# ELEMENTI DI TEORIA DELLE CONICHE

**Appunti per il corso di**
**Algebra lineare con elementi di geometria**
**Corso di laurea in Matematica Applicata**
**Università di Verona — 2005/2006**

**Enrico Gregorio**

# 1. Coniche

Una *conica* nel piano riferito a un sistema di coordinate cartesiane è il luogo dei punti che soddisfano un'equazione della forma

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \tag{C}$$

dove i coefficienti $a_{11}$, $a_{12}$, $a_{22}$, $a_{13}$, $a_{23}$ e $a_{33}$ non sono tutti nulli.

Riconosciamo fra queste tutte le figure note come ellisse, parabola e iperbole. Ce ne sono anche altre; per esempio, se consideriamo le rette di equazioni

$$2x - y + 1 = 0, \qquad x + y - 4 = 0,$$

i punti del piano che appartengono ad almeno una delle due rette sono quelli che soddisfano l'equazione

$$(2x - y + 1)(x + y - 4) = 0$$

che è della forma vista prima, basta svolgere i calcoli. Ci si pone quindi la domanda: quali equazioni del tipo (C) rappresentano una coppia di rette?

Eviteremo spesso di parlare di equazioni, preferendo trattare solo con polinomi. Un polinomio di secondo grado in $x$ e $y$ si può ovviamente sempre scrivere nella forma

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}. \tag{Q}$$

Questo polinomio determina la conica e, viceversa, la conica come luogo dei punti determina il polinomio, *a meno di un coefficiente di proporzionalità* che deve essere diverso da 0.

Un caso particolare è quando le due rette in realtà sono la stessa: del resto il quadrato di un'espressione $b_1x + b_2y + b_3$ è proprio del tipo (Q). Questo caso è facile da trattare: si tratta di vedere se il polinomio di secondo grado $f(x, y)$ è della forma

$$f(x, y) = c(b_0 + b_1x + b_2y)^2$$

dove $c \neq 0$. Abbiamo allora, sviluppando il quadrato:

$$\begin{aligned} cb_1^2 &= a_{11} \\ cb_1b_2 &= a_{12} \\ cb_2^2 &= a_{22} \\ cb_1b_3 &= a_{13} \\ cb_2b_3 &= a_{23} \\ cb_3^2 &= a_{33} \end{aligned}$$

ma questa condizione è tutt'altro che facile da analizzare. Ricorreremo perciò a un trucco di tipo diverso: modificheremo il sistema di riferimento in modo che la conica sia definita da un polinomio più facile.

Per fare questo ricorreremo a una traslazione degli assi, scelta opportunamente. Se la nuova origine ha coordinate $(h, k)$, le coordinate di un punto di coordinate $(x, y)$ diventano, nel nuovo sistema, $(x-h, y-k)$; è lo stesso dire che il punto di coordinate $(X, Y)$ nel nuovo sistema ha coordinate $(X+h, Y+k)$ nel vecchio. Perciò i punti della conica hanno, nel nuovo sistema, le coordinate che soddisfano

$$f(X+h, Y+k) = 0$$

e questo ci permetterà di scegliere $h$ e $k$ in modo che certi coefficienti si annullino. Il fatto che il polinomio rappresenti una coppia di rette non può essere modificato da questo cambiamento di coordinate.

Facciamo un esempio. Data la conica con polinomio

$$f(x, y) = 33 - 24x + 2y + 4x^2 + y^2$$

sostituiamo $x$ con $X + h$ e $y$ con $Y + k$, trovando

$$f(X+h, Y+k) = 33 - 24X - 24h + 2Y + 2k + 4X^2 + 8hX + 4h^2 + Y^2 + 2kY + k^2.$$

Scegliamo $h$ e $k$ in modo che

$$8h - 24 = 0, \qquad 2k + 2 = 0$$

cioè $h = 3$ e $k = -1$, trovando allora il polinomio

$$-4 + 4X^2 + Y^2$$

che è molto più semplice da trattare (e fa vedere che la conica in questione è un'ellisse).

In generale, cercheremo una traslazione che annulla i termini di primo grado, quindi dovremo fare in modo che

$$a_{11}h + a_{12}k + a_{13} = 0$$
$$a_{12}h + a_{22}k + a_{23} = 0$$

Questo è un sistema lineare nelle incognite $h$ e $k$. Conoscendo il modo di risolverli, sappiamo che esso ammette soluzione quando

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0.$$

Potrebbe ammetterne infinite o nessuna quando invece $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$.

Abbiamo già allora una prima classificazione delle coniche. La conica definita dal polinomio (Q) si dice

- di tipo *ellittico* quando $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$,
- di tipo *parabolico* quando $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$,
- di tipo *iperbolico* quando $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$.

Perché differenziamo i casi in cui il numero $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ è maggiore o minore di zero? Proviamo a intersecare una conica con una retta parallela a uno degli assi.

Chiamiamo $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ *discriminante* della conica.

Primo caso: intersezione con la retta definita dal polinomio $y - p$. Dobbiamo trovare le soluzioni dell'equazione

$$a_{11}x^2 + 2(a_{12}p + a_{13})x + a_{22}p^2 + 2a_{23}p + a_{33} = 0.$$

Questa ammette soluzioni quando

$$(a_{12}p + a_{13})^2 - a_{11}(a_{22}p^2 + 2a_{23}p + a_{33}) \geq 0$$

cioè quando

$$(a_{12}^2 - a_{11}a_{22})p^2 - 2(a_{23}a_{11} - a_{13}a_{12})p + (a_{13}^2 - a_{33}a_{11}) \geq 0.$$

Appare evidente il ruolo del discriminante: in una disequazione della forma $at^2 + bt + c \geq 0$ le soluzioni dipendono dal segno del coefficiente $a$, oltre che dal discriminante (del polinomio stesso).

Tralasciando casi speciali, vediamo che quando $\Delta = 0$, ogni retta in un certo semipiano incontra la conica. Quando $\Delta < 0$ (cioè nel caso ellittico), le eventuali soluzioni formano un intervallo limitato; quando $\Delta > 0$ le soluzioni sono unione di due intervalli illimitati.

Allo stesso risultato si arriva cercando le intersezioni della conica con la retta definite dal polinomio $x - q$, come è facile vedere.

In conclusione: quando una conica è di tipo ellittico, i suoi punti stanno all'interno di un rettangolo limitato, cosa che non accade quando la conica è di tipo parabolico o iperbolico. Si vedano le figure 1, 2 e 3.

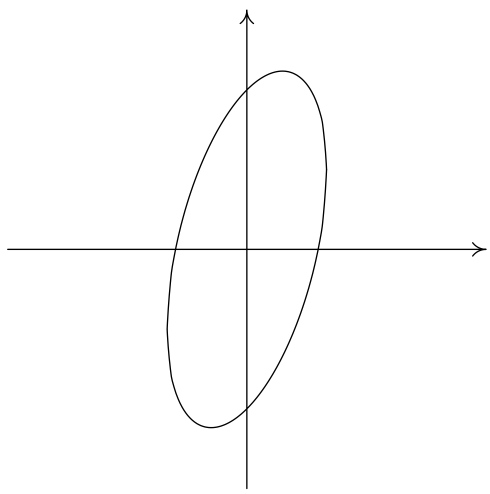

FIGURA 1: Conica $5x^2 - 2xy + y^2 - 4$ (tipo ellittico: $\Delta = (2/2)^2 - 5 \cdot 1 = -4 < 0$).

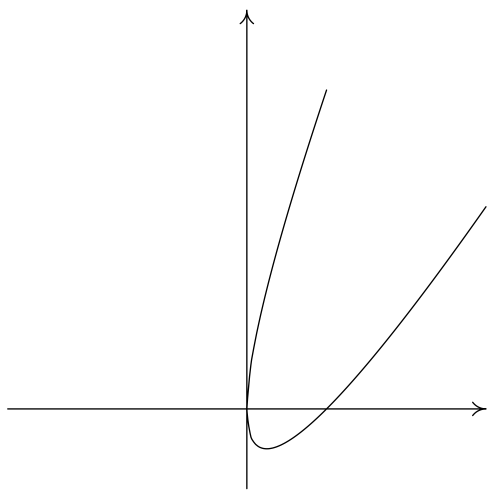

FIGURA 2: Conica $4x^2 - 4xy + y^2 - 4x$ (tipo parabolico: $\Delta = (4/2)^2 - 4 \cdot 1 = 0$).

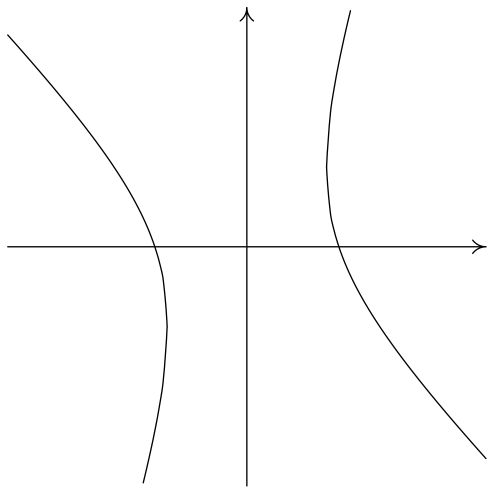

FIGURA 3: Conica $3x^2 + 2xy - y^2 - 4$ (tipo iperbolico: $\Delta = (2/2)^2 - 3 \cdot (-1) = 4 < 0$).

Le traslazioni non sono l'unico modo di cambiare il sistema di coordinate. Esaminiamo che cosa succede quando ruotiamo il sistema di riferimento di un angolo $\alpha$ attorno all'origine. Come sappiamo, la relazione fra le vecchie coordinate $(x, y)$ e le nuove $(X, Y)$ di un punto sono date da

$$\begin{cases} x = X\cos\alpha - Y\operatorname{sen}\alpha, \\ y = X\operatorname{sen}\alpha + Y\cos\alpha. \end{cases}$$

Se eseguiamo la sostituzione in (Q), otteniamo un polinomio in $X$ e $Y$ nel quale il coefficiente del termine in $XY$ è

$$b_{12} = (a_{22} - a_{11})\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + a_{12}(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha) = \frac{1}{2}(a_{22} - a_{11})\operatorname{sen}2\alpha + a_{12}\cos 2\alpha.$$

Possiamo farlo diventare zero se prendiamo $\alpha$ in modo che

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}$$

con l'avvertenza di prendere $2\alpha = \pi/2$ quando $a_{11} = a_{22}$. Dunque, a meno di una rotazione degli assi, possiamo supporre che la conica sia definita dal polinomio

$$b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + 2b_{13}x + 2b_{23}y + b_{33}.$$

Possiamo anche calcolare esplicitamente $b_{11}$ e $b_{22}$:

$$\begin{aligned} b_{11} &= a_{11}\cos^2\alpha + 2a_{12}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + a_{22}\operatorname{sen}^2\alpha, \\ b_{22} &= a_{11}\operatorname{sen}^2\alpha - 2a_{12}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + a_{22}\cos^2\alpha. \end{aligned}$$

Eseguiamo il calcolo del discriminante nel caso generale (scriviamo $c = \cos\alpha$ e $s = \operatorname{sen}\alpha$ per brevità)

$$\begin{aligned}
b_{12}^2 - b_{11}b_{22} = {} & a_{12}^2 c^4 - 2a_{12}^2 c^2 s^2 + a_{12}^2 s^4 \\
& + 2a_{12}a_{22}c^3 s - 2a_{11}a_{12}c^3 s \\
& - 2a_{12}a_{22}cs^3 + 2a_{11}a_{12}cs^3 \\
& - a_{11}^2 c^2 s^2 + 2a_{11}a_{12}c^3 s - a_{11}a_{22}c^4 \\
& - 2a_{11}a_{12}cs^3 + 4a_{12}^2 c^2 s^2 - 2a_{12}a_{22}c^3 s \\
& - a_{11}a_{22}s^4 + 2a_{12}a_{22}s^3 c - a_{22}^2 c^2 s^2 \\
& + a_{22}^2 c^2 s^2 - 2a_{11}a_{22}c^2 s^2 + a_{11}^2 c^2 s^2 \\
= {} & a_{12}^2(c^4 + 2c^2 s^2 + s^4) - a_{11}a_{22}(c^4 + 2c^2 s^2 + s^4) \\
= {} & a_{12}^2 - a_{11}a_{22}
\end{aligned}$$

e quindi il discriminante resta invariato, come del resto ci aspettavamo.

**Una corrispondenza fra punti e rette.** Consideriamo una circonferenza. Da un punto esterno a essa conduciamo le due tangenti e associamo al punto la retta passante per i punti di contatto. Scriveremo la corrispondenza esplicitamente dopo aver eseguito un semplice calcolo trigonometrico, si veda la figura 4. Chiameremo la retta trovata *polare* del punto dato rispetto alla circonferenza.

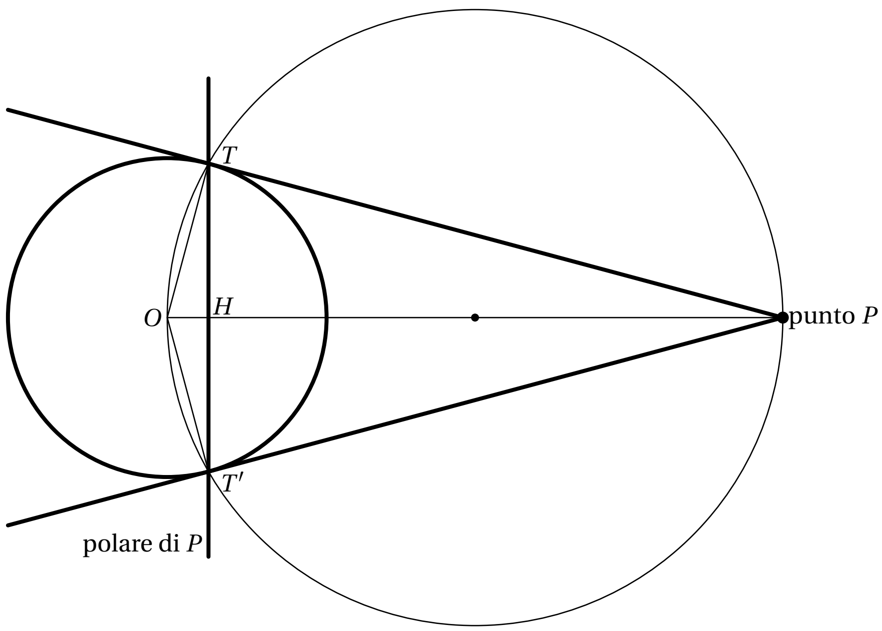


FIGURA 4: Costruzione della polare di un punto rispetto a una circonferenza

Siano $r$ il raggio della circonferenza e $d$ la distanza di $P$ dal centro $O$. Indichiamo con $T$ e $T'$ i punti di contatto e $H$ il punto di intersezione di $TT'$ con $OP$. Sia $\alpha$ l'angolo $TOP$: è immediato che $r = d\cos\alpha$.

Scegliamo il sistema di riferimento in modo che la circonferenza abbia centro nell'origine. Il punto $P$ abbia coordinate $(a,b)$ e sia $\beta$ l'angolo che la semiretta $OP$ forma con l'asse delle ascisse. Allora le coordinate di $T$ e $T'$ saranno

$$T(r\cos(\alpha+\beta), r\operatorname{sen}(\alpha+\beta)), \qquad T'(r\cos(\alpha-\beta), -r\operatorname{sen}(\alpha-\beta)).$$

Dunque la retta $TT'$ ha equazione

$$\frac{x-r\cos(\alpha+\beta)}{r\cos(\alpha-\beta)-r\cos(\alpha+\beta)} = \frac{y-r\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{-r\operatorname{sen}(\alpha-\beta)-r\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}.$$

Con semplici calcoli si verifica che il denominatore della prima frazione è $2r\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$, quello della seconda è $-2r\operatorname{sen}\alpha\cos\beta$ e dunque l'equazione diventa

$$(x-r\cos(\alpha+\beta))\cos\beta + (y-r\operatorname{sen}(\alpha+\beta))\operatorname{sen}\beta,$$

che possiamo anche scrivere

$$x\cos\beta + y\operatorname{sen}\beta - r(\cos(\alpha+\beta)\cos\beta + \operatorname{sen}(\alpha+\beta)\operatorname{sen}\beta) = 0$$

e la parentesi è $\cos\alpha$. Sappiamo però anche che $d\cos\beta = a$, $d\operatorname{sen}\beta = b$, $d\cos\alpha = r$ e quindi, moltiplicando per $d$, l'equazione diventa

$$ax+by-r^2=0.$$

Vediamo di ripetere la costruzione nel caso generale di una circonferenza di equazione

$$x^2+y^2+2lx+2my+n=0.$$

Con la traslazione $x = X-l$, $y = Y-m$, il punto di coordinate $(a,b)$ diventa $(a+l, b+m)$. L'equazione della circonferenza nel nuovo sistema è $X^2+Y^2+n-l^2-m^2$ e, per quanto visto prima, la polare ha equazione

$$(a+l)X+(b+m)Y+n-l^2-m^2=0.$$

Per ritornare nel precedente sistema di coordinate basta eseguire la sostituzione

$$(a+l)(x+l)+(b+m)(y+m)+n-l^2-m^2=0$$

trovando quindi

$$ax+by+l(a+x)+m(b+y)+n=0.$$

Nel caso in cui il punto $P$ stia sulla circonferenza, la costruzione non ha senso, ma possiamo darlo pensando di far avvicinare il punto lungo una certa retta: la posizione limite della polare è chiaramente la tangente.

In effetti, se $a^2+b^2=r^2$, la retta $ax+by-r^2=0$ è proprio la tangente alla circonferenza di equazione $x^2+y^2-r^2=0$. Lo possiamo verificare calcolandone la distanza dal centro:

$$\frac{|a0+b0-r^2|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{r^2}{r} = r.$$

Proviamo a svolgere lo stesso ragionamento considerando la parabola di equazione $y=x^2$. Un punto $P$ è esterno alla parabola quando da esso possiamo condurre le tangenti; se le sue coordinate sono $(a,b)$, la condizione è che $a^2-b>0$.

Il fascio di rette per $(a,b)$ ha equazione $y=m(x-a)+b$; la condizione di tangenza è che il polinomio

$$x^2-(m(x-a)+b) = x^2-mx+ma-b$$

abbia radici coincidenti, cioè che

$$m^2-4ma+4b=0.$$

Dunque le tangenti si ottengono per

$$m_1 = 2a+2\sqrt{a^2-b}, \qquad m_2 = 2a-2\sqrt{a^2-b}.$$

I due punti di tangenza sono allora

$$T(a+\sqrt{a^2-b}, 2a^2-b+2a\sqrt{a^2-b}), \qquad T'(a-\sqrt{a^2-b}, 2a^2-b-2a\sqrt{a^2-b}).$$

Possiamo scrivere l'equazione della retta $TT'$, ponendo $c=\sqrt{a^2-b}$:

$$\frac{x-(a+c)}{(a-c)-(a+c)} = \frac{y-(2a^2-b+2ac)}{(2a^2-b-2ac)-(2a^2-b+2ac)},$$

che diventa

$$2ax-2a^2-2ac = y-2a^2+b-2ac$$

cioè, in definitiva

$$ax-\frac{1}{2}(y+b)=0.$$

Anche qui, se il punto $(a,b)$ appartiene alla parabola, è facile verificare che l'equazione trovata è quella della tangente.

Come si vede esiste una regolarità nella determinazione della polare. Invece di dare una formula da imparare a memoria, possiamo trovare un sistema più generale.

Naturalmente è possibile anche definire una corrispondenza fra rette e punti: se una retta è secante a una circonferenza, il suo *polo* è il punto di cui la retta è polare; esso si ottiene come intersezione delle tangenti nei punti di intersezione. Se la retta è tangente, il suo polo è il punto di tangenza.

Non tutte le secanti alla circonferenza però ammettono un polo: se infatti la retta passa per il *centro*, le tangenti nei punti di intersezione sono *parallele*.

Un fatto analogo accade con la parabola: se consideriamo una retta parallela all'asse, questa ha in comune con la parabola solo un punto e quindi non possiamo costruirne il polo.

Rimaniamo con la circonferenza di centro nell'origine e raggio $r$. Consideriamo la retta di equazione $x=h$, con $0<h<1$. Il suo polo rispetto alla circonferenza è il punto di coordinate $(a,b)$ tali che la retta

$$ax+by-r^2=0$$

sia la retta $x-h=0$; quindi dobbiamo avere $b=0$ e $r^2/a=h$, cioè $a=r^2/h$. Quando $h$ diventa piccolo, il polo si allontana sempre di più sulla semiretta positiva delle ascisse, come un semplice disegno renderà chiaro.

Nel caso della parabola, prendiamo il fascio di rette per il punto $(0,1)$, che scriveremo come:

$$x=k(y-1)$$

perché vogliamo considerare specificamente la retta $x=0$. Quando $k\neq 0$, il polo di questa retta ha coordinate $(a,b)$ tali che la retta $x-ky+k=0$ sia $ax-(b+y)/2=0$, cioè $a=1/2k$ e $b=-1$. Se $k$ si avvicina a zero per valori positivi, il polo si allontana assumendo ascisse sempre maggiori. Se $k$ si avvicina a zero per valori negativi, il polo si allontana dalla parte opposta.

Questo ci dà l'intuizione che alla retta "manchi un punto", al quale ci si "avvicina" allontanandosi in ognuno dei due versi. Il punto "mancante" dovrà essere in comune fra la retta e tutte le sue parallele, come mostra l'esempio della circonferenza (variando il raggio possiamo ottenere tutte le parallele all'asse delle ascisse).

# 2. Punti impropri

L'esperienza della "necessità di incontro" fra rette parallele è nota fin dai primi studi della prospettiva. Quando si rappresenta una scena su un quadro, rette che nella realtà sono parallele devono diventare concorrenti. Osservando dipinti trecenteschi o precedenti, si nota come la prospettiva sia "sbagliata"; non lo era per chi vedeva il dipinto all'epoca, la sensibilità era diversa. A partire dal Quattrocento si impose un nuovo modo di rappresentare la realtà con l'introduzione della prospettiva studiata matematicamente; grande impulso a questi studi fu dato per esempio da Piero della Francesca, autore di un famoso trattato di prospettiva, *De prospectiva pingendi*. Giacché ci siamo, ricordiamo che Piero morì in un giorno molto famoso, il 12 ottobre 1492.

Ci vollero però molti anni prima che la prospettiva diventasse essa stessa oggetto di studio matematico, uno dei casi in cui un'applicazione dà impulso alla teoria. Fu l'opera principalmente di Desargues e poi di molti altri. Il punto fondamentale fu l'introduzione di un sistema di coordinate che rendeva possibile trattare i "punti impropri" allo stesso modo di quelli propri.

Consideriamo una retta di equazione $\xi_1 x + \xi_2 y + \xi_3 = 0$, dove almeno uno fra $\xi_1$ e $\xi_2$ è non nullo. Un punto di coordinate $(a, b)$ appartiene alla retta se e solo se

$$\xi_1 a + \xi_2 b + \xi_3 = 0$$

cioè, usando il prodotto di matrici, se e solo se

$$[\xi_1\ \xi_2\ \xi_3] \begin{bmatrix} a \\ b \\ 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Ma allo stesso risultato si arriva considerando la colonna

$$\begin{bmatrix} a\rho \\ b\rho \\ \rho \end{bmatrix}$$

per qualunque $\rho \neq 0$. Facciamo allora la convenzione che una matrice $3 \times 1$ rappresenti un punto del piano: alla matrice

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

associamo il punto $(a_1/a_3, a_2/a_3)$ (purché $a_3 \neq 0$). Un punto quindi può avere diverse matrici che lo rappresentano.

Una retta $\xi_1 x + \xi_2 y + \xi_3 = 0$ è analogamente determinata dai tre coefficienti, ancora a meno di una costante moltiplicativa. Se formiamo la riga con questi coefficienti, troviamo che il punto

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

appartiene alla retta $[\xi_1\ \xi_2\ \xi_3]$ se e solo se

$$[\xi_1\ \xi_2\ \xi_3] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3 = 0$$

e che ciò non dipende da eventuali costanti moltiplicative sia per la retta che per il punto.

Ci sono però le eccezioni: le colonne con 0 all'ultimo posto non rappresentano un punto; le righe con due zeri ai primi due posti non rappresentano una retta.

Facciamo allora il passo decisivo: un *punto del piano proiettivo* è determinato da una colonna $3 \times 1$ in cui non tutti i coefficienti sono nulli; due colonne che differiscano per una costante moltiplicativa (non nulla) rappresentano lo stesso punto.

Per esempio,

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ sono lo stesso punto.}$$

Un punto $[a_1\ a_2\ a_3]^T$ (si usa questa convenzione per risparmiare spazio) si dice *improprio* se $a_3 = 0$; questo non dipende dalla particolare rappresentazione del punto. Gli altri punti si dicono *propri*.

Una *retta del piano proiettivo* è determinata da una riga in cui non tutti i coefficienti sono nulli; due righe che differiscano per una costante moltiplicativa (non nulla) rappresentano la stessa retta. La particolare retta $[0\ 0\ 1]$ si chiama *retta impropria*; per come abbiamo definito le cose, la retta $[0\ 0\ c]$ (con $c \neq 0$) è la stessa retta. Le altre rette si dicono *proprie*.

Diremo che il punto $[a_1\ a_2\ a_3]^T$ *appartiene alla retta* $[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3]$ (o anche che la retta *passa* per il punto) quando

$$[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = 0.$$

**Proposizione 1.** *A ogni retta non impropria appartiene uno e un solo punto improprio. Un punto appartiene alla retta impropria se e solo se è improprio.*

*Dimostrazione.* Se la retta $[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3]$ è propria, uno fra $\alpha_1$ e $\alpha_2$ non è nullo. Vediamo il caso di $\alpha_2 \neq 0$, l'altro è analogo.

La retta data è allora $[\beta_1\ 1\ \beta_3]$, dove $\beta_1 = \alpha_1/\alpha_2$ e $\beta_3 = \alpha_3/\alpha_2$. Un punto improprio $[a_1\ a_2\ 0]^T$ appartiene a questa retta se e solo se

$$[\beta_1\ 1\ \beta_3] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{bmatrix} \beta_1 a_1 + a_2 + \beta_3 0 = \beta_1 a_1 + a_2 = 0,$$

cioè se e solo se $a_2 = -\beta_1 a_1$ e questa condizione determina dunque un unico punto (improprio).

È facile vedere anche quando un punto $[a_1\ a_2\ a_3]^T$ appartiene alla retta impropria:

$$[0\ 0\ 1] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = a_3$$

è zero se e solo se $a_3 = 0$. □

Vogliamo ora capire come distinguere due punti; più precisamente, dati i punti $[a_1\ a_2\ a_3]^T$ e $[b_1\ b_2\ b_3]^T$, quando sono distinti.

Dire che sono lo stesso punto significa che esiste $\rho \neq 0$ tale che

$$b_1 = \rho a_1, \quad b_2 = \rho a_2, \quad b_3 = \rho a_3.$$

In questo caso

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0, \quad a_2 b_3 - a_3 b_2 = 0, \quad a_3 b_1 - a_1 b_3 = 0.$$

Viceversa, supponiamo che questi tre numeri siano zero. Mettiamoci nel caso $b_3 \neq 0$: allora, ponendo $b_1' = b_1/b_3$ e $b_2' = b_2/b_3$, otteniamo

$$a_1 = a_0 b_1', \quad a_2 = a_0 b_2'.$$

Dunque non può essere $a_3 = 0$ e quindi poniamo $a_1' = a_1/a_3$ e $a_2' = a_2/a_3$. Dunque $a_1' = b_1'$ e $a_2' = b_2'$. Se $\rho = b_3/a_3$, abbiamo $b_1 = \rho a_1$ e $b_2 = \rho a_2$, oltre che $b_3 = \rho a_3$. Quindi le due colonne rappresentano lo stesso punto.

Nel caso di $b_3 = 0$, abbiamo

$$a_3 b_1 = 0, \quad a_3 b_2 = 0.$$

Se fosse $a_3 \neq 0$, avremmo $b_1 = b_2 = 0$, che è impossibile. Quindi $a_3 = 0$. Se $b_1 = 0$, è $a_1 b_2 = 0$, che dà $a_1 = 0$; dunque i punti sono rappresentati da $[0\ a_2\ 0]^T$ e $[0\ b_2\ 0]^T$, cioè sono lo stesso. Se $b_1 \neq 0$ abbiamo

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$$

e, di nuovo, le colonne rappresentano lo stesso punto.

Se $A$ e $B$ sono punti distinti del piano, rappresentati dalle colonne $[a_1\ a_2\ a_3]^T$ e $[b_1\ b_2\ b_3]^T$, possiamo allora associare a essi la riga $[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3]$ dove

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= a_2 b_3 - a_3 b_2,\\
\alpha_2 &= a_0 b_1 - a_1 b_0,\\
\alpha_3 &= a_1 b_2 - a_2 b_1.
\end{aligned}$$

Questa riga rappresenta una retta, per quanto visto prima. Proviamo a calcolare

$$\begin{aligned}
[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3]\begin{bmatrix} a_1\\ a_2\\ a_3\end{bmatrix} &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) a_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) a_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) a_3\\
&= a_2 b_3 a_1 - a_3 b_2 a_1 + a_3 b_1 a_2 - a_1 b_3 a_2 + a_1 b_2 a_3 - a_2 b_1 a_3\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Quindi il primo punto appartiene alla retta e, analogamente, anche il secondo.

Abbiamo allora dimostrato una parte dell'enunciato seguente, che dovrebbe essere espresso come "dati due punti distinti esiste una e una sola retta che passa per entrambi". Useremo un linguaggio forse impreciso, ma più intuitivo.

**Teorema 2.** *Per due punti distinti passa una e una sola retta.*

*Dimostrazione.* Abbiamo già dimostrato che una retta che passa per due punti distinti esiste. Supponiamo ora che la retta $[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3]$ passi per i punti distinti $[a_1\ a_2\ a_3]^T$ e $[b_1\ b_2\ b_3]^T$.

Allora la terna di valori $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ è una soluzione del sistema

$$\begin{cases} a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0\\ b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0\end{cases}$$

ed è solamente noioso verificare che ogni soluzione di questo sistema è della forma

$$x_1 = \rho\alpha_1, \quad x_2 = \rho\alpha_2, \quad x_0 = \rho\alpha_0,$$

per un opportuno numero $\rho$. □

I calcoli eseguiti per i punti possono facilmente essere ripetuti per le rette: due rette rappresentate da $[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3]$ e $[\beta_1\ \beta_2\ \beta_3]$ sono la stessa retta se e solo se

$$\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 = 0, \quad \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3 = 0, \quad \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 0.$$

Se le rette sono distinte, il punto $[a_1\ a_2\ a_3]^T$, dove

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2, \\ a_2 &= \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3, \\ a_3 &= \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1, \end{aligned}$$

è l'unico punto che appartiene a entrambe.

**Teorema 3.** *Date due rette distinte, esiste uno e un solo punto che appartiene a entrambe.*

Supponiamo che le due rette siano proprie; in tal caso esse corrispondono a due rette del piano usuale. Vediamo che cosa significa che il punto (unico) che hanno in comune sia improprio:

$$\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 0.$$

Questa è esattamente la condizione di parallelismo nota dalla geometria analitica per le rette di equazione

$$\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 = 0, \quad \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 = 0.$$

Dunque "abbiamo trovato" i punti dove "le rette parallele si incontrano": sono esattamente i punti impropri. Abbiamo aggiunto ai punti del piano usuale solo quelli che servono a garantire un punto in comune a due qualsiasi rette parallele distinte. Questi punti formano una retta del piano proiettivo.

Come fare per ricordare la formula della retta passante per due punti? Diciamo che le terne $(1,2,3)$, $(3,1,2)$, $(2,3,1)$ sono in *ordine ciclico*. Allora le tre uguaglianze

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a_2 b_3 - a_3 b_2, \\ \alpha_2 &= a_3 b_1 - a_1 b_3, \\ \alpha_3 &= a_1 b_2 - a_2 b_1, \end{aligned}$$

si ricordano scrivendo i possibili ordini ciclici.

Da questo momento seguiremo una convenzione: lettere latine scritte come $\boldsymbol{a}$ rappresentano la colonna

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

mentre lettere greche scritte come $\boldsymbol{\alpha}$ rappresentano la riga

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix}.$$

Altra convenzione: $\widehat{\boldsymbol{a}}$ indica il punto rappresentato da $\boldsymbol{a}$, mentre $\widehat{\boldsymbol{\alpha}}$ indica la retta rappresentata da $\boldsymbol{\alpha}$.

**Proposizione 4.** *Dati i due punti distinti $\widehat{\boldsymbol{a}}$ e $\widehat{\boldsymbol{b}}$, i punti appartenenti alla retta per $\widehat{\boldsymbol{a}}$ e $\widehat{\boldsymbol{b}}$ sono tutti e soli quelli rappresentati da $s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$, per $s, t \in \mathbb{R}$.*

*Dimostrazione* [*AL*]. Per comprendere questa dimostrazione occorre ricordare l'algebra lineare. Sia $\boldsymbol{\alpha}$ la riga che rappresenta la retta indicata. Allora una colonna $\boldsymbol{c}$ definisce un punto della retta se e solo se $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{c} = 0$, cioè se e solo se $\boldsymbol{c}$ appartiene allo spazio nullo di $\boldsymbol{\alpha}$; questo ha dimensione 2. Siccome conosciamo già due elementi linearmente indipendenti di questo sottospazio, precisamente $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, ogni altro elemento ne è combinazione lineare. □

Questo risultato fornisce quella che si può chiamare *equazione parametrica* della retta per $\widehat{\boldsymbol{a}}$ e $\widehat{\boldsymbol{b}}$.

Date tre colonne $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ possiamo domandarci quale sia la condizione affinché i tre punti da esse determinati siano allineati (cioè la retta per due di essi passi per il terzo). L'algebra lineare ci viene ancora in aiuto.

**Proposizione 5.** *I punti* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *e* $\boldsymbol{c}$ *sono allineati se e solo se*

$$\det[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}] = 0.$$

*Dimostrazione* [*AL*]. Questa è esattamente la condizione affinché la terza colonna sia combinazione lineare delle prime due. □

Per esempio, verifichiamo che i tre punti definiti da

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

sono allineati. Infatti, sviluppando secondo la prima colonna,

$$\begin{aligned} \det\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -1 & 3 & -7 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} &= (-1)^{1+1}\cdot 1\cdot\det\begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + \\ &\quad (-1)^{2+1}\cdot(-1)\cdot\det\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + \\ &\quad (-1)^{3+1}\cdot 2\cdot\det\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -7 \end{bmatrix} \\ &= (12-7) + (-8+5) + 2(14-15) \\ &= 5-3+2 = 0. \end{aligned}$$

Analogamente, la condizione affinché tre rette $\widehat{\boldsymbol{\alpha}}$, $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ e $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}$ passino per un punto è che

$$\det\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} = 0.$$

# 3. Proiettività

Una matrice invertibile $3 \times 3$ definisce un'applicazione biiettiva del piano proiettivo in sé. Se la matrice è $\mathbf{C}$, possiamo infatti definire l'applicazione

$$\widehat{\boldsymbol{a}} \mapsto \widehat{\mathbf{C}\boldsymbol{a}}.$$

Infatti questo non dipende dalla particolare colonna che rappresenta il punto $\widehat{\boldsymbol{a}}$. Una tale applicazione è biiettiva, perché l'inversa è data dalla matrice $\mathbf{C}^{-1}$.

È ovviamente interessante vedere quando una matrice definisce l'applicazione identità. Ciò accade se e solo se, per ogni $\boldsymbol{v}$, esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che $\mathbf{C}\boldsymbol{v} = t\boldsymbol{v}$.

In particolare dobbiamo avere

$$\mathbf{C}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = t_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = t_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = t_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

Se scriviamo $\mathbf{C} = [\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]$, questo significa

$$\boldsymbol{a} = t_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = t_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = t_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

Quindi

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix}t_1 & 0 & 0\\0 & t_2 & 0\\0 & 0 & t_3\end{bmatrix}.$$

Ma deve essere anche

$$\mathbf{C}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = s\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},$$

da cui $s = t_1 = t_2 = t_3 \neq 0$. Dunque una matrice $\mathbf{C}$ definisce l'identità se e solo se è *scalare*. Perciò due matrici $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ definiscono la stessa applicazione se e solo se $\mathbf{D}\mathbf{C}^{-1}$ è una matrice scalare, cioè se e solo se esiste $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$, tale che

$$\mathbf{D} = t\mathbf{C}.$$

Un'applicazione di questo tipo si chiama *proiettività*. Una proiettività che mandi punti propri in punti propri si chiama *affinità*. Indicheremo con $f_{\mathbf{C}}$ la proiettività definita dalla matrice $\mathbf{C}$.

Sia $f_{\mathbf{C}}$ una proiettività e siano $\widehat{\boldsymbol{a}}$, $\widehat{\boldsymbol{b}}$ e $\widehat{\boldsymbol{c}}$ allineati. Dimostriamo allora che $f_{\mathbf{C}}(\widehat{\boldsymbol{a}})$, $f_{\mathbf{C}}(\widehat{\boldsymbol{b}})$ e $f_{\mathbf{C}}(\widehat{\boldsymbol{c}})$ sono allineati.

Infatti, da $\boldsymbol{c} = s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$ segue che

$$\mathbf{C}\boldsymbol{c} = \mathbf{C}(s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}) = s(\mathbf{C}\boldsymbol{a}) + t(\mathbf{C}\boldsymbol{b}).$$

Possiamo enunciare quanto detto nel modo seguente.

**Proposizione 6.** *Una proiettività conserva l'allineamento tra punti. In particolare i corrispondenti dei punti di una retta sono i punti di una retta.*

Se $\widehat{\boldsymbol{\alpha}}$ è una retta, qual è la retta costituita dai corrispondenti tramite $f_{\mathbf{C}}$ dei punti di $\widehat{\boldsymbol{\alpha}}$?

Indichiamo con $\boldsymbol{\beta}$ una riga che definisca questa retta. Allora, per ogni punto $\widehat{\boldsymbol{a}}$ di $\widehat{\boldsymbol{\alpha}}$ dobbiamo avere

$$\boldsymbol{\beta}\mathbf{C}\boldsymbol{a} = 0.$$

Perciò ogni punto di $\widehat{\boldsymbol{\alpha}}$ appartiene alla retta definita dalla riga $\boldsymbol{\beta}\mathbf{C}$ e quindi le righe $\boldsymbol{\beta}\mathbf{C}$ e $\boldsymbol{\alpha}$ definiscono la stessa retta. Di conseguenza esiste $\rho \neq 0$ tale che

$$\boldsymbol{\beta}\mathbf{C} = \rho\boldsymbol{\alpha}$$

che è come dire

$$\boldsymbol{\beta} = \rho\boldsymbol{\alpha}\mathbf{C}^{-1}.$$

Dunque possiamo dire che la matrice $\mathbf{C}^{-1}$ definisce un'applicazione dell'insieme delle rette in sé, che è legata alla proiettività dalla relazione di appartenenza. Se indichiamo con $f'_{\mathbf{C}}$ questa applicazione, abbiamo che

$$\widehat{\boldsymbol{a}} \text{ appartiene a } \widehat{\boldsymbol{\alpha}} \text{ se e solo se } f_{\mathbf{C}}(\widehat{\boldsymbol{a}}) \text{ appartiene a } f'_{\mathbf{C}}(\widehat{\boldsymbol{\alpha}}).$$

Una proiettività $f_{\mathbf{C}}$ è dunque un'affinità se e solo se la corrispondente della retta impropria è la retta impropria. Dunque dobbiamo avere

$$[0\ 0\ 1]\mathbf{C}^{-1} = t[0\ 0\ 1]$$

per un $t \neq 0$. Questo è lo stesso che dire

$$[0\ 0\ 1]\mathbf{C} = \rho[0\ 0\ 1]$$

(per $\rho = t^{-1}$). Dunque $\mathbf{C}$ deve essere della forma

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & \rho \end{bmatrix}$$

e, per l'invarianza rispetto a costanti moltiplicative, possiamo supporre $\rho = 1$. La condizione che $\mathbf{C}$ sia invertibile è che

$$\det\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \neq 0.$$

Se consideriamo un punto proprio definito dalla colonna $[x\ \ y\ \ 1]^T$, il suo corrispondente tramite un'affinità sarà allora il punto definito da

$$\begin{bmatrix} c_{11}x + c_{12}y + c_{13} \\ c_{21}x + c_{22}y + c_{23} \\ \rho \end{bmatrix}$$

e questo coincide con il corrispondente del punto di coordinate $(x, y)$ tramite un'affinità del piano usuale.

Una proiettività, come abbiamo visto, è determinata dalla sua azione sui quattro punti definiti dalle colonne

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Infatti una proiettività che manda ciascuno di questi in sé stesso è l'identità. Questi quattro punti hanno la proprietà che tre qualunque di essi non sono allineati. Data una proiettività, i loro corrispondenti hanno la stessa proprietà.

**Teorema 7.** *Dati quattro punti $\widehat{\boldsymbol{a}}_1$, $\widehat{\boldsymbol{a}}_2$, $\widehat{\boldsymbol{a}}_3$ e $\widehat{\boldsymbol{v}}$ a tre a tre non allineati, esiste un'unica proiettività $f_{\mathbf{C}}$ tale che*

$$f_{\mathbf{C}}(\widehat{\boldsymbol{e}}_1) = \widehat{\boldsymbol{a}}_1, \quad f_{\mathbf{C}}(\widehat{\boldsymbol{e}}_2) = \widehat{\boldsymbol{a}}_2, \quad f_{\mathbf{C}}(\widehat{\boldsymbol{e}}_3) = \widehat{\boldsymbol{a}}_3, \quad f_{\mathbf{C}}(\widehat{\boldsymbol{u}}) = \widehat{\boldsymbol{v}}.$$

*Dimostrazione* [*AL*]. L'unicità è chiara: se due proiettività hanno questa proprietà, la composizione della prima con l'inversa della seconda è l'identità.

Vogliamo trovare allora una matrice **C** tale che

$$\mathbf{C}\boldsymbol{e}_1 = t_1\boldsymbol{a}_1, \quad \mathbf{C}\boldsymbol{e}_2 = t_2\boldsymbol{a}_2, \quad \mathbf{C}\boldsymbol{e}_3 = t_3\boldsymbol{a}_3, \quad \mathbf{C}\boldsymbol{u} = t\boldsymbol{v}.$$

Le prime tre proprietà dicono che

$$\mathbf{C} = [t_1\boldsymbol{a}_1 \ t_2\boldsymbol{a}_2 \ t_3\boldsymbol{a}_3].$$

Ora

$$\mathbf{C}\boldsymbol{v} = t_1\boldsymbol{a}_1 + t_2\boldsymbol{a}_2 + t_3\boldsymbol{a}_3$$

quindi dobbiamo verificare che esistono $t_1$, $t_2$, $t_3$ e $t$ tali che

$$t_1\boldsymbol{a}_1 + t_2\boldsymbol{a}_2 + t_3\boldsymbol{a}_3 = t\boldsymbol{v}.$$

Questo è un sistema lineare che ha soluzione (unica) per ogni $t$, in quanto $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ e $\boldsymbol{a}_3$ sono linearmente indipendenti, essendo non allineati. $\square$

# 4. Cambiamenti di coordinate

Come un'affinità del piano può essere considerata un cambiamento di coordinate, anche una proiettività ammette questa interpretazione. Solo che, in questo caso, punti propri possono diventare impropri e viceversa.

Ciò non dovrebbe sorprendere: mettiamoci nello spazio e consideriamo il piano $\pi$ parallelo all'asse $z$ contenente la retta del piano $xy$ di equazione $x = -1$. Definiamo una funzione dal piano $xy$ al piano $\pi$ nel modo seguente:

- dato il punto $(a, b, 0)$, tracciamo la retta per esso e per il punto $(0, 0, 1)$;
- associamo al punto $(a, b, 0)$ il punto di intersezione fra questa retta e il piano $\pi$.

Ovviamente questa funzione non è definita ovunque. Proviamo a calcolare.

La retta deve avere la forma parametrica

$$\begin{cases} x = \alpha t \\ y = \beta t \\ z = 1 + \gamma t \end{cases}$$

e il passaggio per $(a, b, 0)$ impone

$$\begin{cases} t = a/\alpha \\ t = b/\beta \\ t = -1/\gamma \end{cases}$$

cioè, prendendo $\gamma = 1$, $\beta = -b$ e $\alpha = -a$. L'equazione del piano $\pi$ è $x = -1$, dunque il punto di intersezione fra la retta e $\pi$ si ottiene per $-at = -1$, cioè $t = 1/a$; questo dà $y = -b/a$ e $z = (a+1)/a$. I punti che non hanno immagine sono ovviamente quelli dell'asse $y$.

Possiamo però interpretare questa funzione come una funzione dal piano in sé:

$$(a, b) \mapsto \left(-\frac{b}{a}, \frac{a+1}{a}\right).$$

Passando a coordinate omogenee, cioè alle colonne associate ai punti, vediamo che questa si scrive

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -b \\ a+1 \\ a \end{bmatrix}$$

ma anche

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -a_2 \\ a_1 + a_3 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

e questa ha senso per ogni punto del piano proiettivo. Di fatto è una proiettività, definita dalla matrice

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

In essa i punti dell'asse $y$ vanno in punti impropri, mentre i punti impropri vanno in punti della retta (propria) di equazione $y = 1$.

È sempre interessante vedere qual è la funzione inversa. Ora,

$$(A, B) = \left(-\frac{b}{a}, \frac{a+1}{a}\right)$$

se e solo se $b = -aA$ e $a(B-1) = 1$, cioè $a = 1/(B-1)$ e $b = -A/(B-1)$.

Vediamo come si trasforma la parabola di equazione $2x = y^2 - 1$. Sia $(A, B)$ un punto del piano; esso è il trasformato di un punto della parabola se e solo se

$$\frac{2}{B-1} = \frac{A^2}{(B-1)^2} - 1$$

cioè

$$2(B-1) = A^2 - 1 + 2B - B^2$$

che equivale alla curva di equazione

$$Y^2 - X^2 = 1,$$

che è un'iperbole (si provi a verificare la trasformazione con un disegno).

# 5. Polarità

Una conica si può scrivere, in coordinate omogenee, come l'insieme dei punti $[x_1\ x_2\ x_3]^T$ tali che

$$d_{11}x_1^2 + 2d_{12}x_1x_2 + d_{22}x_2^2 + 2d_{13}x_1x_3 + 2d_{23}x_2x_3 + d_{33}x_3^2 = 0.$$

Ponendo $d_{31} = d_{13}$, $d_{32} = d_{23}$ e $d_{21} = d_{12}$, questa condizione si può scrivere

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0.$$

La matrice simmetrica scritta sopra è la *matrice della conica*. Per esempio, se la conica è la circonferenza $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$, la matrice è

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Il punto $(1,5)$ appartiene alla circonferenza; in coordinate omogenee si scrive $[1\ 5\ 1]^T$. Calcoliamo

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{D} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 3x_2 - 15x_3.$$

Se vediamo questa come una retta, essa, scritta in coordinate cartesiane è la retta $y = 5$, che è proprio la tangente alla circonferenza in $(1,5)$.

È un caso? Naturalmente no.

Possiamo definire un'applicazione $p_{\mathbf{D}}$ dall'insieme dei punti del piano proiettivo all'insieme delle rette proiettive nel modo seguente: al punto $\widehat{\boldsymbol{a}}$ associamo la retta definita da $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{a}^T\mathbf{D}$. Questa retta si chiama *polare* del punto $\widehat{\boldsymbol{a}}$.

In realtà abbiamo un po' barato: affinché queste siano vere funzioni dobbiamo assumere che, per ogni $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$, si abbia $\boldsymbol{a}^T\mathbf{D} \neq \mathbf{0}$ e questo accade quando $\mathbf{D}$ ha rango 3.

Vedremo che cosa succede quando il rango della matrice è minore di 3. Per il momento assumeremo che il rango sia proprio 3.

Quali sono i punti che appartengono alla propria polare? Esattamente quelli della conica: il punto definito da $\boldsymbol{a}$ appartiene alla polare se e solo se

$$\boldsymbol{a}^T\mathbf{D}\boldsymbol{a} = 0,$$

cioè se e solo se appartiene alla conica.

**Proposizione 8.** *Data la conica definita dalla matrice* $\mathbf{D}$ *e un punto* $\widehat{\boldsymbol{a}}$ *appartenente alla conica, la polare di questo punto incontra la conica solo in* $\widehat{\boldsymbol{a}}$.

*Dimostrazione* [*AL*]. Supponiamo che il punto definito da $\boldsymbol{b}$ appartenga sia alla conica che alla polare di $\boldsymbol{a}$: allora

$$\boldsymbol{a}^T\mathbf{D}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^T\mathbf{D}\boldsymbol{b} = 0$$

e quindi

$$\boldsymbol{a}^T\mathbf{D}(s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}) = 0,$$

per ogni $s$ e $t$. Inoltre $\boldsymbol{b}^T\mathbf{D}\boldsymbol{b} = 0$, quindi

$$(s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b})^T\mathbf{D}\boldsymbol{b} = 0;$$

trasponendo e ricordando che $\mathbf{D}$ è simmetrica, abbiamo

$$\boldsymbol{b}^T\mathbf{D}(s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}) = 0.$$

Se poniamo $\boldsymbol{c} = \mathbf{D}(s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b})$, abbiamo dunque

$$\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{c} = 0, \qquad \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{c} = 0.$$

Se supponiamo che $\widehat{\boldsymbol{a}}$ e $\widehat{\boldsymbol{b}}$ siano distinti (cioè che $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ siano linearmente indipendenti), avremmo che la matrice

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}^T \\ \boldsymbol{b}^T \end{bmatrix}$$

ha lo spazio nullo di dimensione $\geq 2$: assurdo, perché questa matrice ha rango 2. □

Quindi $\widehat{\boldsymbol{a}} = \widehat{\boldsymbol{b}}$: la polare di un punto della conica ha un solo punto in comune con la conica stessa. È dunque la *tangente* in quel punto.

Per esempio, calcoliamo la tangente alla conica $y = x^2 + 3x + 2$ nel punto $(1, 6)$. Scritta in coordinate omogenee la conica è

$$x_1^2 + 3x_1x_3 - x_2x_3 + 2x_3^2$$

e la matrice è

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 3/2 & -1/2 & 2 \end{bmatrix}$$

e quindi la polare del punto $[1\ 6\ 1]^T$ è

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 3/2 & -1/2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

che corrisponde alla retta

$$\frac{5}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} = 0$$

cioè

$$y = 5x + 1.$$

Proviamo con il metodo usuale. Una retta per $(1, 6)$ si scrive come

$$y - 6 = m(x - 1).$$

L'intersezione con la conica si ottiene con l'equazione

$$mx - m + 6 = x^2 + 3x + 2$$

che in forma normale è

$$x^2 + (3 - m)x + m - 4 = 0$$

il cui discriminante è

$$(3 - m)^2 - 4(m - 4) = m^2 - 10m + 25 = (m - 5)^2$$

che si annulla per $m = 5$. Dunque la tangente ha equazione $y = 5(x - 1) + 6$, cioè $y = 5x + 1$.

Come altro esempio, consideriamo l'iperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

In coordinate omogenee possiamo scrivere

$$\frac{1}{a^2}x_1^2 - \frac{1}{b^2}x_2^2 - x_3^2 = 0$$

e quindi la matrice è

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/b^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Esistono due punti impropri che soddisfano questa equazione: $[a\ b\ 0]^T$ e $[a\ {-b}\ 0]^T$. Calcoliamo la polare del primo:

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/b^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/a & -1/b & 0 \end{bmatrix}$$

che dà la retta $x/a - y/b = 0$, che si riconosce essere un asintoto dell'iperbole. Gli asintoti sono esattamente le tangenti nei punti impropri.

Qual è il punto improprio della parabola $y = ax^2$? In coordinate omogenee è $x_2x_3 - ax_1^2 = 0$, quindi il punto è $[0\ 1\ 0]^T$. La tangente nel punto improprio è

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

che è la retta impropria, in accordo con l'intuizione che una parabola non ha asintoti.

Nemmeno una circonferenza o, più in generale, un'ellisse ha asintoti, ma per un motivo diverso: non ci sono soluzioni reali dell'equazione che dà i punti impropri, come si può verificare con qualche esempio.

Per tornare alla polare, questa ha un significato legato alle tangenti per ogni punto *esterno*: diciamo che un punto è esterno a una conica se per esso passano due tangenti alla conica. Così abbiamo diviso i punti del piano in tre sottoinsiemi disgiunti: i punti della conica, i punti esterni e i punti interni.

Una retta non può incontrare una conica in più di due punti, perché l'equazione che risulta ha grado due (o uno, se una intersezione è un punto improprio).

Supponiamo che la polare del punto $\widehat{\boldsymbol{a}}$ incontri la conica in due punti distinti (propri o impropri) $\widehat{\boldsymbol{x}}$ e $\widehat{\boldsymbol{y}}$. Sappiamo già che in questo caso $\widehat{\boldsymbol{a}}$ non appartiene alla conica; quindi

$$\boldsymbol{a}^T D\boldsymbol{a} \neq 0, \quad \boldsymbol{x}^T D\boldsymbol{x} = 0, \quad \boldsymbol{y}^T D\boldsymbol{y} = 0, \quad \boldsymbol{a}^T D\boldsymbol{x} = 0, \quad \boldsymbol{a}^T D\boldsymbol{y} = 0.$$

Le ultime due uguaglianze valgono perché $\widehat{\boldsymbol{x}}$ e $\widehat{\boldsymbol{y}}$ appartengono alla polare di $\widehat{\boldsymbol{a}}$. La retta per $\widehat{\boldsymbol{a}}$ e $\widehat{\boldsymbol{x}}$ è formata dai punti definiti dalle colonne $s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{x}$; un tale punto appartiene alla conica se e solo se

$$0 = (s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{x})^T D(s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{x}) = s^2(\boldsymbol{a}^T D\boldsymbol{a}) + 2st(\boldsymbol{a}^T D\boldsymbol{x}) + t^2(\boldsymbol{x}^T D\boldsymbol{x}) = s^2(\boldsymbol{a}^T D\boldsymbol{a})$$

cioè se e solo se $s = 0$. Dunque questa retta ha solo un punto in comune con la conica: è proprio una tangente passante per $\widehat{\boldsymbol{a}}$. L'altra è la retta per $\widehat{\boldsymbol{a}}$ e $\widehat{\boldsymbol{y}}$.

**Proposizione 9.** *Se $\widehat{\boldsymbol{a}}$ è esterno alla conica, le due rette che uniscono $\widehat{\boldsymbol{a}}$ alle intersezioni della polare di $\widehat{\boldsymbol{a}}$ con la conica sono le tangenti alla conica passanti per $\widehat{\boldsymbol{a}}$.*

L'applicazione $p_{\mathbf{D}}$ è biiettiva, perché la sua inversa si ottiene considerando $\mathbf{D}^{-1}$: alla retta $\widehat{\alpha}$ si associa il punto $\mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{\alpha}^T$.

Perciò ogni retta è la polare di un unico punto, detto il suo *polo*.

Dunque la retta impropria è la polare di un unico punto del piano. Ci sono due casi:

(1) la retta impropria è tangente alla conica;
(2) la retta impropria non è tangente alla conica.

Nel primo caso diciamo che la conica è una *parabola*, nel secondo diciamo che la conica è *a centro*.

Per le coniche a centro distinguiamo due casi:

(1) se il polo della retta impropria è esterno, la conica è un'*iperbole*;
(2) se il polo della retta impropria è interno, la conica è un'*ellisse*.

Per esempio, consideriamo la circonferenza $x^2+y^2-2x-4y-4=0$. Un punto $[a_1\ a_2\ a_3]^T$ è il polo della retta impropria se e solo se

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 - a_3 \\ a_2 - 2a_3 \\ -a_1 - 2a_2 - 4a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{bmatrix}$$

per $k \neq 0$. Questo succede se e solo se $a_1 = a_3$ e $a_2 = 2a_3$, e, per $a_3 = 1$, otteniamo il punto

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

che, in coordinate cartesiane, è proprio $(1,2)$, il centro della circonferenza. In questo caso $k = -4-1-4 = -9$.

Come cambia l'equazione di una conica quando eseguiamo un cambiamento di coordinate, cioè usando una proiettività?

Sia $\mathbf{C}$ la matrice della proiettività e chiamiamo $\mathbf{E}$ la matrice della conica nel nuovo sistema di coordinate. Un punto $\widehat{\boldsymbol{b}} = f_{\mathbf{C}}(\widehat{\boldsymbol{a}})$ soddisfa $\boldsymbol{b}^T\mathbf{E}\boldsymbol{b} = 0$ se e solo se $\boldsymbol{a}^T\mathbf{D}\boldsymbol{a} = 0$. Ma

$$\boldsymbol{b}^T\mathbf{E}\boldsymbol{b} = (\mathbf{C}\boldsymbol{a})^T\mathbf{E}(\mathbf{C}\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}^T\mathbf{C}^T\mathbf{E}\mathbf{C}\boldsymbol{a},$$

quindi $\mathbf{D} = \mathbf{C}^T\mathbf{E}\mathbf{C}$: una conica si trasforma in una conica. Se il determinante di $\mathbf{D}$ è diverso da zero, tale è quello di $\mathbf{E}$.

Data allora una conica con centro nell'origine, possiamo considerare i due asintoti, che si incontrano nell'origine stessa per i calcoli eseguiti in precedenza sulla polare come retta passante per i punti dove le tangenti dal polo incontrano la conica.

Queste sono rette proprie e possiamo considerare le bisettrici degli angoli che esse formano: sono due rette perpendicolari che si chiamano *assi* della conica.

Se prendiamo queste due rette come assi cartesiani, è ovvio che i punti impropri della conica sono della forma $[u_1\ u_2\ 0]^T$ e $[u_1\ -u_2\ 0]^T$. Di conseguenza abbiamo

$$d_{11}u_1^2 + 2d_{12}u_1u_2 + d_{22}u_2^2 = 0$$
$$d_{11}u_1^2 - 2d_{12}u_1u_2 + d_{22}u_2^2 = 0$$

da cui $d_{12}u_1u_2 = 0$. Ma siccome i punti impropri della conica sono distinti, dobbiamo avere $u_1 \neq 0$ e $u_2 \neq 0$; perciò $d_{12} = 0$ e la conica a centro ha matrice

$$\begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

che chiamiamo *forma normale* di una conica a centro. Possiamo evidentemente supporre $k < 0$ e quindi esaminare le varie possibilità.

(1) $d_{11} > 0$ e $d_{22} > 0$: la conica è un'ellisse.
(2) $d_{11} > 0$ e $d_{22} < 0$: la conica è un'iperbole.
(3) $d_{11} < 0$ e $d_{22} > 0$: la conica è un'iperbole.
(4) $d_{11} < 0$ e $d_{22} < 0$: la conica non ha punti reali.

Si potrebbe pensare che abbiamo barato: se la conica è un'ellisse, non ci sono punti impropri reali. Nonostante questo, si può applicare la formula delle bisettrici di due rette anche a questo caso. Vediamolo con un esempio.

La conica $10x^2 + 2xy + y^2 - 10$ è un'ellisse. I punti impropri sono

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1+3i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1-3i \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Le rette passanti per l'origine e questi due punti hanno equazione

$$y = (1+3i)x, \quad y = (1-3i)x.$$

Il complesso delle due bisettrici è il luogo dei punti del piano equidistanti dalle due rette; applichiamo la formula senza preoccuparci del suo significato:

$$\frac{(y-(1+3i)x)^2}{1+(1+3i)^2} = \frac{(y-(1-3i)x)^2}{1+(1-3i)^2}$$

cioè

$$(y^2 + 2(1+3i)xy + (1+3i)^2x^2)(1+1-6i-9) = (y^2 + 2(1-3i)xy + (1-3i)^2x^2)(1+1+6i-9)$$

cioè

$$\begin{aligned}(-6i-7)y^2 - (6i-7)y^2 + 2(1+3i)(-6i-7)xy - 2(1-3i)(6i-7)xy \\ + (1+6i-9)(-6i-7)x^2 - (1-6i-9)(6i-7)x^2 = 0.\end{aligned}$$

Svolgendo i calcoli otteniamo l'equazione equivalente

$$-12iy^2 - 108ixy + 12ix^2 = 0$$

o anche

$$x^2 - 9xy - y^2 = 0$$

che corrisponde a due rette *reali* che, prese come assi eseguendo una rotazione, portano i punti impropri ad avere la forma $[u_1\ u_2\ 0]^T$ e $[u_1\ -u_2\ 0]^T$ con $u_1$ e $u_2$ numeri complessi non nulli. Ma il ragionamento torna allo stesso modo.

# 6. Parabole

Una parabola è tangente alla retta impropria. Questo si esprime dicendo che

$$d_{11}x_1^2 + 2d_{12}x_1x_2 + d_{22}x_2^2$$

è, a meno di un fattore moltiplicativo, un quadrato; altrettanto bene possiamo esprimere questo fatto dicendo che $d_{12}^2 - d_{11}d_{22} = 0$.

Se $d_{12} = 0$, avremo allora $d_{11}d_{22} = 0$ e la matrice della parabola diventa:

$$\begin{bmatrix} d_{11} & 0 & d_{13} \\ 0 & d_{22} & d_{23} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} \end{bmatrix}$$

che ha come determinante

$$d_{11} \det \begin{bmatrix} d_{22} & d_{23} \\ d_{23} & d_{33} \end{bmatrix} + d_{13} \det \begin{bmatrix} 0 & d_{22} \\ d_{13} & d_{23} \end{bmatrix} = d_{11}d_{22}d_{33} - d_{11}d_{23}^2 - d_{13}^2 d_{22}.$$

Se fosse $d_{11} = d_{22} = 0$, il determinante sarebbe zero. Quindi solo uno fra $d_{11}$ e $d_{22}$ è nullo e, scambiando l'asse delle ascisse con l'asse delle ordinate (che è certamente una proiettività, anzi un'affinità) possiamo supporre che sia $d_{22} = 0$. Quindi anche $d_{23} \neq 0$.

In coordinate cartesiane, l'equazione della parabola è allora

$$d_{11}x^2 + 2d_{13}x + 2d_{23}y + d_{33} = 0$$

che, essendo $d_{23} \neq 0$, può essere scritta nella forma usuale

$$y = ax^2 + bx + c.$$

In questo caso il punto improprio è $[0\ 1\ 0]^T$, cioè il punto improprio dell'asse delle ordinate. Nel caso generale, possiamo cambiare con una rotazione il sistema di coordinate in modo che il punto improprio sia $[0\ 1\ 0]^T$. Ma allora

$$d_{22} = 0.$$

Siccome $d_{12}^2 - d_{11}d_{22} = 0$ dobbiamo avere $d_{12} = 0$ e ritorniamo alla situazione precedente. Una traslazione porta l'equazione nella forma $y = ax^2$; basta infatti "completare il quadrato":

$$ax^2 + bx + c - y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) - y = a\left(x - \frac{b}{2a}\right) - \left(y - \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}\right)$$

dove si riconoscono chiaramente le coordinate del vertice della parabola.

# 7. Coniche degeneri

Che succede quando la matrice della conica ha determinante zero?

Supponiamo di essere in questa situazione. Allora esiste $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$ tale che

$$\mathbf{D}\boldsymbol{a} = \mathbf{0}.$$

Se $\widehat{\boldsymbol{x}}$ è un altro punto della conica, allora ogni punto della retta per $\widehat{\boldsymbol{a}}$ e $\widehat{\boldsymbol{x}}$ appartiene alla conica. Infatti

$$(s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{x})^T \mathbf{D}(s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{x}) = s^2(\boldsymbol{a}^T \mathbf{D}\boldsymbol{a}) + 2st(\boldsymbol{x}^T \mathbf{D}\boldsymbol{a}) + t^2(\boldsymbol{x}^T \mathbf{D}\boldsymbol{x}) = 0.$$

Dunque la conica contiene una retta. Cambiando il sistema di coordinate in modo che il punto $\widehat{\boldsymbol{a}}$ sia $[0\ 0\ 1]^T$ e il punto $\widehat{\boldsymbol{x}}$ sia $[0\ 1\ 0]^T$, la matrice della conica diventa

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{12} & 0 & d_{23} \\ d_{13} & d_{23} & 0 \end{bmatrix}.$$

Ma la condizione $\mathbf{D}[0\ 0\ 1]^T = \mathbf{0}$ impone anche $d_{13} = 0$ e $d_{23} = 0$. Quindi abbiamo, in coordinate cartesiane, l'equazione

$$d_{11}x^2 + 2d_{12}xy = 0$$

cioè la conica consiste dei punti che appartengono

$$\text{alla retta } x = 0 \text{ oppure alla retta } d_{11}x + 2d_{12}y = 0.$$

Se ritorniamo al sistema di coordinate originale, vediamo allora che la conica è *l'unione di due rette* (che possono anche essere la stessa).

L'unico caso che ci manca è quello in cui *non ci sono altri punti oltre al punto* $\widehat{\boldsymbol{a}}$. Con una traslazione possiamo supporre che questo punto sia l'origine, così che la matrice diventa

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

L'equazione è dunque $d_{11}x^2 + 2d_{12}xy + d_{22}y^2 = 0$. Se intersechiamo con la retta $y = k$, otteniamo che l'equazione

$$d_{11}x^2 + 2d_{12}kx + d_{22}k^2 = 0$$

non ha soluzioni per $k \neq 0$. Quindi

$$d_{12}k^2 - d_{11}d_{22}k^2 < 0$$

da cui

$$d_{12} - d_{11}d_{22} < 0.$$

Se ci limitiamo allo studio nel campo reale questa equazione determina un solo punto. Ma nei numeri complessi questa si fattorizza ancora nel prodotto di due polinomi di primo grado.

# 8. Diametri

Un *diametro* di una conica irriducibile è la polare di un punto improprio. Dato un diametro possiamo considerare la polare del suo punto improprio, che sarà dunque un altro diametro, che diremo *coniugato* del primo.

Proviamo allora a calcolare la relazione fra diametri coniugati. Prendiamo la conica definita dalla matrice $\mathbf{D}$ e sia $\boldsymbol{a} = [s\ t\ 0]^T$ un punto improprio. La polare di questo punto è la retta $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{a}^T\mathbf{D}$. Il punto $\boldsymbol{b} = [s'\ \ t'\ \ 0]^T$ appartiene a questa retta se e solo se

$$\boldsymbol{a}^T\mathbf{D}\boldsymbol{b} = 0.$$

Se indichiamo con $\boldsymbol{d}_1$, $\boldsymbol{d}_2$ e $\boldsymbol{d}_3$ le colonne di $\mathbf{D}$, abbiamo

$$\mathbf{D}\boldsymbol{b} = s'\boldsymbol{d}_1 + t'\boldsymbol{d}_2,$$

quindi

$$\boldsymbol{a}^T\mathbf{D}\boldsymbol{b} = s'\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{d}_1 + t'\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{d}_2 = s'(sd_{11} + td_{21}) + t'(sd_{12} + td_{22})$$

e possiamo prendere

$$s' = sd_{12} + td_{22}, \qquad t' = -sd_{11} - td_{21}.$$

C'è un caso particolare: $sd_{11}+td_{21} = sd_{12}+td_{22} = 0$. Ciò accade solo quando $d_{11}d_{22}-d_{12}d_{21} = -(d_{12}^2 - d_{11}d_{22}) = 0$, cioè quando la conica è una parabola (ricordiamo che $s$ e $t$ non sono entrambi nulli). Dunque escluderemo che la conica sia una parabola.

La polare di questo punto è allora la retta

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta} &= \begin{bmatrix} sd_{12} + td_{22} & -sd_{11} - td_{21} & 0 \end{bmatrix}\mathbf{D} \\
&= \begin{bmatrix} sd_{12}d_{13} + td_{22}d_{13} - sd_{11}d_{23} - td_{21}d_{23} \\ sd_{12}d_{11} + td_{22}d_{11} - sd_{11}d_{21} - td_{21}d_{21} \\ sd_{12}d_{12} + td_{22}d_{12} - sd_{11}d_{22} - td_{21}d_{22} \end{bmatrix}^T \\
&= \begin{bmatrix} sd_{12}d_{13} + td_{22}d_{13} - sd_{11}d_{23} - td_{21}d_{23} & td_{22}d_{11} - td_{21}d_{21} & sd_{12}d_{12} - sd_{11}d_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} s(d_{12}d_{13} - d_{11}d_{23}) + t(d_{22}d_{13} - d_{21}d_{23}) & t(d_{22}d_{11} - td_{21}d_{21}) & s(d_{12}d_{12} - sd_{11}d_{22}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} sD_{23} + tD_{13} & tD_{33} & -sD_{33} \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

dove $D_{23}$ indica il determinante della matrice ottenuta da $\mathbf{D}$ cancellando il coefficiente $d_{23}$ insieme alla riga e alla colonna in cui si trova; analogamente per $D_{13}$ e $D_{33}$.

Il punto improprio di questa retta è

$$\begin{bmatrix} s\Delta \\ t\Delta \\ 0 \end{bmatrix}$$

e, come ci aspettavamo, si ritorna alla retta di partenza: la relazione di coniugio fra diametri è simmetrica.

Se calcoliamo $[s\ t\ 0]\mathbf{D}$, otteniamo

$$\begin{bmatrix} sd_{13}+td_{11} & sd_{11}+td_{12} & sd_{21}+td_{22} \end{bmatrix}.$$

Non c'è bisogno di eseguire calcoli: si tratta del fascio di rette per il centro della conica. Infatti, se un punto $\widehat{\boldsymbol{a}}$ appartiene alla polare di $\widehat{\boldsymbol{b}}$, allora la polare di $\widehat{\boldsymbol{b}}$ passa per $\widehat{\boldsymbol{a}}$. In particolare tutti i diametri passano per il polo della retta impropria, che è il centro.

Quando due diametri coniugati sono perpendicolari?

La condizione di perpendicolarità di due rette è ben nota; in questo caso diventa

$$tD_{33}(sd_{11}+td_{12})-sD_{33}(sd_{21}+td_{22})=0.$$

Sviluppando e tenendo conto che $D_{33}$ è l'opposto del discriminante della conica ed è quindi non nullo, abbiamo

$$s^2d_{21}-st(d_{11}-d_{22})-t^2d_{12}=0.$$

Per $t=0$ dovremmo avere $d_{21}=0$. Discutiamo questo caso dopo; se $d_{21}\neq 0$, abbiamo l'equazione

$$\left(\frac{s}{t}\right)^2-\frac{d_{11}-d_{22}}{d_{12}}\left(\frac{s}{t}\right)-1=0$$

che ha esattamente due soluzioni reali. Infatti il discriminante è

$$\frac{(d_{11}-d_{22})^2}{d_{12}^2}+4>0.$$

Se $d_{12}=0$ e $d_{11}\neq d_{22}$, le soluzioni sono i punti $[0\ 1\ 0]^T$ (corrispondente a $s=0$ e $t=1$) e $[1\ 0\ 0]^T$ (corrispondente a $s=1$ e $t=0$), che sono i punti impropri dei due assi cartesiani. Quando anche $d_{11}=d_{22}$, cioè quando la conica è una circonferenza, i diametri coniugati sono sempre ortogonali.

Se la conica non è una circonferenza, i due diametri coniugati mutuamente ortogonali sono gli *assi* della conica, come si vede portandola nella forma *canonica* con una traslazione e una rotazione.

Possiamo chiederci quando un diametro è coniugato a sé stesso. Questo accade quando il diametro è tangente alla conica, cioè è la polare di un punto improprio appartenente alla conica: abbiamo già incontrato queste rette, sono gli *asintoti* della conica. Sono reali se e solo se la conica è un'iperbole.

Verifichiamo la costruzione del diametro coniugato in un caso particolare. Consideriamo l'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1.$$

Un diametro (diverso dall'asse $y$) ha equazione $y=mx$; dobbiamo allora cercare le tangenti all'ellisse parallele alla retta data: infatti la polare di un punto è la retta che unisce i punti di contatto delle tangenti condotte da questo punto.

Una retta parallela è $y=mx+q$; scriviamo la condizione di tangenza calcolando prima le intersezioni. Si ottiene l'equazione

$$\left(\frac{1}{9}+\frac{m^2}{4}\right)x^2+\frac{2mq}{4}x+\frac{q^2}{4}-1=0,$$

il cui discriminante è

$$4\left(\frac{m^2q^2}{16}-\frac{q^2}{36}+\frac{1}{9}-\frac{m^2q^2}{16}+\frac{m^2}{4}\right)$$

che è nullo per

$$\frac{q^2}{36}=\frac{4+9m^2}{36}$$

cioè per i valori

$$q_1=\sqrt{4+9m^2} \text{ e } q_2=-\sqrt{4+9m^2}.$$

Sappiamo che la retta congiungente i due punti di contatto passa per l'origine e quindi ci basterà calcolare uno dei due. L'ascissa è $-b/2a$, cioè

$$-\frac{mq_1}{4}\frac{36}{4+9m^2}=-\frac{9mq_1}{4+9m^2};$$

l'ordinata è

$$-m\frac{9mq_1}{4+9m^2}+q_1=-q_1\frac{9}{9m^2+4}$$

e il coefficiente angolare del diametro coniugato è dunque

$$-q_1\frac{4}{9m^2+4}\left(\frac{9mq_1}{9m^2+4}\right)^{-1}=-\frac{4}{9m}.$$

Analogamente, nel caso dell'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

si ottiene come diametro coniugato della retta $y=mx$ la retta di coefficiente angolare

$$m'=-\frac{b^2}{a^2m}.$$

Vediamo il calcolo con i metodi visti prima. Il punto improprio della retta $y = mx$ è $[0\ 1\ m]$; la polare di questo punto è

$$\begin{bmatrix}1 & m & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/9 & 0 & 0\\ 0 & 1/4 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/9 & m/4 & 0\end{bmatrix}$$

che effettivamente è la retta di coefficiente angolare $-\frac{4}{9m}$. Un esempio è nella figura 5.

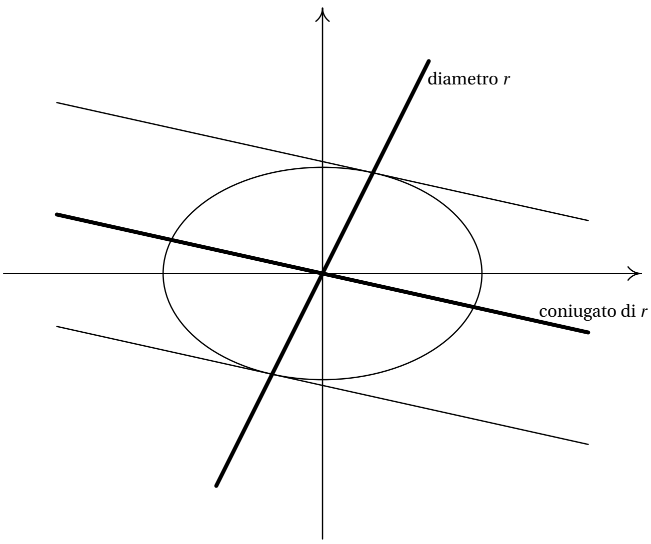


FIGURA 5: Costruzione del diametro coniugato: si conduce la tangente al punto di intersezione e la parallela a essa per il centro.

Vediamo nel caso dell'iperbole equilatera $xy = 4$, che possiamo anche scrivere $2xy = 8$. La retta $y = mx$ (con $m \neq 0$) ha come punto improprio $[0\ 1\ m]^T$; quindi il diametro coniugato è la retta

$$\begin{bmatrix}1 & m & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}m & 1 & 0\end{bmatrix},$$

cioè la retta di coefficiente angolare $-m$. Ne vediamo un esempio nella figura 6

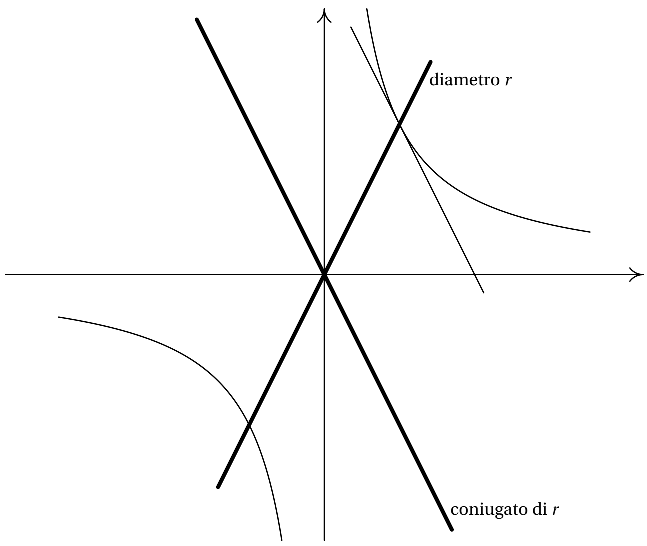


FIGURA 6: Costruzione del diametro coniugato: si conduce la tangente al punto di intersezione e la parallela a essa per il centro.

# 9. Il birapporto

Consideriamo quattro punti (propri) $A$, $B$, $C$ e $D$ di una retta, sulla quale fissiamo un ordinamento. Definiamo allora il *birapporto* di questi quattro punti come

$$(ABCD) = \frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC}$$

dove $XY$ denota la misura con segno del segmento $XY$. Se fissiamo sulla retta un sistema di ascisse, nel quale le ascisse di $A$, $B$, $C$ e $D$ sono rispettivamente $a$, $b$, $c$ e $d$, avremo

$$(ABCD) = \frac{(c-a)(d-b)}{(d-a)(c-b)}.$$

Vorremmo naturalmente comprendere in questa definizione anche il punto improprio della retta; certamente allora dovremo svincolarci dalle misure. Analogamente a quanto abbiamo fatto per il piano, possiamo introdurre sulla retta le coordinate omogenee: un punto sarà rappresentato da una colonna con due righe $[a_1\ a_2]^T$ al quale, per $a_2 \neq 0$, corrisponde il punto di ascissa $a_1/a_2$. Il punto improprio è allora $[1\ 0]^T$. Se scriviamo $a = a_1/a_2$, $b = b_1/b_2$, $c = c_1/c_2$, $d = d_1/d_2$, otteniamo

$$(ABCD) = \frac{\left(\dfrac{c_1}{c_2} - \dfrac{a_1}{a_2}\right)\left(\dfrac{d_1}{d_2} - \dfrac{b_1}{b_2}\right)}{\left(\dfrac{d_1}{d_2} - \dfrac{a_1}{a_2}\right)\left(\dfrac{c_1}{c_2} - \dfrac{b_1}{b_2}\right)} = \frac{(a_1c_2 - a_2c_1)(b_1d_2 - b_2d_1)}{(a_1d_2 - a_2d_1)(b_1c_2 - b_2c_1)}.$$

Un modo per ricordarlo è "$ACBD/ADBC$". Vediamo allora che il birapporto dipende solo dai punti e non dalle coordinate omogenee (per esempio, se moltiplichiamo $a_1$ e $a_2$ per $\rho$, il birapporto non cambia; lo stesso per gli altri punti). Nel caso in cui $d_2 = 0$, otteniamo

$$(ABCD) = \frac{-(a_1c_2 - a_2c_1)b_2d_1}{-a_2d_1(b_1c_2 - b_2c_1)} = \frac{(a_1c_2 - a_2c_1)b_2}{a_2(b_1c_2 - b_2c_1)}.$$

Se i punti sono a due a due distinti, questo ha senso. Infatti i punti di coordinate omogenee $[a_1\ a_2]^T$ e $[b_1\ b_2]^T$ sono distinti se e solo se

$$\det\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0.$$

Siccome i punti sono distinti, dobbiamo avere $a_2 \neq 0$.

Vediamo come cambia il birapporto permutando i quattro punti. Le possibili permutazioni sono 24. Per prima cosa, osserviamo che se scambiamo fra loro $A$ con $B$ e $C$ con $D$ il birapporto non cambia (cambiano i segni sia di numeratore che di denominatore). Analogamente se scambiamo $A$ con $C$ e $B$ con $D$ e di nuovo scambiamo le coppie ottenute.

Ponendo $r = (ABCD)$ abbiamo allora

$$(ABCD) = (CDAB) = (BADC) = (DCBA) = r.$$

Se invece scambiamo solo $A$ con $B$, il birapporto si inverte:

$$(BACD) = (CDBA) = (ABDC) = (DCAB) = \frac{1}{r}.$$

Se scambiamo $B$ con $C$, abbiamo invece

$$(ACBD) = (BDAC) = (CADB) = (DBCA) = 1 - r.$$

Mettendo insieme con i precedenti, abbiamo allora

$$\begin{aligned}
(ADBC) = (BCAD) = (CBDA) = (DACB) &= 1 - \frac{1}{r} = \frac{r-1}{r},\\
(CABD) = (BDCA) = (ACDB) = (DBAC) &= \frac{1}{1-r},\\
(DABC) = (BCDA) = (ADBC) = (CBAD) &= \frac{r}{r-1}.
\end{aligned}$$

Se scriviamo l'espressione esplicita del birapporto quando $C = A$, otteniamo evidentemente 0; questo è in accordo con il fatto che

$$(CBAD) = \frac{r}{r-1}$$

che vale per $r = 0$.

Analogamente, se $B = A$ l'espressione per il birapporto dà 1, in accordo con il fatto che

$$(BACD) = \frac{1}{r}.$$

Se vogliamo considerare il caso di $A = D$ siamo in imbarazzo: l'uguaglianza da soddisfare, siccome

$$(DBCA) = 1 - r,$$

sarebbe $r = 1 - r$, mentre l'espressione $(ABCA)$ non ha senso perché il denominatore è 0.

Poniamo allora $(ABCA) = \infty$. Vogliamo che valgano ancora le regole sulle permutazioni dei punti; quindi, siccome $(ABDC) = 1/(ABCD)$ e abbiamo già posto $(ABAD) = 0$, dobbiamo porre $1/\infty = 0$.

Poiché $(DBCA) = 1 - (ABCD)$, dobbiamo porre $1 - \infty = \infty$.

Poiché $(ADBC) = 1 - 1/(ABCD)$ e abbiamo già posto $(AACD) = 1$, dobbiamo porre $1 - 1/\infty = 1$, che è in accordo con $1/\infty = 0$.

Poiché $(DBAC) = 1/(1 - (ABCD))$ e abbiamo già posto $(ABAD) = 0$, dobbiamo porre $1/(1-\infty) = 0$ (che ancora va in accordo con le regole $1 - \infty = \infty$ e $1/infty = 0$).

Poiché infine $(ADBC) = (r-1)/r$ e abbiamo posto $(AACD) = 1$, dobbiamo porre $(\infty - 1)/\infty = 1$.

Non daremo significato a nessun'altra espressione contenente il simbolo $\infty$.

L'uso è giustificato da un'altra circostanza. Supponiamo che $B = [1\ 1]^T = P_1$, $C = [0\ 1]^T = P_0$, $D = [1\ 0]^T = P_\infty$. Allora $P_0$ è l'origine del sistema di coordinate, $P_1$ è il punto unità, mentre $P_\infty$ è il punto improprio della retta.

Se calcoliamo il birapporto $(AP_1P_0P_\infty)$ per il punto $A = [a_1\ a_2]^T$, otteniamo

$$(AP_1P_0P_\infty) = \frac{a_1}{a_2}$$

che è proprio l'ascissa del punto $A$, tranne quando $A = P_\infty$. In questo caso $(P_\infty P_1 P_0 P_\infty) = \infty$: $\infty$ è l'ascissa del punto improprio.

Si potrebbe immaginare che il birapporto dei quattro punti dipenda dal sistema di coordinate scelto sulla retta. Non è così.

Come nel caso del piano, una *proiettività* della retta è l'applicazione indotta dalla moltiplicazione per una matrice $2 \times 2$ invertibile e, allo stesso modo che nel piano, possiamo vedere una proiettività come un cambiamento di coordinate. Ora, se $\mathbf{C}$ è una matrice $2 \times 2$ invertibile, il corrispondente del punto $[a_1\ \ a_2]^T$ è $\mathbf{C}[a_1\ \ a_2]^T$. Dovendo calcolare il birapporto dei punti corrispondenti, saranno da considerare i determinanti di matrici del tipo

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} & \mathbf{C}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \mathbf{C}\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

ed è quindi ovvio da $\det(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2) = (\det\mathbf{C}_1)(\det\mathbf{C}_2)$ che il birapporto dei punti corrispondenti rimane invariato.