## Esercitazione III: calcolo dei predittori.

Il modelli ARX da identificare appartengono alla seguente famiglia

$$y(t) + a_1\, y(t-1) + a_2\, y(t-2) = b_1 u(t-1) + b_2 u(t-1) + e(t)$$

In cui viene posto a zero $a_2$ o $b_2$. Introducendo l'operatore di ritardo $q$ si ricava che

$$[1 + a_1 q^{-1} + a_2\, q^{-2}]y(t) = [b_1 q^{-1} + b_2\, q^{-2}]u(t) + e(t)$$

Da cui

$$y(t) = G(q)u(t) + H(q)e(t)$$

dove

$$H(q) = \frac{1}{A(q)} \qquad G(q) = \frac{B(q)}{A(q)}$$

Da cui il predittore risulta essere

$$\hat{y}(t|t-1) = H^{-1}(q)G(q)u(t) + [1 - H^{-1}(q)]y(t) = A(q)\frac{B(q)}{A(q)}u(t) + [1 - A(q)]y(t) =$$
$$= b_1 q^{-1} u(t) + \ b_2 q^{-1} u(t) - a_1 q^{-1} y(t) - a_2\, q^{-2}\, y(t)$$
$$= b_1 u(t-1) + \ b_2 u(t-2) - a_1 y(t-1) - a_2\, y(t-2)$$

A titolo di confronto si riporta il calcolo del predittore ottimo per il modello vero

$$y(t) = a^*\, y(t-1) + \ b^*\, u(t-1) + e(t) + c^*\, e(t-1)$$

Che rientra nella famiglia generale introducendo i polinomi $A(q) = 1 - a^* q^{-1},\ B(q) = b^* q^{-1}$ e $C(q) = 1 + c^* q^{-1}$. Pertanto il modello vero risulta essere:

$$y(t) = G(q)u(t) + H(q)e(t)$$

dove

$$H(q) = \frac{C(q)}{A(q)} \qquad G(q) = \frac{B(q)}{A(q)}$$

Al modello descritto corrisponde il seguente predittore ottimo

$$\hat{y}^*(k|k-1) = H^{-1}(q)G(q)u(k) + [1 - H^{-1}(q)]y(k) = \tfrac{A(q)B(q)}{C(q)A(q)}u(k) + \left[1 - \tfrac{A(q)}{C(q)}\right]y(k)$$

Da cui

$$C(q)\hat{y}^*(t|t-1) = B(q)u(t) + \big(C(q) - A(q)\big)y(t)$$
$$\hat{y}^*(t|t-1) - c^*\hat{y}^*(t-1|k-2) = b^* u(t-1) + (a^* + c^*)y(t-1)$$
$$\hat{y}^*(t|t-1) = b^* u(t-1) + (a^* + c^*)y(t-1) + c^*\hat{y}^*(t-1|t-2)$$

Nell'equazione precedente risulta ovvia la non linearità nei parametri (infatti le predizioni passate rientrano nella calcolo della predizione corrente), pertanto una parte dell'errore non dovrebbe essere spiegabile.