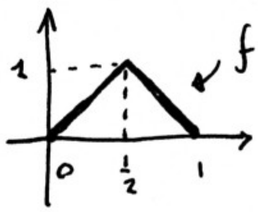
ANALISI MATEMATICA I (Bioinformatica; a.a. 2007/08)

Proff. M. Spera e M. Squassina

Prova scritta del $\boxed{15/7/2008}$

Prologo



① Si ha $f(0) = f(1) = 0$

ma in nessun punto $f' = 0$.

Ciò sembra contraddire il teorema di Rolle...

② Calcolare $\lim_{x \to \infty} \tan x$, giustificando la risposta.

③ $$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{\cos x} \underset{(H)}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x}{-\sin x} = -\infty \quad (!!!)$$

Dov'è l'errore?

④ Determinare il dominio di f:

$$f(x) = x^{\sin x}$$

e calcolarne la derivata

⑤ Sia $x > 0$. Calcolare

$$\int_x^{2x} e^t \, dt$$

⑥ Dire se esiste $\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$,

giustificando la risposta.

(E1) Calcolare

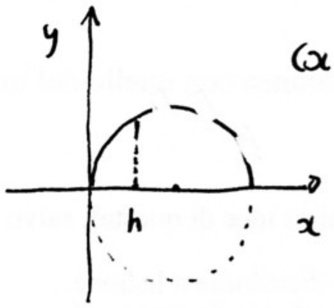
$$\lim_{x \to 0} \frac{(2-x^2)\sin x - 2x\cos x}{x^3}$$

(E2) a) Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\,(1-x)^\alpha}\,dx$$

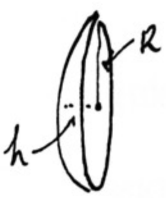
b) $$\int_0^1 \frac{x^2-4x+3}{\sqrt{x}\,(1-x)^\alpha}\,dx$$

(E3)



$(x-R)^2+y^2=R^2$

Calcolare il volume della calotta sferica (di altezza h) generata dalla rotazione attorno all'asse x della porzione di circonferenza in figura



(E4) a) Studiare la funzione $y = \dfrac{\sin x}{x}$:
dominio, asintoti, segno, calcolo di y'
dimostrando che esistono infiniti pti di max e min relativo; abbozzo del grafico

b) studiare $y = x + \dfrac{\sin x}{x}$
dominio, asintoti, segno, calcolo di y'
(si dimostri che y è strettamente crescente)
abbozzo del grafico
[Non è richiesto lo studio di f'', per entrambe le f.]

(T1) Enunciare e dimostrare il teorema di Rolle.

(T2) Sia data $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitata.

a) Descrivere il procedimento che porta a definire l'integrale definito
$$\int_a^b f(x)\,dx$$

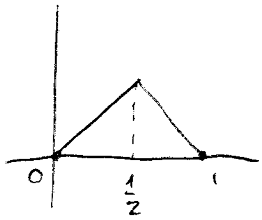
b) Dare un cenno di dimostrazione del fatto che se f è continua in $[a,b]$, allora è ivi integrabile.

c) Sia data $D = D(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap [0,1] \end{cases}$

Dire se D è integrabile in $[0,1]$.

Prologo : soluzioni

(1)



Il teorema di Rolle **non** si applica poichè f non è derivabile per $x = \frac{1}{2}$.

(2) $$\lim_{x \to 0} \tan x = 0$$

(tan è continua nel suo dominio , e $\tan 0 = 0$)

(3) Il teorema di de l'Hopital si applica alle forme indeterminate !

Qui $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\cos x} = 0 \quad (\text{v. sopra})$$

(oppure $$\ldots = \frac{\lim_{x \to 0} \sin x}{\lim_{x \to 0} \cos x} = \frac{0}{1} = 0$$

(4) $$f(x) = x^{\sin x} = e^{\sin x \log x} \qquad (x > 0)$$

$$f'(x) = \underbrace{e^{\sin x \log x}}_{x^{\sin x}} \left(\cos x \log x + \sin x \cdot \frac{1}{x} \right)$$

$$= \left(\cos x \log x + \frac{\sin x}{x} \right) x^{\sin x}$$

⑤ Se $x>0$, $f(x) = \int_x^{2x} e^t\,dt = e^t\Big|_x^{2x} = e^{2x} - e^x =$

$e^x e^x - e^x$

$= e^x(e^x - 1)$

⑥ $\lim_{x\to 0^+} \sin\frac{1}{x}$ non esiste.

Sia $\frac{1}{x_k} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2k\pi}$

$(k = 0, 1, \dots$ $= \frac{2}{\pi(1+4k)}$

$x_k \to 0^+$ e $\sin\frac{1}{x_k} = 1$

Invece, posto $\frac{1}{x'_k} = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \Rightarrow x'_k = \frac{1}{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}$

$= \frac{2}{(3+4k)\pi}$

$x'_k \to 0^+$ e $\sin\frac{1}{x'_k} = -1$

[oppure ancora $\frac{1}{x''_k} = 2k\pi$ $k = 1, 2..$

$x''_k = \frac{1}{2k\pi}$ $\sin\frac{1}{x''_k} = 0$

①

Soluzione

$$\lim_{x \to 0} \frac{(2-x^2)\sin x - 2x\cos x}{x^3}$$

N: $(2-x^2)\sin x - 2x\cos x$

$$= (2-x^2)\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) - 2x\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)$$

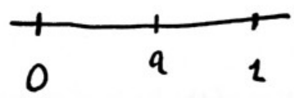
$$= \cancel{2x} - \cancel{x^3} - \frac{1}{3}x^3 + o(x^4) - \cancel{2x} + \cancel{x^3} + o(x^4)$$

$$= -\frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$$

$\Rightarrow$ il limite richiesto vale $-\frac{1}{3}$

②

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\,(1-x)^{\alpha}}\,dx$$



spezziamo:

$$\int_0^a + \int_a^1$$

$\int_0^a$ converge $\left(\sim \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

$\int_a^1$ converge per $\boxed{\alpha < 1}$ $\left(\sim \frac{1}{y^{\alpha}}\right.$ per $\left. y \to 0\right)$

$\Rightarrow \int_0^1$ converge per $\alpha < 1$

$$\int_0^1 \frac{x^2-4x+3}{\sqrt{x}\,(1-x)^{\alpha}}\,dx$$

$$x^2-4x+3 = (x-1)(x-3)$$

$\int_0^a$ converge ...

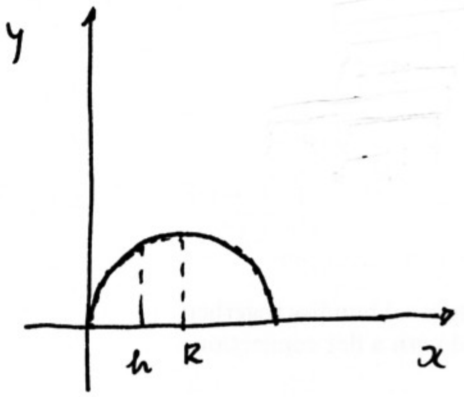
$\int_a^1$ l'integrando è $\dfrac{3-x}{\sqrt{x}\,(1-x)^{\alpha-1}} \sim 2\dfrac{1}{(1-x)^{\alpha-1}}$

$\Rightarrow$ si ha convergenza

per $\alpha-1<1$

ovvero per $\boxed{\alpha < 2}$

③



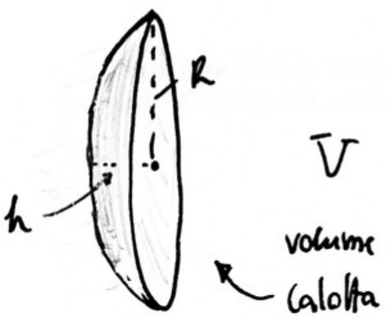
$$(x-R)^2 + y^2 = R^2$$

$$y^2 = R^2 - (x-R)^2$$

$$= (R-(x-R))(R+x-R)$$

$$= (2R-x)\cdot x$$

$$= 2Rx - x^2$$



$$V = \pi \int_0^h (2Rx - x^2)\,dx$$

$$= \pi\left[\cancel{2}R\cdot\frac{h^2}{\cancel{2}} - \frac{h^3}{3}\right]$$

$$= \pi h^2 \left[R - \frac{h}{3}\right] = \frac{\pi h^2}{3}(3R-h)$$

(se $h = R$ si ha $\frac{\pi}{3}R^2\cdot 2R = \frac{2}{3}\pi R^3$ (semisfera...)

$$\boxed{V = \frac{\pi h^2}{3}(3R-h)}$$

④ a)

$$y = \frac{\sin x}{x} \qquad \left(y = \operatorname{sinc} x \right)$$

[importante nella teoria di Fourier] a priori definita per $x \neq 0$

è pari

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \Rightarrow \text{ si pone } f(0) = 1$$

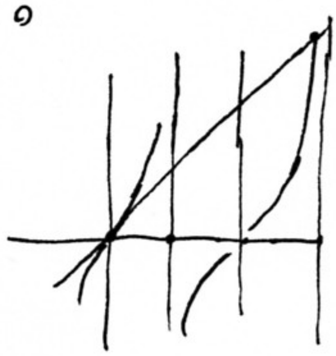
$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

$$y' = \frac{\cos x \cdot x - \sin x}{x^2} \qquad x \neq 0$$

$y' = 0$ per $\cos x \cdot x - \sin x = 0$

per $\cos x \neq 0$ $\qquad x = \tan x$

$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $\qquad \Rightarrow$ si hanno inf. soluzioni.



Si veda il grafico più oltre

[la f. oscilla tra $y = \frac{1}{|x|}$ e $y = -\frac{1}{|x|}$]

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x \cdot x - \sin x}{x^2} = \ldots = 0$$

$\Downarrow \Downarrow$

N: $\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) x - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)$

$$= \cancel{x} - \frac{x^3}{3} - \cancel{x} + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

$$= -\frac{1}{2} x^3 + o(x^3) \sim \ldots$$

(4) b)

$$\boxed{y = f(x) = x + \frac{\sin x}{x}}$$

dominio a priori $x \neq 0$ ma la f.

si prolunga con continuità anche in $x = 0$ poiché

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ e si pone ivi $f(0) = 1$

segno ; se $x \geq 0$, $f(x) \geq 0$

$\frac{\sin x}{x}$ è pari , ed essendo limitata

(si osservi che $\frac{\sin x}{x} \to 0$ per $x \to \pm\infty$)

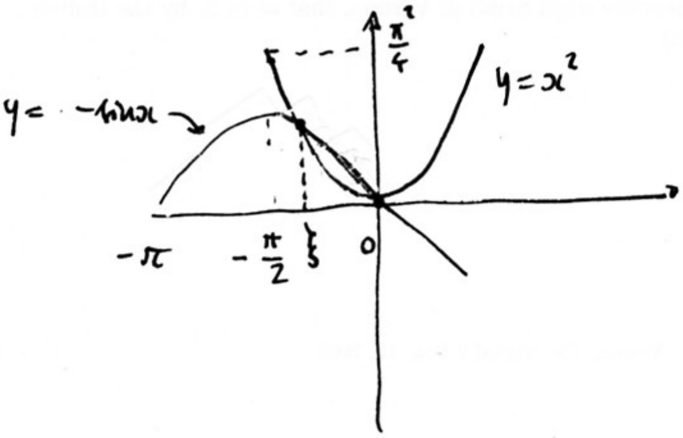
ciò implica che $f(x) < 0$ per $x << 0$

(infatti $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$) $\Rightarrow$ $\exists\ \xi$ tale che $f(\xi) = 0$

Sia allora $x + \frac{\sin x}{x} = 0$ [si avrà $\xi < 0$]

$x \neq 0$

$x^2 + \sin x = 0$. $-\sin x = x^2$



come verificheremo in seguito, ξ è unico

[è intuitivamente chiaro]

asintoti: $\quad m_\pm = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x^2}\right) = 1$$

$$q_\pm = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - m_\pm x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

⚠

dunque $\quad y = x \quad$ è asintoto obliquo (destro e sinistro)

$$f'(x) = 1 + \frac{\cos x \cdot x - \sin x \cdot 1}{x^2} = 1 + \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$$

$x \neq 0$

Calcoliamo $\quad \lim_{x \to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$

$$\frac{x\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)}{x^2} =$$

$$= \frac{\cancel{x} - \frac{x^3}{2} - \cancel{x} + \frac{x^3}{6} + o(x^4)}{x^2}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right)}_{\frac{1-3}{6} = -\frac{1}{3}} x + o(x^2) = -\frac{1}{3}x + o(x^2) \longrightarrow 0$$

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = 1$$

Calcoliamo $\qquad$ Si ha:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \qquad \frac{x + \frac{\sin x}{x} - 1}{x}$$

$$\frac{x^2 + \sin x - x}{x^2} = \frac{x^2 - \frac{x^3}{6} + o(x^4)}{x^2}$$

$$= 1 + o(x) \longrightarrow 1$$

Possiamo affermare che $f'(0)$ esiste $(\ell = 1)$

e f' è continua anche in 0.

$$f' = \frac{x^2 + x\cos x - \sin x}{x^2}$$

Zeri di f' $\qquad$ Consideriamo

$g(x) = x^2 + x\cos x - \sin x$ $\quad$ (= numeratore di)

$$g'(x) = 2x + \cancel{\cos x} - x\sin x - \cancel{\cos x}$$

$$= x\underbrace{(2 - \sin x)}_{>0}$$

$\Rightarrow g(x) = 0 \iff x = 0$

$\Rightarrow f' \neq 0$; essendo continua ed essendo, per es. $f'(1) = 1 > 0$, si ha

$f'(x) > 0 \quad \forall x \Rightarrow f$ strettamente crescente

$\Rightarrow$ non vi sono max e min relativi né assoluti poiché $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

[e nemmeno assoluti poichè $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$]

flessi $\qquad f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$

$x \neq 0$

$$f''(x) = \frac{g' \, x^2 - g \cdot 2x}{x^4}$$

$$= \frac{g' x - 2g}{x^3}$$

$$= \frac{x^2 (2 - \sin x) - 2 \, (x^2 + x \cos x - \sin x)}{x^3}$$

$$= \frac{\cancel{2x^2} - x^2 \sin x - \cancel{2x^2} - 2x \cos x + 2 \sin x}{x^3}$$

$$= \frac{(2 - x^2) \sin x - 2x \cos x}{x^3}$$

[=> si hanno infiniti flessi, localizzarli non è agevole...]

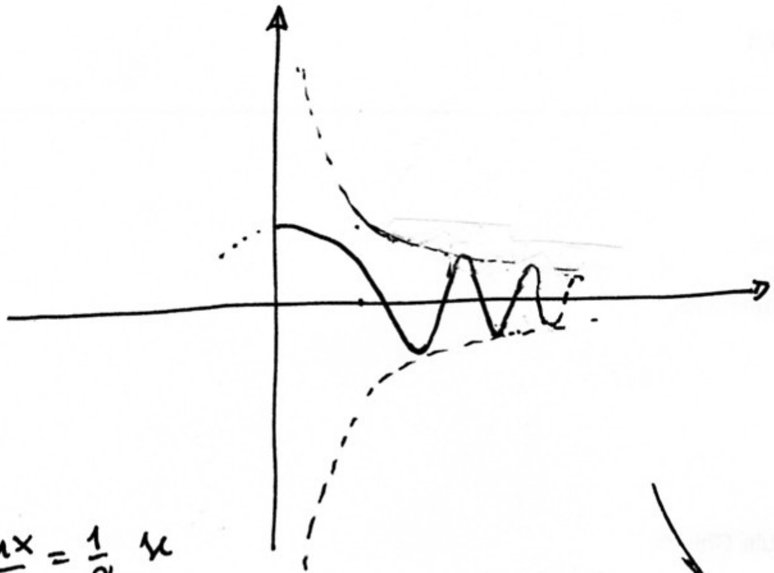
in 0:

$$\frac{(2-x^2)\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) - 2x\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)}{x^3}$$

$$= \frac{\cancel{2x} - \cancel{x^3} - \frac{1}{3} x^3 + o(x^4) - \cancel{2x} + \cancel{x^3} + o(x^4)}{x^3}$$

$$\to -\frac{1}{3} \qquad \text{(concava vicino a 0)}$$

Abbozzo del grafico di $y = \frac{\sin x}{x}$



zoom

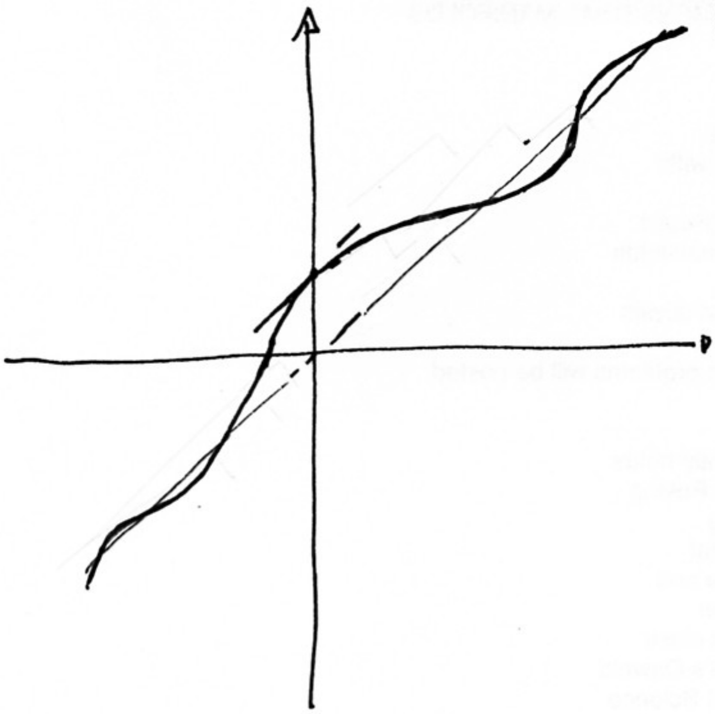
attenzione!

$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x}$ se

$\sin x = 1$

$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

ecc.



$y = x + \frac{\sin x}{x}$

(la f. è str. crescente)