Appunti del corso di **GEOMETRIA** (Prof. M. Spera) Lezione I

Riferimenti bibliografici principali
(Biblioteca "B. Forte" - Ca' Vignal 2)

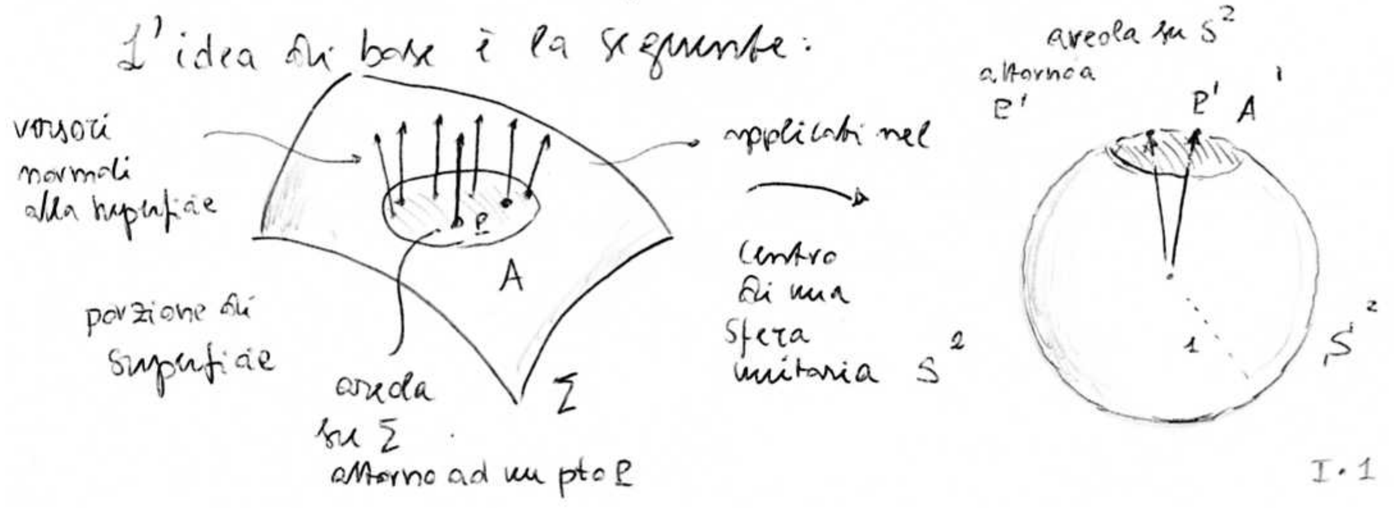
- M. Abate, F. Tovena "Curve e superfici" Springer, Milano, 2006
- A. Pressley "Elementary differential geometry" Springer, New York, 2000
- A. Gray, E. Abbena, S. Salamon "Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica®" 3rd Edition, CRC Press, Boca Raton, FL, 2006
- M. Do Carmo "Differential geometry of curves and surfaces" Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1976

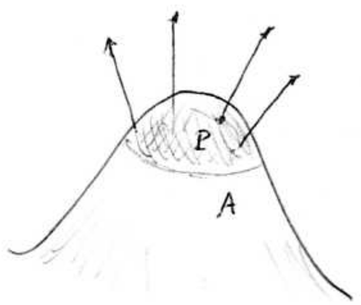
Introduzione

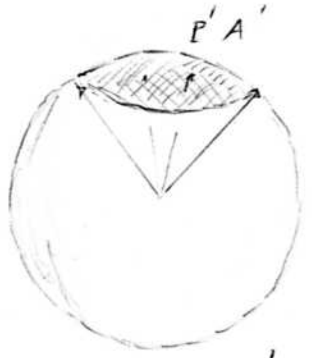
Lo scopo principale del presente corso è lo studio della geometria differenziale (L. Bianchi) delle curve e superficie in $\mathbb{R}^3$ (vale a dire, delle proprietà geometriche accertabili mediante l'analisi).

Il cuore del corso è costituito dalla nozione di curvatura di una superficie in $\mathbb{R}^3$ (K. F. Gauss)

L'idea di base è la seguente:

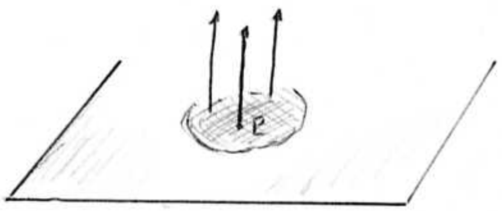




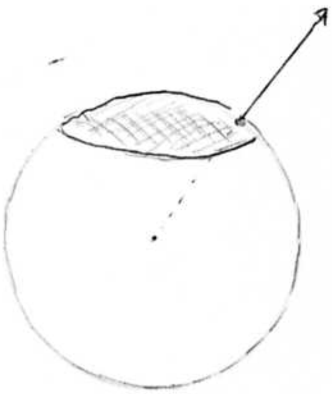


"grande curvatura" ≡ "grande calotta"

$A' \equiv \{pto\}$

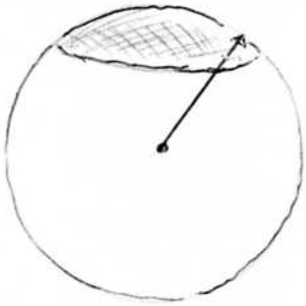


piano: "curvatura nulla"



S^2

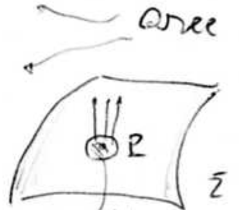
aree inalterate...

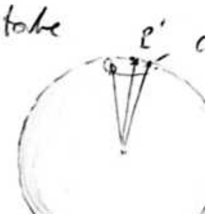


S^2

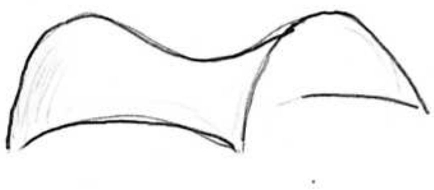
Gauss: $K(P) := \lim\limits_{A \to 0} \dfrac{A'}{A}$ — aree orientate

curvatura di Σ in P





per il piano $K = 0$, per una sfera unitaria $K = +1$



← per una superficie siffatta (paraboloide iperbolico...) a "sella" $K < 0$

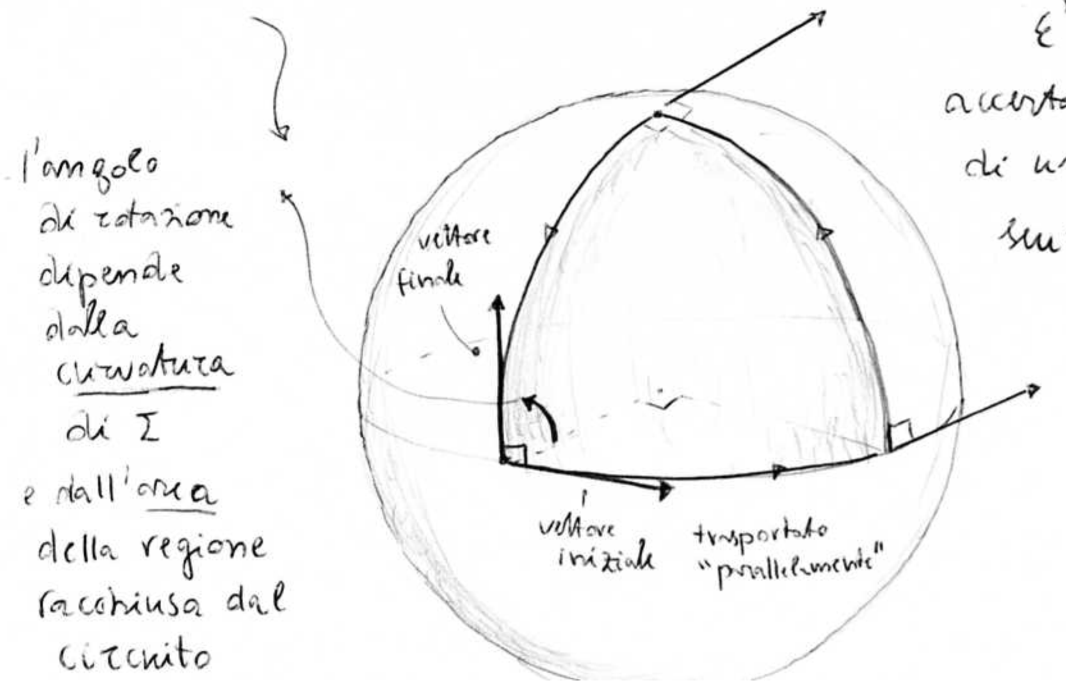
Per come è definita, K sembra dipendere sia dalla geometria "intrinseca" di Σ, che da quella "estrinseca" (cioè dal modo con cui Σ si dispone nello spazio).

In realtà, essa dipende solo dalla prima (Theorema Egregium di Gauss), e precisamente dalla "metrica" (i.e. "distanza tra pti infinitamente vicini").

Detto altrimenti, superficie isometriche (cioè deformabili l'una nell'altra senza alterare le distanze tra i punti) hanno la stessa curvatura.

In particolare, il Theorema Egregium sancisce l'impossibilità di risolvere il problema geografico: non è possibile rappresentare "fedelmente" (ossia isometricamente) una porzione di superficie terrestre su una carta (la sfera, ma anche un ellissoide di rotazione, hanno curvatura positiva, un piano ha curvatura nulla).

Strettamente collegata alla curvatura è la nozione di trasporto parallelo (Levi-Civita) di un vettore lungo un circuito chiuso



È pertanto possibile accertarsi della curvatura di una superficie senza "uscire" da questa.

Un'altra notevolissima conseguenza della teoria è il teorema di Gauss - Bonnet (globale):

per una superficie chiusa (compatta e senza bordo (v. oltre))

si ha

"curvatura integra"

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma} K \, d\sigma = \chi(\Sigma) = 2-2g}$$

caratteristica di Eulero - Poincaré

genere della superficie

(≡ "numero di buchi" o dei "manici")

☆ dato analitico

☆ dato topologico, i.e. invariante per "deformazioni continue" (v. anche oltre)

$g=3$

Σ

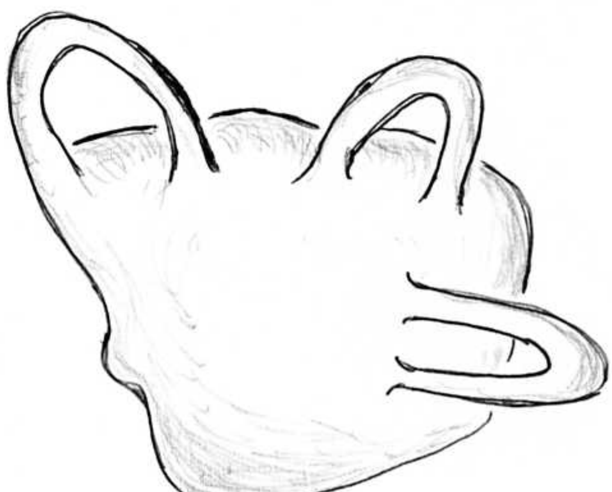
Esempio: S^2

$K=+1$ $\quad \frac{1}{2\pi}\int_{S^2} d\sigma =$

$\frac{1}{2\pi}\cdot 4\pi = 2\pi = 2-2g$

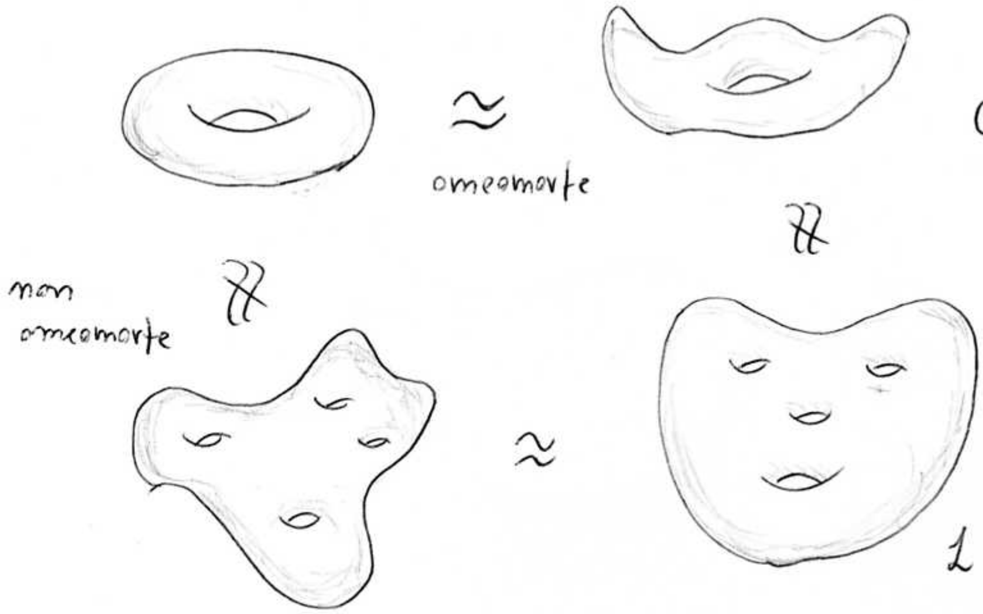
$\Rightarrow g = 0$

(come è giusto che sia!)



Le conseguenze di questo teorema, in matematica, ma anche in fisica e in altri ambiti applicativi sono enormi.

La topologia è quella branca della matematica che si occupa dello studio delle proprietà delle "figure" indipendenti dalla "forma" di queste, vale a dire "invarianti rispetto a trasformazioni biunivoche e bicontinue" (omeomorfismi) [dette appunto proprietà topologiche]. Queste dipendono, in definitiva, esclusivamente dal modo con cui i punti si "organizzano", dalle loro relazioni di "vicinanza".



La topologia generale si particolarizza in vari ambiti (topologia algebrica, differenziale ecc). Essa si rivela essenziale in tutti i rami della matematica. L'idea di base della topologia algebrica è quella di associare a "varietà" topologiche quantità numeriche o algebriche (gruppi ecc.) invarianti per omeomorfismi, in linea di principio più semplici da trattare, che permettono di distinguerle (cf. la caratteristica di Euler-Poincaré ...).

Cominceremo con una breve introduzione alla topologia generale, concentrandoci in particolare sulle nozioni di compattezza e connessione.