GEOMETRIA – Prova scritta del 18/6/2010

(Prof. M. Spera)

① Sia data la superficie parametrica Σ data da

$$\underline{r} = \underline{r}(u,v) = (\cos u - v \sin u,\ \sin u + v \cos u,\ 2v) \qquad u \in [0, 2\pi),\ v \in \mathbb{R}$$

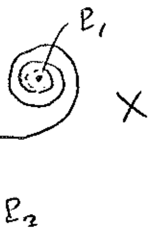
(nello spazio euclideo, fissato un riferimento cartesiano).

Dopo aver verificato che Σ è una superficie rigata – individuandone una direttrice e un sistema di regoli – dimostrare che si tratta di un iperboloide ad una falda, e se ne scriva un'equazione cartesiana. Calcolarne la prima e la seconda forma fondamentale, nonché la curvatura gaussiana.

② Sia data la superficie Σ' di equazione $4(x^2+y^2) - z^2 - 4 = 0$; utilizzando il calcolo implicito, determinarne l'operatore di forma S in $P_0: (0,1,0)$, le direzioni principali e quelle asintotiche, le curvature principali e la curvatura gaussiana (in P_0), nonché la relativa indicatrice di Dupin.

Dire se le linee asintotiche uscenti da P_0 sono geodetiche.

Fac. stesso esercizio utilizzando la par. dell'es ①.

③ 

Sia X = (grafico della) clotoide $\cup \{P_1, P_2\}$ dotato della topologia relativa ereditata da quella (standard) di $\mathbb{R}^2$.

Dire se X è compatto, connesso, connesso per archi, localmente connesso per archi.

Tempo a disposizione: 2h. Le risposte vanno adeguatamente giustificate.

GEOMETRIA 18/6/10

(1) $$\underline{r} = \underline{r}(u,v) = (\underbrace{\cos u - v\sin u}_{x},\ \underbrace{\sin u + v\cos u}_{y},\ \underbrace{2v}_{z})$$

è una rigata:

regoli

$u \in [0, 2\pi)$
$v \in \mathbb{R}$

$$\underline{r} = \underset{\text{direttrice}}{\underline{r}_{\mathcal{C}}} + v\,\underline{w}$$

$$\underline{r}_{\mathcal{C}} = (\cos u, \sin u, 0)$$

$$\underline{w} = \frac{d\underline{r}_{\mathcal{C}}}{du} + 2\underline{k} = (-\sin u, \cos u, 2)$$

In effetti, è un iperboloide ad una falda (iperboloide iperbolico), di rotazione

$$x^2 = \cos^2 u - 2v\sin u\cos u + v^2\sin^2 u$$
$$y^2 = \sin^2 u + 2v\sin u\cos u + v^2\cos^2 u$$

$$x^2 + y^2 = 1 + v^2$$
$$z^2 = 4v^2 \qquad v^2 = \frac{z^2}{4} \qquad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 1 + \frac{z^2}{4}$$

$$\boxed{4x^2 + 4y^2 - z^2 - 4 = 0}$$

$$\underline{r} = (\cos u - v\sin u,\ \sin u + v\cos u,\ 2v)$$

$$\underline{r}_u = (-\sin u - v\cos u,\ \cos u - v\sin u,\ 0)$$

$$\underline{r}_v = (-\sin u,\ \cos u,\ 2)$$

$$\underline{r}_{uu} = (-\cos u + v\sin u,\ -\sin u - v\cos u,\ 0)$$

$$\underline{r}_{uv} = (-\cos u,\ -\sin u,\ 0)$$

$$\underline{r}_{vv} = (0,\ 0,\ 0)$$

$$\underline{N} = \frac{\underline{r}_u \times \underline{r}_v}{\|\quad\|} \qquad \underline{r}_u \times \underline{r}_v =$$

$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -\sin u - v\cos u & \cos u - v\sin u & 0 \\ -\sin u & \cos u & 2 \end{vmatrix} = \underline{i}\cdot 2(\cos u - v\sin u)$$

$$-\underline{j}\cdot 2(-\sin u - v\cos u)$$

$$+\underline{k}\left\{(-\sin u - v\cos u)\cos u + \sin u(\cos u - v\sin u)\right\}$$

$$= 2(\cos u - v\sin u)\,\underline{i} + 2(\sin u + v\cos u)\,\underline{j}$$

$$+\left\{-\cancel{\sin u\cos u} - v\cos^2 u + \cancel{\sin u\cos u} - v\sin^2 u\right\}\underline{k}$$

$$= 2(\cos u - v\sin u)\,\underline{i} + 2(\sin u + v\cos u)\,\underline{j}$$

$$- v\,\underline{k}$$

$$\| \quad \|^2 = 4\left[(\cos u - v\sin u)^2 + (\sin u + v\cos u)^2\right] + v^2$$

$$= 4\left\{ \begin{array}{l} \cos^2 u + v^2\sin^2 u - \cancel{2v\cos u\sin u} + \\ + \sin^2 u + \cancel{2v\sin u\cos u} + v^2\cos^2 u \end{array} \right\} + v^2$$

$$= 4(1+v^2) + v^2 = 4 + 4v^2 + v^2$$
$$= 4 + 5v^2$$

$$\| \quad \| = \sqrt{4+5v^2}$$

$$E = \|r_u\|^2 = (-\sin u - v\cos u)^2 + (\cos u - v\sin u)^2$$
$$= \sin^2 u + v^2\cos^2 u + 2v\sin u\cos u$$
$$+ \cos^2 u + v^2\sin^2 u - 2v\sin u\cos u$$
$$= 1 + v^2$$

$$G = \|r_v\|^2 = \sin^2 u + \cos^2 u + 4 = 5$$

$$F = \langle r_u, \underline{r}_v \rangle = + \sin^2 u + \cancel{v\cos u\sin u} + \cos^2 u - \cancel{v\sin u\cos u}$$
$$= 1$$

$$I^a : \boxed{\begin{array}{l} E = 1+v^2 \\ F = 1 \\ G = 5 \end{array}}$$

II^a $\qquad \underline{N} = \frac{1}{\sqrt{\ }}\left\{2(\cos u - v \sin u)\,\underline{i} + 2(\sin u + v\cos u)\,\underline{j} - v\,\underline{k}\right\}$

$$e = \langle \underline{r}_{uu}, \underline{N} \rangle = \frac{1}{\sqrt{4+5v^2}} \cdot \left\{(-2)\left(\cos u - v \sin u\right)^2 + (-2)\,(\sin u + v\cos u)^2\right\}$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{4+5v^2}} \cdot \left\{ \cos^2 u - 2v \sin u \cos u + v^2 \sin^2 u + \sin^2 u + 2v \sin u \cos u + v^2 \cos^2 u \right\}$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{4+5v^2}} \left\{ 1 + v^2 \right\}$$

$$f = \langle \underline{r}_{uv}, \underline{N} \rangle = \frac{1}{\sqrt{\ }} \left\{ -2\cos u (\cos u - v \sin u) - 2 \sin u (\sin u + v \cos u) \right\}$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{\ }} \left\{ \cos^2 u - \cancel{v \cos u \sin u} + \sin^2 u + \cancel{v \sin u \cos u} \right\}$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{4+5v^2}}$$

$$g = 0$$

nota per il seguito
se $u = \frac{\pi}{2}$, $v = 0$ è
$\underline{N} = \underline{j} = (0,1,0)$

II^a

$$\boxed{\begin{aligned} e &= \frac{-2}{\sqrt{4+5v^2}}(1+v^2) \\ f &= \frac{-2}{\sqrt{4+5v^2}} \\ g &= 0 \end{aligned}}$$

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{-\dfrac{4}{4+5v^2}}{\underbrace{5(1+v^2) - 1}_{5v^2+4}} =$$

$$= -\frac{4}{4+5v^2}\,\frac{1}{5v^2+4} = -\frac{4}{(5v^2+4)^2}$$

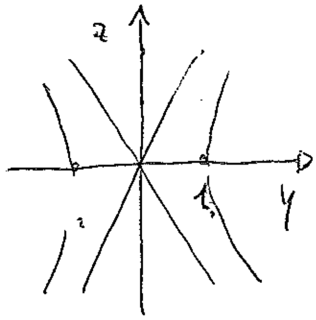
curvatura gaussiana $\boxed{K = -\dfrac{4}{(5v^2+4)^2}}$

($K < 0$, come era da aspettarsi (per una rigata è $K \leq 0$), e indipendente da u (superf. di rotazione))

controllo: se $v = 0$ $\quad K = -\dfrac{4}{4^2} = -\dfrac{1}{4}$

$4x^2 + 4y^2 - z^2 - 4 = 0$ $\qquad$ poniamoci in $P: (0,1,0)$

Nel piano $x = 0$, consideriamo $4y^2 - z^2 - 4 = 0$ (meridiano)
(iperbole).



$$\begin{cases} z = 0 \\ 4y^2 - z^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

$2_0 \quad y = \pm 1$

asintoti $4y^2 - z^2 = 0 \qquad 2y \pm z = 0$

sia $y = 1$

curvatura del meridiano

$y = y(z) \qquad 4y^2 - z^2 - 4 = 0$

$8yy' - 2z = 0$

$4yy' - z = 0 \qquad , \quad y' = 0$ ok

$4(y'^2 + yy'') - 1 = 0 \qquad 4 \cdot 1 \cdot y'' - 1 = 0$

(curv. (norm.) del parallelo $k_1 = -1$) $\qquad 4y'' - 1 = 0$

$k_2 = \dfrac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = \dfrac{1}{4} \qquad \boxed{K = -\dfrac{1}{4}}$ ✓ $\qquad y'' = \dfrac{1}{4}$

Calcoliamo

$$H = \frac{1}{2} \; \frac{Eg - 2Ff + eG}{EG - F^2}$$

$$H = \frac{1}{2} \; \frac{(1+v^2)\cdot 0 - 2\cdot 1\cdot\left(\frac{-2}{\sqrt{4+5v^2}}\right) + \frac{-2}{\sqrt{\;}}(1+v^2)\cdot 5}{5(1+v^2)-1}$$

$$= \frac{1}{2} \; \frac{+\frac{4}{\sqrt{\;}} - \frac{10(1+v^2)}{\sqrt{\;}}}{5v^2+4} = \frac{1}{2} \; \frac{1}{(5v^2+4)^{3/2}}\left[-6-10v^2\right]$$

Se $v=0$ è $H = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}(-6) = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)$

$$= -\frac{3}{8}$$

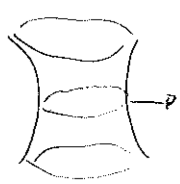
$$K = -\frac{1}{4}$$

$$k^2 - 2Hk + K = 0$$

$$k^2 + \frac{3}{4}k - \frac{1}{4} = 0 \longrightarrow \begin{array}{l} k_1 = -1 \\ k_2 = \frac{1}{4} \end{array}$$

controllo

$$-1 + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$$



$$-1\cdot\left(+\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4} \quad \checkmark$$

determiniamo le direzioni principali e asintotiche utilizzando la par. data.

$$\begin{array}{c} \\ E\ F\ G \\ \\ e\ f\ g \end{array} \begin{vmatrix} m & -lm & l \\ 1 & 1 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

poniamo $l=1$

$$\begin{vmatrix} m & -m & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

(Sarrus)

$$5m - 1 + 1 + 5m = 0 \Rightarrow 10m = 0$$

$$m = 0$$

4 dir. principale
l'altra è $\perp$

$$v = \underline{r}_u \cdot l + \underline{r}_v\, m$$
$$= \underline{r}_u$$

4 dir asintotiche

$$\underset{\underset{-1}{\parallel}}{e}\, l^2 + 2\underset{\underset{-1}{\parallel}}{f}\, lm + \underset{\underset{0}{\parallel}}{g}\, m^2 = 0$$

$$-l^2 - 2ml = 0$$

$$l(l+2m) = 0 \quad \begin{matrix} \nearrow & l = 0 \\ \searrow & l = -2m \end{matrix}$$

se $m=1$ $\quad l=-2$

$\underline{v} = \underline{r}_v^0$ .. chiaro, è un regalo

$\underline{r}_v^0 : (-1,\ 0,\ 2)$

$\tilde{\underline{v}} = -2\underline{r}_u^0 + \underline{r}_v$

$$\underline{\tilde{v}} = -2\,\underline{r}^{0}_{u} + \underline{r}^{0}_{v} = -2\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} \rightsquigarrow$$ direzione dell'altra regola!

(2) Calcoliamo $M_{ee'}(S'_{P_0})$ $\quad e = (r_x, r_z)$

$P_0 = (0, 1, 0)$

matrice di Weingarten

utilizzando il calcolo implicito

$$4x^2 + 4y^2 - z^2 - 4 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\ )\Big|_{P_0} = 8 > 0 \quad \Rightarrow \quad y = y(x,z) \equiv \varphi(x,z)$$

loc.. rappresenta Σ

$$4x^2 + 4y^2 - z^2 - 4 = 0$$

$\frac{\partial}{\partial x}$ $\qquad 8x + 8\varphi\varphi_x = 0 \qquad x + \varphi\varphi_x = 0$

$\frac{\partial}{\partial z}$ $\qquad 8\varphi\varphi_z - 2z = 0 \qquad 4\varphi\varphi_z - z = 0$

$\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ $\qquad 1 + \varphi_x^2 + \varphi\varphi_{xx} = 0$

$\frac{\partial^2}{\partial x \partial z}$ $\qquad \varphi_z\varphi_x + \varphi\varphi_{zx} = 0$

$\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ $\qquad 4\varphi_z^2 + 4\varphi\varphi_{zz} - 1 = 0$

in $P_0: (0, 1, 0)$ $\qquad \varphi_x^0 = \varphi_z^0 = 0$ (com'era da attendersi)

$$1 + 1 \cdot \varphi_{xx}^0 = 0 \qquad \varphi_{xx}^0 = -1$$

$$\varphi_{xz}^0 = \varphi_{zx}^0 = 0$$

$$4\varphi_{zz}^0 - 1 = 0 \qquad \varphi_{zz}^0 = +\frac{1}{4}$$

$\underline{r} = (x, y, z)$ $\qquad$ $\underline{r}^0 : (0, 1, 0)$

$\underline{r}_x = (1, y_x, 0)$ $\qquad$ $\underline{r}_x^0 = (1, 0, 0) = \underline{i}$

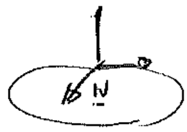
$\underline{r}_z = (0, y_z, 1)$ $\qquad$ $\underline{r}_z^0 = (0, 0, 1) = \underline{k}$

$\underline{r}_{xx} = (0, y_{xx}, 0)$ $\qquad$ $\boxed{\text{!}}$ $\underline{N}_0 = \underline{i} \times \underline{k} = -\underline{j}$

$\underline{r}_{xz} = (0, y_{xz}, 0)$

$\underline{r}_{zz} = (0, y_{zz}, 0)$

$\underline{N}_0 = (0, -1, 0)$



$E_0 = G_0 = 1 \qquad F_0 = 0$

$e_0 = \langle \underline{r}^0_{xx}, \underline{N}^0 \rangle = +1$

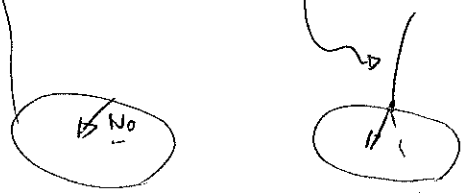
$f_0 = \langle \underline{r}^0_{xz}, \underline{N}^0 \rangle = 0$

$g_0 = \langle \underline{r}^0_{zz}, \underline{N}^0 \rangle = -\frac{1}{4}$

$\leadsto \quad m(S_{P_0}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$ $\qquad$ $K = -\frac{1}{4}$

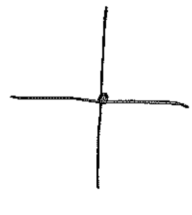
OK, compatibile con quanto visto prima

qui $k_1 = +1$, $k_2 = -\frac{1}{4}$ $\Big\}$ C'è un cambiamento di segno della normale



Direzioni principali $\leadsto$ $P_0 + t\,\underline{i}$

$P_0 + t\,\underline{k}$



$\xi^2 - \frac{1}{4}\eta^2 = \pm 1$ $\qquad$ $\eta = \pm 2\xi$

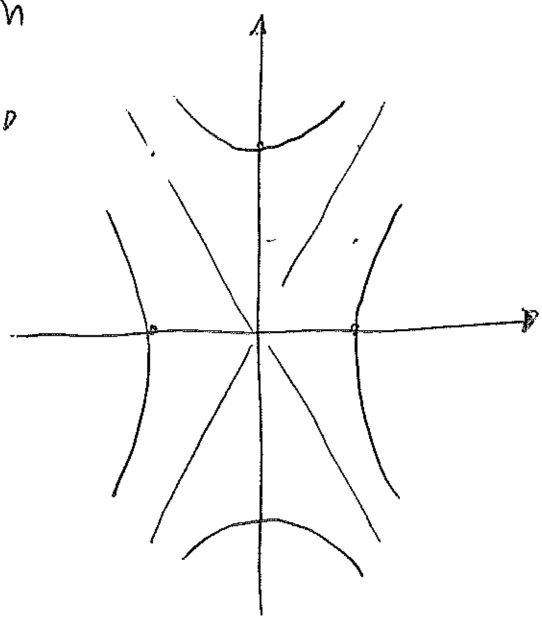
Dupin

$\begin{cases} x = 0 + t \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 0 + t \end{cases}$

Dupin

L_0

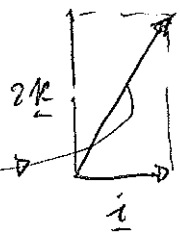


Dir. asintotiche

$$l^2 \cdot 1 - \frac{1}{4} m^2 = 0$$

$$(l = 1 \Rightarrow m = \pm 2)$$

$$\boxed{\underline{P} = \underline{P}_0 + t \cdot (\underline{i} \pm 2\,\underline{k})}$$



par. direttori

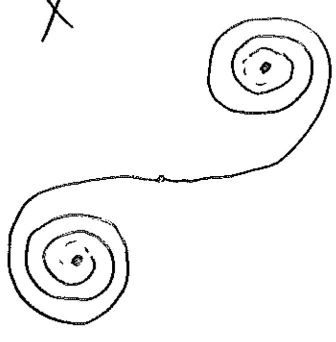
$$\begin{cases} x = 0 + t = t \\ y = 1 = 1 \\ z = 0 \pm 2t = \pm 2t \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \pm 2 \end{pmatrix}$$

$$4 \cdot t^2 + 4 - 4t^2 \equiv 4$$

$\Rightarrow$ le rette date sono interamente contenute nell'iperboloide (regoli) (e sono geodetiche)

(3)

X



$X =$ (grafico della) clotoide $\cup \{P_1, P_2\}$

X è compatto (infatti chiuso e limitato)

X è connesso (è chiusura di un connesso)

X è connesso per archi: tramite una * riparametrizzazione opportuna $X = \operatorname{Im} \alpha$

$\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$

(X è loc. connesso per archi: stessa ragione) Da ciò segue che è conn. per archi

* In maggiore dettaglio:

P_1

$s=0$

$$\begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \end{cases}$$

$$P_1 : \begin{cases} x_{P_1} = \lim_{s\to+\infty} x(s) \\ y_{P_2} = \lim_{s\to+\infty} y(s) \end{cases}$$

Si ponga ad esempio $\boxed{s = \tan\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right)}$ $\quad t=0 \Rightarrow s=0$, $\quad t=1 \Rightarrow s=+\infty$

$\Rightarrow \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ (abuso di notazione) con $t \in [0,1)$

per $t=1$ otteniamo P_1. Dunque , e quindi X, si può descrivere tramite un arco.

X è pertanto connesso per archi

Ulteriore chiarimento:

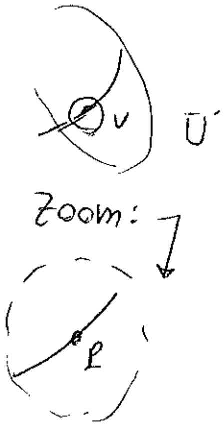
X è l.c.p.a. ovvero:

$\forall\ P \in X$, $\forall\ U \ni P$ (intorno di P)

$\exists\ \bar V \subset \bar U$, $\bar V \ni P$ (intorno di P)

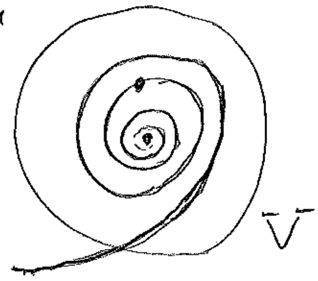
$\bar V$ c.p.a.

per $P \neq P_i$ $i=1,2$ ciò è chiaro:



Se $P = P_1$, per fissare le idee,

$\forall\ \bar U$ trovo $\bar V$



per quanto visto, due punti qualsiasi in $X \cap \bar V$ sono congiungibili con un arco