funzione n-aria e t_1, $t_2, \ldots$, t_n sono termini, allora $\mathbf{f}t_1t_2\ldots t_n$ è un termine;
(T4) nessun'altra espressione del linguaggio è un termine.

ESEMPIO 7.3. Nel linguaggio dei numeri naturali, le seguenti espressioni sono termini:

$$\mathbf{+v_0v_1} \qquad \mathbf{\times v_1v_3} \qquad \mathbf{\times s1v_6} \qquad \mathbf{sv_1}$$

La definizione di formula (che amplieremo più avanti) va ovviamente estesa tenendo conto dei nuovi termini introdotti; ma le regole (F1), (F2) e (F3) rimangono esattamente le stesse.

ESEMPIO 7.4. Nel linguaggio dei numeri naturali, le seguenti espressioni sono formule:

$$\mathbf{=v_1v_2} \qquad \mathbf{<1v_0} \qquad \mathbf{=+v_0v_1+v_1v_0}$$

L'ultima formula dovrebbe ricordare la proprietà commutativa dell'addizione nei numeri naturali: scritta in forma più usuale potrebbe essere infatti $v_0 + v_1 = v_1 + v_0$.

8. Realizzazioni

Intuitivamente una variabile sta a indicare un elemento "qualunque". Per interpretare una formula atomica, però, dobbiamo valutare se una certa n-pla appartiene alla relazione associata, nella struttura, al simbolo di relazione che compare nella formula. Che valore di verità potremmo dare alla formula $\mathbf{=v_00}$?

La soluzione a questo problema richiede un nuovo concetto; lo scopo successivo sarà di riuscire a farne a meno.

DEFINIZIONE 8.1. Sia data la struttura $\mathfrak{A}$ con universo A. Una funzione $\mathsf{a}\colon \mathbb{N} \to A$ si chiama *assegnazione di valori alle variabili* (abbrevieremo con AVV).

Una *realizzazione* della struttura $\mathfrak{A}$ è una coppia ordinata $\sigma = (\mathfrak{A}, \mathsf{a})$ dove a è una AVV.

Diremo ora come interpretare un termine in una realizzazione. Prima di tutto però ci accordiamo che l'interpretazione di ogni simbolo di relazione o di funzione nella realizzazione è la stessa che nella struttura: se $\mathbf{S}$ è un simbolo di relazione o di funzione,

$$\mathbf{S}^\sigma = \mathbf{S}^{\mathfrak{A}}.$$

DEFINIZIONE 8.2. Sia $\sigma = (\mathfrak{A}, \mathsf{a})$ una realizzazione. L'interpretazione di un termine nella realizzazione σ è calcolata secondo le regole seguenti:
(IT1) se $\mathbf{c}$ è un simbolo di costante, allora $\mathbf{c}^\sigma = \mathbf{c}^{\mathfrak{A}}$;
(IT2) $(\mathbf{v}_n)^\sigma = \mathsf{a}(n)$;
(IT3) se $\mathbf{f}$ è un simbolo di funzione n-aria e t_1, $t_2, \ldots$, t_n sono termini, allora

$$(\mathbf{f}t_1t_2\ldots t_n)^\sigma = \mathbf{f}^\sigma(t_1^\sigma, t_2^\sigma, \ldots, t_n^\sigma).$$

In altre parole, alla variabile $\mathbf{v}_n$ sostituiamo il valore della funzione a in n. Naturalmente, l'interpretazione di un termine può cambiare cambiando la realizzazione (cioè la funzione di assegnazione di valori alle variabili).

Esempio 8.3. Sia a la funzione così definita: $\mathsf{a}(0) = 1$, $\mathsf{a}(1) = 1$, $\mathsf{a}(2) = 4$, $\mathsf{a}(n) = n$ per $n > 2$.

Sia b la funzione così definita: $\mathsf{b}(0) = 3$, $\mathsf{b}(1) = 0$, $\mathsf{b}(2) = 1$, $\mathsf{b}(n) = 2$ per $n > 2$.

Consideriamo le realizzazioni $\sigma = (\mathfrak{N}, \mathsf{a})$ e $\tau = (\mathfrak{N}, \mathsf{b})$.

Vogliamo calcolare l'interpretazione in σ e τ della formula

$$\mathsf{\vee}\mathbf{<}\mathbf{v}_1\mathbf{1}\mathbf{=}\mathbf{v}_3\mathbf{v}_4$$

e, prima di tutto, identifichiamo le formule atomiche che vi compaiono: scriviamo φ per $\mathbf{<}\mathbf{v}_1\mathbf{1}$ e ψ per $\mathbf{=}\mathbf{v}_3\mathbf{v}_4$. Abbiamo

$$\varphi^\sigma = \mathbf{F} \qquad \text{e} \qquad \psi^\sigma = \mathbf{F}$$

perché $(\mathsf{a}(1), \mathbf{1}^{\mathfrak{N}}) = (1, 1) \notin \mathbf{<}^{\mathfrak{N}}$ e $(\mathsf{a}(3), \mathsf{a}(4)) = (3, 4) \notin \mathbf{=}^{\mathfrak{N}}$. Dunque

$$(\mathsf{\vee}\varphi\psi)^\sigma = \vee(\varphi^\sigma, \psi^\sigma) = \vee(\mathbf{F}, \mathbf{F}) = \mathbf{F}.$$

Abbiamo poi

$$\varphi^\tau = \mathbf{F} \qquad \text{e} \qquad \psi^\tau = \mathbf{V}$$

perché $(\mathsf{b}(1), \mathbf{1}^{\mathfrak{N}}) = (3, 1) \notin \mathbf{<}^{\mathfrak{N}}$ e $(\mathsf{b}(3), \mathsf{b}(4)) = (2, 2) \in \mathbf{=}^{\mathfrak{N}}$. Dunque

$$(\mathsf{\vee}\varphi\psi)^\tau = \vee(\varphi^\tau, \psi^\tau) = \vee(\mathbf{F}, \mathbf{V}) = \mathbf{V}.$$

Come vediamo, l'interpretazione della formula dipende dalla AVV.

9. Quantificatori

Consideriamo le seguenti formule nel linguaggio dei numeri naturali:

$$(1)\ \mathbf{=}\mathbf{v}_0\mathbf{v}_0 \qquad (2)\ \mathbf{=}\mathbf{v}_0\mathbf{v}_1$$

e calcoliamone l'interpretazione in una realizzazione $\sigma = (\mathfrak{N}, \mathsf{a})$. Dobbiamo allora considerare le due coppie $((\mathbf{v}_0)^\sigma, (\mathbf{v}_0)^\sigma) = (\mathsf{a}(0), \mathsf{a}(0))$ e $((\mathbf{v}_0)^\sigma, (\mathbf{v}_1)^\sigma) = (\mathsf{a}(0), \mathsf{a}(1))$. Si vede che la prima coppia appartiene a $\mathbf{=}^\sigma$ indipendentemente dalla funzione a, mentre la seconda può appartenere alla relazione di identità oppure no.

Un esempio meno banale è dato dalla formula

$$\mathbf{<}\mathbf{0}\mathbf{+}\mathbf{v}_0\mathbf{1}$$

che, scritta in forma usuale, sarebbe "$0 < v_0 + 1$". Riconosciamo facilmente che l'interpretazione di questa formula è vera in ogni realizzazione della struttura dei numeri naturali. Tuttavia ciò non accade in almeno una realizzazione della struttura dei numeri interi: se $\mathsf{a}(0) = -2 \in \mathbb{Z}$ e $\sigma = (\mathfrak{Z}, \mathsf{a})$, abbiamo che

$$(\mathbf{<}\mathbf{0}\mathbf{+}\mathbf{v}_0\mathbf{1})^\sigma = \mathbf{F}$$

perché

$$(\mathbf{0}^\sigma, (\mathbf{+}\mathbf{v}_0\mathbf{1})^\sigma) = (0, \mathsf{a}(0) + 1) = (0, -2 + 1) = (0, -1) \notin \mathbf{<}^{\mathfrak{Z}}.$$

Non dovrebbe sorprenderci: il linguaggio dei numeri naturali è adatto sia alla struttura $\mathfrak{N}$ che alla struttura $\mathfrak{Z}$; siccome queste strutture sono diverse, può accadere che una formula sia interpretata come vera in ogni realizzazione della prima e non in ogni realizzazione della seconda.

È il momento di aggiungere l'ultimo simbolo al linguaggio. Questo simbolo si chiama *quantificatore universale* e si denota con $\mathsf{\forall}$. Con questo simbolo si possono costruire nuove formule e siamo pronti per dare la regola definitiva per le formule.

Definizione 9.1. Una *formula* è un'espressione del linguaggio costruita secondo le seguenti regole:

(F1) ogni formula atomica è una formula;
(F2) se φ è una formula, allora $\neg\varphi$ è una formula;
(F3) se φ e ψ sono formule, allora $\vee\varphi\psi$ è una formula;
(F4) se φ è una formula e v è una variabile, allora $\forall v\varphi$ è una formula;
(F5) niente altro è una formula.

Abbiamo aggiunto alla definizione provvisoria precedente la regola riguardante il quantificatore universale. Oltre ai casi precedentemente visti, una formula può cominciare con il quantificatore universale, purché questo sia seguito da una variabile e il resto dell'espressione sia una formula.

Esempio 9.2. Le seguenti sono formule nel linguaggio dei numeri naturali:

$$\forall \mathbf{v}_0 {=} \mathbf{v}_0\mathbf{v}_0$$
$$\forall \mathbf{v}_0\forall \mathbf{v}_1 {\to} {=} \mathbf{v}_0\mathbf{v}_1 {=} \mathbf{v}_1\mathbf{v}_0$$

Che proprietà esprimono queste formule?

Vogliamo ora definire l'interpretazione di una formula che comincia con il quantificatore universale. Le altre regole per l'interpretazione delle formule rimangono invariate, le ripetiamo qui per completezza.

Abbiamo bisogno prima di una definizione supplementare.

Definizione 9.3. Sia $\mathfrak{A}$ una struttura con universo A e sia $\mathsf{a}\colon \mathbb{N} \to A$ una assegnazioni di valori alle variabili. Consideriamo la realizzazione $\sigma = (\mathfrak{A}, \mathsf{a})$. Dati $k \in \mathbb{N}$ e un elemento $b \in A$, indichiamo con $\mathsf{a}[\mathbf{v}_k/b]$ la funzione $\mathbb{N} \to A$ così definita:

$$\mathsf{a}[\mathbf{v}_k/b](n) = \begin{cases} \mathsf{a}(n) & \text{se } n \neq k, \\ b & \text{se } n = k. \end{cases}$$

La realizzazione $\sigma[\mathbf{v}_k/b]$ è

$$\sigma[\mathbf{v}_k/b] = (\mathfrak{A}, \mathsf{a}[\mathbf{v}_k/b]).$$

In altre parole $\sigma[\mathbf{v}_k/b]$ è la realizzazione σ in cui, però, alla variabile $\mathbf{v}_k$ viene sostituito b invece di $\mathsf{a}(k)$.

Definizione 9.4. Sia $\mathfrak{A}$ una struttura con universo A, sia $\mathscr{L}$ un linguaggio adatto a essa e sia $\mathsf{a}\colon \mathbb{N} \to A$ una assegnazioni di valori alle variabili. Consideriamo la realizzazione $\sigma = (\mathfrak{A}, \mathsf{a})$.

(IF1) L'interpretazione in σ della formula atomica $\mathbf{P}t_1t_2\dots t_n$ è

$$(\mathbf{P}t_1t_2\dots t_n)^{\mathfrak{A}} = \begin{cases} \mathbf{V} & \text{se } (t_1^{\mathfrak{A}}, t_2^{\mathfrak{A}}, \dots, t_n^{\mathfrak{A}}) \in \mathbf{P}^{\mathfrak{A}} \\ \mathbf{F} & \text{se } (t_1^{\mathfrak{A}}, t_2^{\mathfrak{A}}, \dots, t_n^{\mathfrak{A}}) \notin \mathbf{P}^{\mathfrak{A}} \end{cases}$$

(IF2) L'interpretazione in σ di una formula del tipo $\neg\varphi$ è

$$(\neg\varphi)^{\mathfrak{A}} = \neg(\varphi^{\mathfrak{A}}).$$

(IF3) L'interpretazione in σ di una formula del tipo $\vee\varphi\psi$ è

$$(\vee\varphi\psi)^{\mathfrak{A}} = \vee(\varphi^{\mathfrak{A}}, \psi^{\mathfrak{A}}).$$

(IF4) L'interpretazione in σ di una formula del tipo $\forall\mathbf{v}_k\varphi$ si calcola nel modo seguente:

$$(\forall\mathbf{v}_k\varphi)^{\sigma} = \mathbf{V} \text{ se e solo se } \varphi^{\sigma[\mathbf{v}_k/b]} = \mathbf{V}, \text{ per ogni } b \in A;$$

Altrimenti $(\forall\mathbf{v}_k\varphi)^{\sigma} = \mathbf{F}$.

In altre parole, la formula $\forall\mathbf{v}_k\varphi$ è interpretata come vera nella realizzazione σ se l'interpretazione della formula φ in è vera in ogni realizzazione che differisca da σ solo per il valore assegnato alla variabile $\mathbf{v}_k$.

ESEMPIO 9.5. Se $\sigma = (\mathfrak{N}, \mathsf{a})$ è una realizzazione della struttura dei numeri naturali, l'interpretazione in σ della formula

$$\forall \mathbf{v}_0 \neg {=} \mathbf{v}_0 \mathbf{s} \mathbf{v}_0$$

è vera. Prendiamo infatti $b \in \mathbb{N}$ e calcoliamo

$$(\neg {=} \mathbf{v}_0 \mathbf{s} \mathbf{v}_0)^{\sigma[\mathbf{v}_0/b]} = \neg(({=} \mathbf{v}_0 \mathbf{s} \mathbf{v}_0)^{\sigma[\mathbf{v}_0/b]}).$$

Ora dobbiamo considerare la coppia

$$(\mathsf{a}[\mathbf{v}_0/b](0), \mathbf{s}^{\mathfrak{N}}(\mathsf{a}[\mathbf{v}_0/b](0)) = (b, b+1) \notin {=}^{\mathfrak{N}}.$$

Dunque $({=} \mathbf{v}_0 \mathbf{s} \mathbf{v}_0)^{\sigma[\mathbf{v}_0/b]} = \mathbf{F}$ e quindi abbiamo la tesi.

ESEMPIO 9.6. Se $\sigma = (\mathfrak{N}, \mathsf{a})$ è una realizzazione della struttura dei numeri naturali, l'interpretazione in σ della formula

$$\forall \mathbf{v}_0 \neg {=} {\times} \mathbf{s} \mathbf{1} \mathbf{s} \mathbf{1} {\times} \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_0$$

è falsa. Se traduciamo in forma usuale la formula, questa direbbe che, per ogni n, $4 \neq n^2$. E in effetti, se consideriamo la realizzazione $\sigma[\mathbf{v}_0/2]$, abbiamo che

$$({=} {\times} \mathbf{s} \mathbf{1} \mathbf{s} \mathbf{1} {\times} \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_0)^{\sigma[\mathbf{v}_0/2]} = \mathbf{V}$$

perché $(4, 4) \in {=}^{\mathfrak{N}}$.

Come abbiamo visto nell'ultimo esempio, affinché l'interpretazione di una formula con quantificatore universale sia falsa, basta che esista un elemento dell'universo che non renda vera la sottoformula nella realizzazione "modificata".

È interessante notare quando l'interpretazione di una formula che comincia con un quantificatore universale è falsa (e quindi la sua negazione è interpretata come vera). Meglio ancora, cerchiamo di capire quando l'interpretazione della formula $\forall \mathbf{v}_k \neg \varphi$ è falsa. Abbiamo già visto nell'esempio che ciò equivale all'esistenza di un elemento $b \in A$ tale che

$$(\neg \varphi)^{\sigma[\mathbf{v}_k/b]} = \mathbf{F}$$

cioè

$$\varphi^{\sigma[\mathbf{v}_k/b]} = \mathbf{V}.$$

Dunque

$$\boxed{\begin{array}{c} (\neg \forall \mathbf{v}_k \neg \varphi)^{\sigma} = \mathbf{V} \\ \text{se e solo se} \\ \text{esiste } b \in A \text{ tale che } \varphi^{\sigma[\mathbf{v}_k/b]} = \mathbf{V}. \end{array}}$$

Abbiamo dunque trovato il modo di esprimere il concetto di "esistenza" attraverso il quantificatore universale. Possiamo allora introdurre una nuova abbreviazione:

$$\exists \mathbf{v}_k \varphi \text{ sta per } \neg \forall \mathbf{v}_k \neg \varphi$$

e chiameremo $\exists$ *quantificatore esistenziale.*

ESEMPIO 9.7. Vogliamo scrivere una formula nel linguaggio dei numeri naturali che esprima il fatto che *un numero è divisibile per un altro.*

Avremo bisogno di due variabili, $\mathbf{v}_0$ e $\mathbf{v}_1$, per indicare il numero dato e il divisore. Osserviamo che, affinché a sia divisibile per b, deve esistere un terzo numero c tale che $a = bc$. La formula cercata sarà allora

$$\exists \mathbf{v}_2 {=} \mathbf{v}_0 {\times} \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2.$$

Vediamo qui uno dei motivi per i quali abbiamo scelto di introdurre nel linguaggio infinite variabili: possiamo sempre trovarne una diversa da quelle che abbiamo già impiegato.

Esempio 9.8. Cerchiamo ora di esprimere la relazione di "essere minore" usando solo l'addizione e la relazione di identità. Un numero a è minore del numero b se e solo se esiste un terzo numero c, diverso da zero, tale che $b = a+c$. Dunque la formula sarà:

$$\exists \mathbf{v}_2 \wedge \neg {=} \mathbf{v}_2 \mathbf{0} {=} \mathbf{v}_1 {+} \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_2$$

Il lettore verifichi che la formula

$$\forall \mathbf{v}_0 \forall \mathbf{v}_1 {\leftrightarrow} {<} \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_1 \exists \mathbf{v}_2 \wedge \neg {=} \mathbf{v}_2 \mathbf{0} {=} \mathbf{v}_1 {+} \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_2$$

è vera in ogni realizzazione della struttura dei numeri naturali $\mathfrak{N}$. Vale lo stesso per ogni realizzazione della struttura dei numeri interi $\mathfrak{Z}$?

Consideriamo la formula $\forall \mathbf{v}_0 {=} {+} \mathbf{v}_0 \mathbf{1} {+} \mathbf{1} \mathbf{v}_0$; non è difficile verificare che questa è vera in ogni realizzazione della struttura dei numeri naturali (scritta in termini usuali dice che, per ogni n, $n + 1 = 1 + n$). Viceversa, la formula $\exists \mathbf{v}_2 {=} \mathbf{v}_0 {\times} \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2$ è vera in certe realizzazioni e falsa in altre.

Per esempio, se $\mathsf{a}(0) = 6$, $\mathsf{a}(1) = 3$, $\mathsf{a}(2) = 5$, mentre $\mathsf{b}(0) = 7$, $\mathsf{b}(1) = 4$, $\mathsf{b}(2) = 9$, ponendo $\sigma = (\mathfrak{N}, \mathsf{a})$ e $\tau = (\mathfrak{N}, \mathsf{b})$, possiamo facilmente vedere che (chiamando φ la formula in esame):

$$\varphi^\sigma = \mathbf{V}, \qquad \varphi^\tau = \mathbf{F}.$$

Infatti $\mathsf{a}(0) = 6$ è divisibile per $\mathsf{a}(1) = 3$, mentre $\mathsf{b}(0) = 7$ non è divisibile per $\mathsf{a}(1) = 4$. Come si vede, nel calcolo dell'interpretazione in σ o in τ non ha alcuna rilevanza il valore delle avv in 2 o nei numeri maggiori di due. Il valore assegnato alle variabili che non compaiono è irrilevante e non ci sono particolari motivi che non ce lo facessero supporre già da prima.

Esempio 9.9. Analizziamo per semplicità una formula ancora più breve:

$$\forall \mathbf{v}_0 {<} \mathbf{v}_0 \mathbf{s} \mathbf{v}_0.$$

In forma usuale questa dice che, per ogni n, $n < n + 1$. È facile verificare che l'interpretazione di questa formula non dipende da alcuno dei valori assegnati alle variabili nella realizzazione: infatti, quando vogliamo "togliere il quantificatore", dobbiamo sostituire σ con $\sigma[\mathbf{v}_0/b]$, per ogni valore di $b \in \mathbb{N}$; dunque fissiamo il valore in 0 della avv e gli altri valori non contano perché l'unica variabile che compare è $\mathbf{v}_0$. Ora, se $b \in \mathbb{N}$,

$$(b, b + 1) \in {<}^{\mathfrak{N}}$$

quindi

$$({<} \mathbf{v}_0 \mathbf{s} \mathbf{v}_0)^{\sigma[\mathbf{v}_0/b]} = \mathbf{V}$$

e questo non dipende da b. Dunque

$$(\forall \mathbf{v}_0 {<} \mathbf{v}_0 \mathbf{s} \mathbf{v}_0)^\sigma = \mathbf{V}.$$

Quando parliamo in modo informale, ci accorgiamo che certe "variabili" hanno un nome che può essere cambiato. Per fare un esempio concreto, quando diciamo che

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ la somma dei numeri naturali da 0 a n è $n(n + 1)/2$

è evidente che la lettera n può essere sostituita con qualunque altra. Non è la stessa cosa quando diciamo che

Esiste un numero naturale n tale che $n > 2$ e n divide m

dove ancora la lettera n può essere sostituita, ma la lettera m no.

Dove sta il motivo della differenza? Sembra evidente che risiede nel fatto che su n "agisce un quantificatore".

Definizione 9.10. Quando una formula è costruita usando la regola (F4) e v è la variabile che vi compare, questa variabile si dice *vincolata*.

Nella formula $\forall\mathbf{v}_1\vee<\mathbf{v}_0\mathbf{v}_1=\mathbf{v}_0\mathbf{v}_1$, la variabile $\mathbf{v}_1$ è vincolata, la variabile $\mathbf{v}_0$ no.

Naturalmente, quando si usa il quantificatore esistenziale, vale la stessa regola, visto che si tratta solo di un'abbreviazione. Per esempio, nella formula

$$\wedge\wedge\neg=\mathbf{v}_0\mathbf{0}\neg=\mathbf{v}_0\mathbf{1}\exists\mathbf{v}_1\exists\mathbf{v}_2\wedge<\mathbf{1}\mathbf{v}_1<\mathbf{1}\mathbf{v}_2=\mathbf{v}_0\times\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2$$

la variabile $\mathbf{v}_0$ non è vincolata, mentre lo sono le variabili $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$. (Si scopra che cosa voglia dire questa formula, dicendo in quali realizzazioni del linguaggio dei numeri naturali è vera.)

Ci sono inconvenienti quando si mettono insieme più formule, perché in esse una variabile potrebbe apparire vincolata oppure non vincolata. Per esempio questo accade nella formula

$$\vee=\mathbf{v}_0\mathbf{0}\forall\mathbf{v}_0=\mathbf{v}_0\mathbf{v}_0$$

che probabilmente è stata costruita in modo non attento. Di fatto, quando vogliamo costruire una formula che asserisca una condizione significativa, ci preoccupiamo di non usare le variabili a sproposito. Ma se qualcuno non è così attento, non tutto è perduto.

Teorema 9.11. *Se $\mathbf{v}_n$ è una variabile che non compare nella formula φ e chiamiamo φ' la formula che si ottiene sostituendo ogni occorrenza della variabile vincolata $\mathbf{v}_k$ in φ con $\mathbf{v}_n$, allora le formule φ e φ' sono interpretate allo stesso modo in tutte le realizzazioni.*

Non daremo la dimostrazione di questo teorema, del resto non difficile (si fa per induzione sul numero di connettivi della formula φ). Quello che ci interessa è notare che, quando abbiamo una formula "scritta male", la possiamo sostituire con una che sia "scritta bene". Una formula è "scritta bene" quando nessuna variabile che compare in essa è sia vincolata che non vincolata. D'ora in poi supporremo che tutte le formule siano "scritte bene"; la cosa ci è permessa dal teorema.

In una formula "scritta bene", diremo che una variabile non vincolata è *libera*.

Definizione 9.12. Una formula si dice un *enunciato* se non ha variabili libere.

Prima di dire a che serve distinguere gli enunciati tra le formule, vediamo che cosa significa quando una formula ha variabili libere.

Per fare un esempio facile, la formula $\neg=\mathbf{v}_0\mathbf{0}$ è vera in tutte le realizzazioni del linguaggio dei numeri naturali nella quali alla variabile $\mathbf{v}_0$ è assegnato un valore diverso da zero. Dunque abbiamo una condizione che la realizzazione deve soddisfare affinché la formula sia vera.

In generale, data una formula φ, scriveremo $\varphi(\mathbf{v}_0,\dots,\mathbf{v}_n)$ per dire che in φ compaiono come libere solo variabili fra quelle indicate. Se $\mathfrak{A}$ è una struttura e a_0, a_1,..., a_n sono elementi del suo universo, scriveremo

$$\mathfrak{A}\models\varphi(\mathbf{v}_0,\dots,\mathbf{v}_n)[a_0,\dots,a_n]$$

per indicare che la formula φ è vera in ogni realizzazione in cui la AVV assegni alla variabile $\mathbf{v}_i$ il valore a_i $(i=0,1,\dots,n)$.

Esempio 9.13. Scrivere una formula φ con la variabile libera $\mathbf{v}_0$ tale che

$$\mathfrak{N}\models\varphi(\mathbf{v}_0)[a_0]$$

se e solo se a_0 è un numero primo.

La costruiremo un pezzo alla volta. Intanto dobbiamo dire che il numero dato non è né 0 né 1. Poi dovremo dire che un divisore di questo numero è necessariamente 1 o il numero stesso. I primi due pezzi sono allora

$$\neg=\mathbf{v}_0\mathbf{0}\qquad\neg=\mathbf{v}_0\mathbf{1}.$$

Il pezzo più complicato si può costruire dicendo che, quando si ha un prodotto di due numeri maggiori di 1, questo non è il numero di cui si asserisce che è primo:

$$\forall \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 {\rightarrow} {\wedge} {<} \mathbf{1} \mathbf{v}_1 {<} \mathbf{1} \mathbf{v}_2 \neg {=} \mathbf{v}_0 {\times} \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2.$$

Dunque la nostra formula sarà:

$$\wedge\wedge\neg{=}\mathbf{v}_0\mathbf{0}\neg{=}\mathbf{v}_0\mathbf{1}\forall \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 {\rightarrow} {\wedge} {<} \mathbf{1} \mathbf{v}_1 {<} \mathbf{1} \mathbf{v}_2 \neg {=} \mathbf{v}_0 {\times} \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2.$$

Un enunciato, invece, è una formula della quale siamo sicuri che l'interpretazione non dipende dalla realizzazione, ma solo dalla struttura.

TEOREMA 9.14. *Sia φ una formula. Se $\sigma = (\mathfrak{A}, \mathsf{a})$ e $\tau = (\mathfrak{A}, \mathsf{b})$ sono realizzazioni le cui* AVV *coincidono sulle variabili libere di φ, allora*

$$\varphi^\sigma = \varphi^\tau.$$

DIMOSTRAZIONE. Faremo induzione sul numero k di connettivi e quantificatori nella formula φ.

(Passo base) Se $k = 0$, la formula è atomica. L'interpretazione della formula dipende allora solo dal valore assegnato alle variabili che effettivamente compaiono.

(Passo induttivo) Supponiamo la tesi vera per formule in cui il numero di connettivi e quantificatori è minore di n.

Primo caso: φ è della forma $\neg\alpha$. Per ipotesi induttiva l'interpretazione di α è la stessa in σ e in τ.

Secondo caso: φ è della forma $\vee\alpha\beta$. Per ipotesi induttiva l'interpretazione di α e β è la stessa in σ e in τ.

Terzo caso: φ è della forma $\forall\mathbf{v}_k\alpha$ e possiamo supporre che la variabile $\mathbf{v}_k$ non compaia fra le variabili libere in φ. Sia b un elemento dell'universo; dobbiamo verificare che

$$\alpha^{\sigma[\mathbf{v}_k/b]} \qquad \text{e} \qquad \alpha^{\tau[\mathbf{v}_k/b]}$$

sono uguali. Ma le AVV delle realizzazioni $\sigma[\mathbf{v}_k/b]$ e $\tau[\mathbf{v}_k/b]$ coincidono sia sulle variabili libere di φ che su $\mathbf{v}_k$; dunque coincidono sulle variabili libere di α che ha un quantificatore in meno rispetto a φ. Per ipotesi induttiva le due interpretazioni considerate di α sono uguali. □

COROLLARIO 9.15. *L'interpretazione di un enunciato è la stessa in tutte le realizzazioni di una data struttura.*

Abbiamo finalmente tolto di mezzo le realizzazioni! Non del tutto, perché sono necessarie per calcolare le interpretazioni.

Osserviamo che il corollario non dice che l'interpretazione di un enunciato è indipendente dalla struttura, ma solo da una sua realizzazione. Se un linguaggio è adeguato a più strutture, un suo enunciato può essere interpretato diversamente in esse.

ESEMPIO 9.16. Consideriamo l'enunciato nel linguaggio dei numeri naturali

$$\forall\mathbf{v}_0\forall\mathbf{v}_1{\rightarrow}{<}\mathbf{v}_0\mathbf{v}_1\exists\mathbf{v}_2{\wedge}{<}\mathbf{v}_0\mathbf{v}_2{<}\mathbf{v}_2\mathbf{v}_1$$

che dice, intuitivamente: fra due elementi distinti ce n'è un terzo.

Questo enunciato è falso nella struttura $\mathfrak{N}$ dei numeri naturali; è invece vero nella struttura $\mathfrak{R}$ dei numeri reali.

10. Teorema di deduzione semantica

Vogliamo ora analizzare più in profondità quanto abbiamo studiato fin qui. In particolare vogliamo vedere che l'usuale modo di ragionare ha un corrispettivo nell'analisi dell'interpretazione delle formule.

Fisseremo una struttura $\mathfrak{A}$ e un linguaggio $\mathscr{L}$ a essa adeguato.

Definizione 10.1. Una formula φ nel linguaggio $\mathscr{L}$ si dice *valida* in $\mathfrak{A}$ se l'interpretazione di φ è vera in ogni realizzazione di $\mathfrak{A}$ e scriveremo, in tal caso

$$\models_{\mathfrak{A}} \varphi$$

o, più semplicemente, quando è chiaro a quale struttura ci riferiamo, $\models \varphi$.

Possiamo dare una definizione più generale.

Definizione 10.2. Una formula φ si dice *conseguenza logica* di un insieme di formule Φ se l'interpretazione di φ è vera in ogni realizzazione di $\mathfrak{A}$ in cui ogni formula dell'insieme Φ è vera; scriveremo, in tal caso

$$\Phi \models_{\mathfrak{A}} \varphi$$

o, se la struttura di cui si parla è chiara, $\Phi \models \varphi$.

La seconda definizione è più generale perché una formula è valida se e solo se è conseguenza logica dell'insieme vuoto di formule.

Usualmente l'insieme di formule Φ è dato dagli *assiomi* di una teoria (quelli di Peano per i numeri naturali o quelli di Euclide per la geometria piana). Il nostro scopo è di scoprire quali siano gli enunciati che valgono in tutte le strutture nei quali gli assiomi siano soddisfatti.

Prendiamo una tipica situazione. Quando vogliamo dimostrare una proposizione del tipo "se A allora B", il ragionamento usuale è: supponiamo che valga A (oltre agli assiomi) e da questa ipotesi supplementare ricaviamo B.

Non vogliamo qui analizzare il concetto di dimostrazione, che richiederebbe molto più tempo. Ci limiteremo a una descrizione "semantica" della situazione, cioè legata al concetto di interpretazione. Nel corso di Logica Matematica verrà invece mostrato che i concetti di "conseguenza logica" e "dimostrabilità" sono intimamente collegati.

Teorema 10.3 (Teorema di deduzione semantica). *Siano φ e ψ due formule e sia Φ un insieme di formule. Allora*

$$\Phi \models \boldsymbol{\rightarrow}\psi\varphi \qquad \textit{se e solo se} \qquad \Phi \cup \{\psi\} \models \varphi.$$

Dimostrazione. La dimostrazione va divisa in due parti.

Supponiamo che $\Phi \models \boldsymbol{\rightarrow}\psi\varphi$. Vogliamo dunque verificare che $\Phi \cup \{\psi\} \models \varphi$. Perciò prendiamo una realizzazione σ in cui l'interpretazione di tutte le formule di $\Phi \cup \{\psi\}$ sia vera.

Siccome l'interpretazione di ogni formula di Φ è vera, possiamo dire, per ipotesi, che

$$(\boldsymbol{\rightarrow}\psi\varphi)^\sigma = \mathbf{V}.$$

Dunque

$$\mathbf{V} = (\boldsymbol{\rightarrow}\psi\varphi)^\sigma = \rightarrow(\psi^\sigma, \varphi^\sigma) = \rightarrow(\mathbf{V}, \varphi^\sigma)$$

e dunque $\varphi^\sigma = \mathbf{V}$ per come è definita la funzione $\rightarrow$.

Supponiamo che $\Phi \cup \{\psi\} \models \varphi$. Vogliamo verificare che $\Phi \models \boldsymbol{\rightarrow}\psi\varphi$. Perciò prendiamo una realizzazione σ in cui l'interpretazione di tutte le formule di Φ sia vera.

Abbiamo due casi: (1) $\psi^\sigma = \mathbf{F}$ oppure (2) $\psi^\sigma = \mathbf{V}$. Nel caso (1) si ha

$$(\boldsymbol{\rightarrow}\psi\varphi)^\sigma = \rightarrow(\psi^\sigma, \varphi^\sigma) = \rightarrow(\mathbf{F}, \varphi^\sigma) = \mathbf{V},$$

per come è definita $\rightarrow$.

Nel caso (2) abbiamo che l'interpretazione in σ di tutte le formule di $\Phi \cup \{\psi\}$ è vera. Per ipotesi, allora $\varphi^\sigma = \mathbf{V}$. Dunque

$$(\rightarrow\psi\varphi)^\sigma = \rightarrow(\psi^\sigma, \varphi^\sigma) = \rightarrow(\mathbf{V}, \mathbf{V}) = \mathbf{V}.$$

Perciò, in entrambi i casi, $(\rightarrow\psi\varphi)^\sigma = \mathbf{V}$ e dunque $\Phi \models \rightarrow\psi\varphi$. □

Un altro modo comune di condurre un ragionamento matematico è la *reductio ad absurdum*, cioè assumere come ipotesi la negazione di ciò che si vuole dimostrare e dedurre da essa una contraddizione. Ricordiamo che l'intepretazione di una formula in una realizzazione è vera o falsa e che esistono formule la cui interpretazione è vera e altre (le loro negazioni) la cui interpretazione è falsa.

Definizione 10.4. Un insieme di formule Φ del linguaggio $\mathscr{L}$ si dice *soddisfacibile* se esiste una realizzazione $\sigma = (\mathfrak{A}, \mathsf{a})$ in cui l'interpretazione di tutte le formule di Φ sia vera. Diremo anche che σ soddisfa Φ.

L'insieme si dirà *non soddisfacibile* in caso contrario.

Abbiamo allora un teorema analogo al precedente.

Teorema 10.5. *Sia Φ un insieme di formule e sia φ una formula del linguaggio $\mathscr{L}$. Allora*

$$\Phi \models \varphi \qquad \textit{se e solo se} \qquad \Phi \cup \{\neg\psi\} \textit{ non è soddisfacibile.}$$

Dimostrazione. Dobbiamo ancora dividere la dimostrazione in due parti.

Supponiamo che $\Phi \models \varphi$. Vogliamo verificare che $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ non è soddisfacibile.

Sia $\sigma = (\mathfrak{A}, \mathsf{a})$ una realizzazione, dove $\mathfrak{A}$ è una struttura adeguata al linguaggio $\mathscr{L}$ e supponiamo che l'interpretazione di ogni formula di Φ in σ sia vera: se σ soddisfa $\Phi\cup\{\neg\varphi\}$ allora necessariamente deve soddisfare Φ. Ma, per ipotesi, $\varphi^\sigma = \mathbf{V}$ e dunque $(\neg\varphi)^\sigma = \mathbf{F}$. Dunque σ non soddisfa $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$.

Supponiamo che $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ non sia soddisfacibile. Vogliamo verificare che $\Phi \models \varphi$.

Sia σ una realizzazione in cui l'interpretazione di tutte le formule di Φ è vera. Siccome $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ non è soddisfacibile, l'unica possibilità è che $(\neg\varphi)^\sigma = \mathbf{F}$, da cui $\varphi^\sigma = \mathbf{V}$, come desiderato. □

Un facile esempio di insieme non soddisfacibile è $\{\varphi, \neg\varphi\}$, perché in nessuna realizzazione entrambe le formule possono essere vere.

Esempio 10.6. Consideriamo due formule φ e ψ e dimostriamo, usando il teorema di deduzione semantica, che

$$\models \rightarrow\psi\rightarrow\varphi\psi$$

cioè che la formula $\rightarrow\psi\rightarrow\varphi\psi$ è valida. Se la scriviamo in modo più tradizionale, essa è $\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ e ne intuiamo chiaramente la natura: se sappiamo ψ, allora sappiamo che qualunque cosa implica ψ. Ricordiamo che il concetto di implicazione che stiamo usando prescinde da qualunque collegamento di tipo causa-effetto fra le formule.

La dimostrazione è del tutto formale:

$$\models \rightarrow\psi\rightarrow\varphi\psi \quad \text{se e solo se} \quad \{\psi\} \models \rightarrow\varphi\psi \quad \text{se e solo se} \quad \{\psi, \varphi\} \models \psi$$

e l'ultima asserzione è ovvia. Infatti in qualunque realizzazione in cui l'interpretazione delle formule φ e ψ sia vera, l'interpretazione di ψ è vera!

11. Calcolo proposizionale

L'ultimo esempio della sezione precedente ammette un altro tipo di trattazione. Si può notare che la formula $\to\psi\to\varphi\psi$ è valida *indipendentemente* da quali sono le formule φ e ψ; queste possono essere vere o false in una data realizzazione, senza che ciò influisca sull'intepretazione di $\to\psi\to\varphi\psi$.

Fissiamo allora un linguaggio $\mathscr{L}$; chiameremo *formule elementari* le formule atomiche o quelle che cominciano con un quantificatore.

DEFINIZIONE 11.1. Una *valutazione* (*proposizionale*) *elementare* è una funzione totale $\mathscr{V}$ dall'insieme delle formule elementari in $\mathscr{L}$ all'insieme $\{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}$.

Il primo passo è quello di estendere una valutazione elementare all'insieme di tutte le formule. Ora una formula non elementare può essere sempre ridotta nella forma

$$\neg\varphi \qquad \text{oppure} \qquad \vee\varphi\psi$$

e quindi possiamo immaginare, per induzione, di aver già definito l'estensione alle formule più corte; porremo quindi

$$\widehat{\mathscr{V}}(\neg\varphi) = \neg(\widehat{\mathscr{V}}(\varphi)) \qquad \text{e} \qquad \widehat{\mathscr{V}}(\vee\varphi\psi) = \vee(\widehat{\mathscr{V}}(\varphi), \widehat{\mathscr{V}}(\psi)).$$

Nel calcolo di $\widehat{\mathscr{V}}(\varphi)$ ovviamente possiamo usare anche le altre funzioni ($\wedge$ e $\to$), come abbiamo già fatto per le intepretazioni.

DEFINIZIONE 11.2. Una formula φ si dice *proposizionalmente valida* se, per ogni valutazione elementare $\mathscr{V}$, si ha

$$\widehat{\mathscr{V}}(\varphi) = \mathbf{V}.$$

ESEMPIO 11.3. La formula $\to\psi\to\varphi\psi$ è proposizionalmente valida. Infatti, sia $\mathscr{V}$ una valutazione elementare. Allora

$$\widehat{\mathscr{V}}(\to\psi\to\varphi\psi) = \to(\widehat{\mathscr{V}}(\psi), \widehat{\mathscr{V}}(\to\varphi\psi)) = \to(\widehat{\mathscr{V}}(\psi), \to(\widehat{\mathscr{V}}(\varphi), \widehat{\mathscr{V}}(\psi))) = x.$$

Abbiamo usato x per indicare il valore da calcolare. Se ora consideriamo i quattro casi possibili, otteniamo la tesi.

$$\begin{array}{ll}
\text{Se } \widehat{\mathscr{V}}(\varphi) = \mathbf{V} \text{ e } \widehat{\mathscr{V}}(\psi) = \mathbf{V}, & x = \to(\mathbf{V}, \to(\mathbf{V}, \mathbf{V})) = \to(\mathbf{V}, \mathbf{V}) = \mathbf{V} \\
\text{Se } \widehat{\mathscr{V}}(\varphi) = \mathbf{V} \text{ e } \widehat{\mathscr{V}}(\psi) = \mathbf{F}, & x = \to(\mathbf{F}, \to(\mathbf{V}, \mathbf{F})) = \to(\mathbf{F}, \mathbf{F}) = \mathbf{V} \\
\text{Se } \widehat{\mathscr{V}}(\varphi) = \mathbf{F} \text{ e } \widehat{\mathscr{V}}(\psi) = \mathbf{V}, & x = \to(\mathbf{V}, \to(\mathbf{F}, \mathbf{V})) = \to(\mathbf{V}, \mathbf{V}) = \mathbf{V} \\
\text{Se } \widehat{\mathscr{V}}(\varphi) = \mathbf{F} \text{ e } \widehat{\mathscr{V}}(\psi) = \mathbf{F}, & x = \to(\mathbf{F}, \to(\mathbf{F}, \mathbf{F})) = \to(\mathbf{F}, \mathbf{V}) = \mathbf{V}
\end{array}$$

e in ogni caso, $\widehat{\mathscr{V}}(\to\psi\to\varphi\psi) = \mathbf{V}$.

Si riconosce chiaramente che un modo per verificare se una formula è proposizionalmente valida è di impiegare le tavole di verità. Questo mostra che per certe formule esiste una procedura "meccanica" per verificarne la validità: è infatti ovvio che una formula proposizionalente valida è valida.

Il fatto importante è che questo non accade per tutte le formule. Si può anzi dimostrare che, in generale, non esiste alcun procedimento meccanico per verificare se una formula è valida o quanto meno conseguenza logica di un insieme di formule. Per questo l'attività di dimostrazione è essenziale: una macchina può "scoprire teoremi" (cioè enunciati che sono conseguenza logica degli assiomi), ma non si può essere certi che li abbia dimostrati tutti.