Marco Squassina e Alessandro Zamboni

Esercizi di Analisi Matematica II

Parte I/IV: Limiti e Continuità

Uni Verona - Anno Accademico 2007-2008

11 ottobre 2007

1

Limiti e Continuità

1.1 Spazi Metrici

(1.1) Esercizio *Sia X un insieme e $d : X \times X \to \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo per ogni $x, y \in X$*

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y. \end{cases}$$

Provare che valgono i seguenti fatti :
(i) (X,d) è uno spazio metrico ;
(ii) se $x \in X$ ed $r \in]0,1]$, si ha $B(x,r) = \{x\}$ e $\operatorname{diam}(B(x,r)) = 0$;
(iii) ogni sottoinsieme di X è aperto e chiuso.

Risoluzione. (i) Dobbiamo verificare che la funzione assegnata è una distanza. Dalla sua stessa definizione è evidente che $d(x,y) = 0$ se e solo se $x = y$, e che $d(x,y) = d(y,x)$ per ogni coppia $x, y \in X$. Infine, siano $x, y, z \in X$. Per provare che la disuguaglianza triangolare è verificata è sufficiente osservare che, se $x = y = z$ allora $0 = d(x,z) = d(x,y) + d(y,z)$ e che, se almeno due dei tre punti sono distinti, allora $0 \leq d(x,z) \leq 1$ e $1 \leq d(x,y) + d(y,z) \leq 2$.

(ii) Risulta evidente dalla definizione della metrica. Infatti la palla aperta centrata in un punto $x \in X$ e di raggio non superiore a 1 contiene tutti gli elementi di X che distano meno di 1 da x. Pertanto tale palla contiene soltanto il punto x. Ne segue anche che il suo diametro vale zero.

(iii) Un noto teorema afferma che un sottoinsieme A di uno spazio metrico è aperto se e solo se, per ogni $p \in A$, esiste $\delta > 0$ tale che $B(p,\delta) \subseteq A$. Nel nostro caso è sufficiente prendere $\delta \in]0,1]$ e, dal punto (ii) sappiamo che $B(p,\delta) = \{p\}$. Dunque A è aperto. Inoltre un sottoinsieme è chiuso se e solo se il suo complementare è aperto. Ma dato che ogni sottoinsieme di X è aperto lo è anche l'insieme complementare in questione. Pertanto ogni sottoinsieme di A è aperto e chiuso.

La metrica definita in questo esercizio è detta *metrica discreta.* ■

(1.2) Esercizio *Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Denotiamo con $C^0([a,b])$ l'insieme delle funzioni continue sull'intervallo $[a,b]$ e poniamo, per ogni $f, g \in C^0([a,b])$,*

$$\begin{aligned} d_\infty(f,g) &= \sup\{|f(x)-g(x)| : x \in [a,b]\}, \\ d_1(f,g) &= \int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx, \\ d_2(f,g) &= \int_a^b |f(x)-g(x)|^2\,dx. \end{aligned}$$

Provare che $\big(C^0([a,b]), d_\infty\big)$, $\big(C^0([a,b]), d_1\big)$ e $\big(C^0([a,b]), d_2\big)$ sono spazi metrici. Individuare un sottoinsieme chiuso limitato ma non compatto dello spazio metrico $(C^0([a,b]), d_\infty)$.

Risoluzione. Dalla definizione di d_∞ è immediato verificare che $d_\infty(f,g) = 0$ se e solo se $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in [a,b]$, e che $d_\infty(f,g) = d_\infty(g,f)$. Siano ora $f, g, h \in C^0([a,b])$. Allora si ha che

$$\begin{aligned} d_\infty(f,h) = \sup_{[a,b]} |f(x)-h(x)| &= \sup_{[a,b]} |f(x)-g(x)+g(x)-h(x)| \\ &\le \sup_{[a,b]} |f(x)-g(x)| + \sup_{[a,b]} |g(x)-h(x)| \\ &= d_\infty(f,g) + d_\infty(g,h). \end{aligned}$$

Lasciamo come esercizio la dimostrazione che anche d_1 e d_2 sono metriche. Invitiamo ad osservare che, per dimostrare che $d_i(f,g) = 0$ se e solo se $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in [a,b]$, $(i = 1,2)$, sia cruciale il fatto che si sta lavorando con funzioni continue su $[a,b]$.

La palla unitaria chiusa di $(C^0([a,b]), d_\infty)$ è un esempio di sottoinsieme chiuso, limitato ma non compatto. Per dimostrarlo è sufficiente fornire una successione di funzioni ε-separate (cioè tale che $d_\infty(f_n, f_m) \ge \varepsilon$ per ogni $n \ne m$) per qualche $\varepsilon > 0$, che sia contenuta in tale palla. In realtà è possibile costruire una successione di funzioni 1-separate. Per semplicità consideriamo l'intervallo $[0,1]$. Per costruire la prima funzione dividiamo a metà l'intervallo $[0,1]$. La funzione f_1 vale zero in $x = 0$, raggiunge quota 1 in $x = 1/2$ seguendo un segmento rettilineo e torna a quota zero in $x = 1$. Per definire la seconda funzione dividiamo ulteriormente a metà l'intervallo $[0,1]$. La funzione f_2 vale zero in $x = 0$, raggiunge quota 1 in $x = 1/4$ seguendo un segmento rettilineo, torna a quota zero in $x = 1/2$, raggiunge nuovamente quota 1 in $x = 3/4$ e torna di nuovo a quota zero in $x = 1$, sempre seguendo segmenti rettilinei. Le funzioni $f_3, f_4, \ldots$ sono definite in modo analogo continuando a dividere ulteriormente l'intervallo $[0,1]$.

Si verifichi che tale successione è effettivamente 1-separata. ■

(1.3) Esercizio *Per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ poniamo*

$$d_\infty(x,y) = \sup_{1\le i\le n} |x_i - y_i|, \quad d_1(x,y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|,$$

$$\hat{d}(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$$

Provare che $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$*,* $(\mathbb{R}^n, d_1)$ *e* $(\mathbb{R}, \hat{d})$ *sono spazi metrici. Descrivere inoltre le "sfere" in ognuno di questi spazi metrici. Esistono sottoinsiemi illimitati in* $(\mathbb{R}, \hat{d})$ *?*

Risoluzione. Lasciamo come esercizio la verifica che le funzioni assegnate sono effettivamente delle distanze in $\mathbb{R}^n$. Per 'visualizzare' meglio la forma delle sfere in questi spazi consideriamo il caso $n = 2$. Il lettore verifichi graficamente che la sfera di d_∞ è un quadrato di vertici $(1,1), (-1,1), (-1,-1), (1,-1)$, e che la sfera di d_1 è un rombo di vertici $(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)$. Infine, poichè si ha $0 \le \hat{d}(x,y) < 1$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ la sfera in tale metrica consiste di tutto $\mathbb{R}^n$ e non esistono insiemi illimitati con tale distanza. ■

(1.4) Esercizio *Sia* (X,d) *uno spazio metrico e* $z \in X$*. Definiamo la funzione* $d_z : X \times X \to \mathbb{R}$ *ponendo*

$$d_z(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ d(x,z) + d(y,z) & \text{se } x \neq y. \end{cases}$$

Provare che (X, d_z) *è uno spazio metrico (*d_z *è talvolta detta "metrica delle ferrovie francesi").*

Suggerimento. Dati tre punti $x, y, s \in X$ si valutino le diverse casistiche a seconda che i punti siano uguali, distinti o parzialmente distinti, allo scopo di verificare la validità della disuguaglianza triangolare. ■

(1.5) Esercizio *Sia* ℓ^2 *l'insieme delle successioni* $x = (x_1, .., x_k, ..)$ *tali che*

$$\sum_{i=1}^{+\infty} x_i^2 < +\infty,$$

e poniamo per ogni $x, y \in \ell^2$

$$d_2(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{+\infty} (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Provare che (ℓ^2, d_2) *è uno spazio metrico.*

(1.6) Esercizio *Sia* ℓ^∞ *l'insieme delle successioni* $x = (x_1, .., x_k, ..)$ *tali che*

$$\sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i| < +\infty,$$

e poniamo per ogni $x, y \in \ell^\infty$

$$d_\infty(x,y) = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i - y_i| .$$

Provare che (ℓ^∞, d_∞) *è uno spazio metrico.*

(1.7) Esercizio *Sia* (X,d) *uno spazio metrico ed* $E \subseteq X$. *Provare che* $\operatorname{diam}(E) < +\infty$ *se e solo se per ogni* $x \in E$ *esiste* $r(x) > 0$ *con*

$$R := \sup\{r(x) : x \in E\} < +\infty,$$

tale che $E \subseteq B(x, r(x))$.

Risoluzione. Il diametro di un insieme non può essere superiore a due volte il raggio di una palla che lo contiene. Pertanto il diametro di E non può essere maggiore di R ed è quindi finito.

Viceversa, sia E un insieme tale che $D := \operatorname{diam}(E) < \infty$. Sia $x \in E$, e sia $l(x) := \sup\{d(x,y) : y \in E\}$. Ovviamente $l(x) \le D$. Se $\varepsilon > 0$, la palla centrata in x di raggio $l(x)+\varepsilon$ contiene E. ■

(1.8) Esercizio *Se* (X,d) *è uno spazio metrico, dimostrare che*

$$|d(x,z) - d(y,u)| \le d(x,y) + d(z,u), \qquad x,y,z,u \in X,$$

$$|d(x,z) - d(y,z)| \le d(x,y), \qquad x,y,z \in X.$$

Risoluzione. Cominciamo dalla seconda disuguaglianza. Per la disuguaglianza triangolare si ha che $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$. Questo implica che

$$d(x,y) \ge d(x,z) - d(z,y),$$

per ogni $x,y,z \in X$. Essendo $d(x,y) \ge 0$ la disuguaglianza è significativa se $d(x,z) - d(z,y) \ge 0$. Supponiamo che $d(x,z) - d(z,y) < 0$. Allora moltiplicando per -1 entrambi i membri della disuguaglianza si ottiene

$$d(x,y) \ge d(y,z) - d(z,x).$$

Pertanto $d(x,y) \ge |d(x,z) - d(z,y)|$. Applicando questo risultato non sarà difficile ora per il lettore dimostrare anche la prima disuguaglianza. ■

(1.9) Esercizio *Dati* $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, *calcolare il diametro di* $[a,b]\times[c,d]$ *rispetto alla metrica euclidea di* $\mathbb{R}^2$ *e alle metriche*

$$d_1(x,y) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|, \qquad d_\infty(x,y) = \max\{x_1 - y_1, x_2 - y_2\}.$$

Risoluzione. Utilizzando la metrica euclidea i punti di $[a,b]\times[c,d]$ che hanno distanza maggiore sono i punti estremi alle due diagonali (che hanno la medesima lunghezza). Tale distanza (che è per definizione il diametro di $[a,b]\times[c,d]$) è uguale a $\sqrt{(b-a)^2+(d-c)^2}$.

Con la metrica d_1 i punti che hanno distanza maggiore sono gli stessi del caso precedente. Tuttavia è differente la loro distanza che è uguale a $|b-a|+|d-c|$.

Infine, nella metrica d_∞ le coppie di punti che hanno maggiore distanza sono tutte e sole le coppie di punti che giacciono lungo i lati più corti del rettangolo $[a,b]\times[c,d]$ (ovviamente un punto in un lato e un punto nell'altro!). Tali punti distano l'uno dall'altro la lunghezza del lato maggiore. Pertanto il diametro di $[a,b]\times[c,d]$ è dato da $\max\{|b-a|,|d-c|\}$. ■

(1.10) Esercizio *Se (X,d) uno spazio metrico $E\subseteq X$ ed $x\in X$, la "distanza" di x da E è definita ponendo*

$$d(x,E) = \inf\{d(x,y):\ y\in E\}.$$

Provare che per ogni $x,y\in X$

$$|d(x,E) - d(y,E)| \le d(x,y).$$

Risoluzione. Dimostriamo che, per ogni $x,y\in E$ si ha

$$d(x,E) \le d(x,y) + d(y,E).$$

La tesi seguirà poi applicando la seconda disuguaglianza dell'esercizio (1.8). Siano $x,y\in X$ fissati. Per definizione

$$d(x,E) = \inf\{d(x,z): z\in E\}.$$

Poichè X è uno spazio metrico, per la disuguaglianza triangolare si ha che

$$d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$$

per ogni $z\in E$. Pertanto

$$\begin{aligned} d(x,E) = \inf\{d(x,z): z\in E\} &\le \inf\{d(x,y)+d(y,z): z\in E\} \\ &= d(x,y) + \inf\{d(y,z): z\in E\} \\ &= d(x,y) + d(y,E). \end{aligned}$$

■

(1.11) Esercizio *Dimostrare che, posto per ogni* $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$,

$$d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|,$$

$(\overline{\mathbb{R}}, d)$ *è uno spazio metrico*. $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Suggerimento. Si definisca la funzione atan(x) in $\pm\infty$. Utilizzare la monotonia della funzione su tutto $\overline{\mathbb{R}}$ per dimostrare che $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$. Le altre proprietà si dimostrano in modo immediato. ∎

(1.12) Esercizio *Dimostrare che* $C^0([a, b])$ *munito della metrica*

$$d_2(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|^2 \, dx$$

non è uno spazio metrico completo.

Suggerimento. Si può ottenere un controesempio cercando una successione di funzioni continue che sia di Cauchy nella metrica d_2 ma convergente ad una funzione discontinua. A questo scopo si ripensi agli esempi già visti di successioni di funzioni continue puntualmente convergenti ad una funzione discontinua e si valuti quali di loro possono essere utili in questo caso. ∎

(1.13) Esercizio *Mostrare che* $\left(C^0([a, b]), d_\infty\right)$ *è uno spazio metrico completo.*

(1.14) Esercizio *Esibire una successione di Cauchy non convergente nello spazio* $]0, 1[$ *munito della metrica* $d(x, y) = |x - y|$.

(1.15) Esercizio *Provare che*

$$E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + \cos y > 1\right\},$$

è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^2$. *Calcolare* $\overline{E}$, ∂E *ed* $\mathbb{R}^2 \setminus E$.

Risoluzione. La funzione $f(x, y) = x^2 + \cos y$ è continua su $\mathbb{R}^2$. L'insieme E è la retroimmagine di $]1, +\infty[$ che è un aperto di $\mathbb{R}$. Pertanto E è un aperto di $\mathbb{R}^2$. Non è difficile osservare che la chiusura di E è data da

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \cos y \geq 1\},$$

mentre la frontiera di E è data dall'unione del grafico delle funzioni $g_1(y) = \sqrt{1-\cos y}$ e $g_2(y) = \sqrt{1-\cos y}$. Il complementare di E è l'insieme

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \cos y \leq 1\},$$

che è chiuso. ■

(1.16) Esercizio *Sia (X, d) uno spazio metrico e (x_h) una successione in X convergente a x. Provare che*

$$\{x_h : h \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$$

è un sottoinsieme chiuso in X.

Risoluzione. Secondo un noto teorema un insieme è chiuso se e solo se contiene tutti i suoi punti di accumulazione. L'insieme assegnato ha un solo punto di accumulazione (il limite della successione). Tale punto è contenuto nell'insieme che risulta pertanto chiuso. ■

(1.17) Esercizio *Se (X, d) uno spazio metrico e $E \subseteq X$, provare che*

$$\overline{E} = \{x \in X : d(x, E) = 0\}.$$

Risoluzione. Un punto appartiene alla frontiera di un insieme E se e solo se ogni suo intorno contiene sia punti di E che punti del suo complementare. Sia $x \in \overline{E}$ e supponiamo per assurdo che $d(x, E) > 0$. Questo implica che esiste un intorno di x (di diametro non superiore a $d(x, E)$) tutto contenuto in E (o tutto contenuto in E^c). Pertanto x non appartiene alla frontiera di E. Viceversa sia $d(x, E) = 0$ e supponiamo per assurdo che x non appartenga alla frontiera di E. Questo implica che esiste almeno un intorno di x che è interamente contenuto in E oppure in E^c. La distanza di x da E non può essere inferiore al diametro di questo intorno, e in particolare non può essere nulla. ■

(1.18) Esercizio *Nello spazio metrico (X, d) siano $A, B \subseteq X$. Per ciascuna delle seguenti affermazioni dire se è vera o falsa. Per le affermazioni false, fare un controesempio.*

(i) $A \subseteq B \Longrightarrow \operatorname{diam}(A) \leq \operatorname{diam}(B)$;

(ii) $\operatorname{diam}(A \cup B) = \max\{\operatorname{diam}(A), \operatorname{diam}(B)\}$;

(iii) $\operatorname{diam}(A) \le \operatorname{diam}(B) \Longrightarrow A \subseteq B$.

Risoluzione. (i) è banalmente vera. (ii) è falsa. Infatti, basta ad esempio prendere

$$A = [-1,0[, \quad B = [0,1].$$

Si ha $A \cup B = [-1,1]$ per cui

$$\operatorname{diam}(A \cup B) = 2, \qquad \operatorname{diam}(A) = \operatorname{diam}(B) = 1.$$

Con la medesima scelta di A e B si vede che anche l'affermazione (iii) non può essere vera. ■

(1.19) Esercizio *Sia (X,d) uno spazio metrico e $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione. Per ciascuna delle seguenti affermazioni dire se è vera o falsa*

(i) *f continua e limitata implica che f ammette massimo;*

(ii) *f Lipschitziana implica che f è continua e limitata;*

(iii) *f Lipschitziana implica che f manda insiemi limitati in insiemi limitati.*

Risoluzione. La (i) è falsa. Si prenda ad esempio $f(x) = \arctan(x)$ su tutto $\mathbb{R}$. Allora f è continua, limitata da $\pm\frac{\pi}{2}$, ma non ammette massimo assoluto su $\mathbb{R}$.

La (ii) è falsa. Si prenda ad esempio $f(x) = x$ su tutto $\mathbb{R}$. Allora, evidentemente f è Lipschitziana, continua, ma non limitata su $\mathbb{R}$.

La (iii) è vera. Infatti dalla disuguaglianza valida per le funzioni Lipschitziane di costante $c > 0$

$$\operatorname{diam}(f(C)) \le c \operatorname{diam}(C),$$

si deduce che insiemi limitati vengono applicati in insiemi limitati. ■

1.2 Limiti e continuità

(2.20) Esercizio *Dimostrare il seguente teorema*

Teorema 1 *Se p, q sono numeri naturali qualunque, allora*

$$o(x^p y^q) = o((\sqrt{x^2+y^2})^{p+q}), \qquad (x,y) \to (0,0).$$

Risoluzione. Consideriamo una funzione $g(x,y)$ tale che

$$g(x,y) = o(x^p y^q) \quad \text{per} \quad (x,y) \to (0,0),$$

cioè una funzione trascurabile rispetto a $x^p y^q$ per $(x,y) \to (0,0)$. Si vuole dimostrare che $g(x,y)$ è trascurabile anche rispetto a $(\sqrt{x^2+y^2})^{p+q}$, ovvero che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(x,y)}{(\sqrt{x^2+y^2})^{p+q}} = 0.$$

Infatti si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(x,y)}{(\sqrt{x^2+y^2})^{p+q}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(x,y)}{x^p y^q} \cdot \frac{x^p y^q}{(\sqrt{x^2+y^2})^{p+q}}.$$

Poichè, per ipotesi il primo fattore del secondo membro tende a zero per (x,y) che tende a $(0,0)$, valutiamo il secondo fattore. Passando alle coordinate polari (con polo in $(0,0)$) si ottiene

$$\frac{x^p y^q}{(\sqrt{x^2+y^2})^{p+q}} = \frac{\rho^p \cos^p\theta \cdot \rho^q \sin^q\theta}{\rho^{p+q}} = \cos^p\theta \cdot \sin^q\theta.$$

Dato che $|\cos\theta| \le 1$ e $|\sin\theta| \le 1$ per ogni $\theta \in \mathbb{R}$, sussiste la maggiorazione

$$\left| \frac{x^p y^q}{(\sqrt{x^2+y^2})^{p+q}} \right| \le 1.$$

Ciò ci consente di concludere la dimostrazione. ■

(2.21) Esercizio *Dimostrare il seguente teorema*

Teorema 2 *Nelle ipotesi del Teorema 1, e se $\varepsilon > 0$, allora*

$$x^p y^q = o((\sqrt{x^2+y^2})^{p+q-\varepsilon}), \qquad (x,y) \to (0,0).$$

(2.22) Esercizio *Calcolare, se esistono, i seguenti limiti*

1. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(xy)}{\log(1+x^2+y^2)}$; ***2.*** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y^2\log(x)}{(x-1)^2+y^2}$;

3. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$; ***4.*** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2y^2+y^4}$;

5. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+x\sin^2(y)}{x^2+y^2}$; ***6.*** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} y\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$;

7. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$; ***8.*** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+xy+y^2}}$;

9. $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2}$; ***10.*** $\displaystyle\lim_{|(x,y,z)|\to+\infty} \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+z^2}$;

11. $\displaystyle\lim_{|(x,y,z)|\to+\infty} \frac{1}{xz}$; ***12.*** $\displaystyle\lim_{|(x,y,z)|\to+\infty} x^4+y^2+z^2-x+3y-z$;

13. $\displaystyle\lim_{|(x,y,z)|\to+\infty} x^4+y^2+z^2-x^3+xyz-x+4.$

Risoluzione. **1.** Utilizzando le formule di Taylor otteniamo che

$$1-\cos(xy) = \frac{(xy)^2}{2} + o(x^2y^2) \qquad (x,y)\to(0,0),$$

e che

$$\log(1+x^2+y^2) = x^2+y^2+o(\sqrt{(x^2+y^2)^2}), \qquad (x,y)\to(0,0).$$

Pertanto

$$f(x,y) = \frac{\frac{1}{2}x^2y^2+o(x^2y^2)}{(x^2+y^2)+o(\sqrt{(x^2+y^2)^2})}, \qquad (x,y)\to(0,0).$$

In virtù dei Teoremi 1 e 2 visti negli esercizi precedenti si ottiene che, per $(x,y)\to(0,0)$,

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{\frac{1}{2}x^2y^2+o(\sqrt{(x^2+y^2)^4})}{(x^2+y^2)+o(\sqrt{(x^2+y^2)^2})} \\ &= \frac{o(\sqrt{(x^2+y^2)^2})}{\sqrt{(x^2+y^2)^2}+o(\sqrt{(x^2+y^2)^2})} \to 0. \end{aligned}$$

2. Osserviamo preliminarmente che il limite assegnato è equivalente al seguente

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2\log(1+x)}{x^2+y^2}.$$

Per la formula di Taylor abbiamo che $\log(1+x) = x+o(x)$ se $x\to 0$. Pertanto, utilizzando ancora i teoremi precedenti abbiamo che, per $(x,y)\to(0,0)$,

$$\begin{aligned}\frac{y^2\log(1+x)}{x^2+y^2} &= \frac{xy^2+o(xy^2)}{\sqrt{(x^2+y^2)^2}}\\ &= \frac{xy^2+o(\sqrt{(x^2+y^2)^3})}{\sqrt{(x^2+y^2)^2}}\\ &= \frac{o(\sqrt{(x^2+y^2)^2})}{\sqrt{(x^2+y^2)^2}} \to 0.\end{aligned}$$

3. La funzione di cui si richiede il limite è una funzione radiale. Passando a coordinate polari il limite diventa equivalente al seguente

$$\lim_{\rho\to 0^+}\frac{\sin(\rho^2)}{\rho^2}$$

che risulta evidentemente 1.

4. La funzione di cui si richiede di calcolare il limite è definita per $y \neq 0$. Per la formula di Taylor si ha

$$\sin(x^2+y^2) = x^2+y^2+o(\sqrt{(x^2+y^2)^4}), \qquad (x,y)\to(0,0).$$

Pertanto $(x,y)\to(0,0)$,

$$\frac{\sin(x^2+y^2)}{y^2x^2+y^4} = \frac{1}{y^2}\frac{\sqrt{(x^2+y^2)^2}+o(\sqrt{(x^2+y^2)^4})}{\sqrt{(x^2+y^2)^2}} \to +\infty.$$

5. Il limite può essere calcolato in due modi.

a) Dato che è $|\sin(y)| \le |y|$ per ogni $y \in \mathbb{R}$, vale la maggiorazione

$$|f(x,y)| = \left|\frac{x^3+x\sin^2(y)}{x^2+y^2}\right| \le \frac{|x^3|+|x||\sin(y)|^2}{x^2+y^2} \le \frac{|x^3|+|x||y|^2}{x^2+y^2}.$$

Passando in coordinate polari si ha

$$\begin{aligned}|f(x,y)| = \frac{|x^3|+|x||y|^2}{x^2+y^2} &= \frac{\rho^3|\cos^3(\theta)|+\rho^3|\cos(\theta)||\sin(\theta)|^2}{\rho^2}\\ &= \rho(|\cos^3(\theta)|+|\cos(\theta)||\sin(\theta)|^2) \le 2\rho.\end{aligned}$$

Dunque $f(x,y)\to 0 \qquad (x,y)\to(0,0)$.

b) Utilizzando la formula di Taylor si ha che $\sin(y) = y + o(y)$ per $y \to 0$. Pertanto si ha

$$\begin{aligned}\frac{x^3+x\sin^2(y)}{x^2+y^2} &= \frac{x^3+x(y+o(y))^2}{x^2+y^2} = \frac{x^3+xy^2+x(o(y))^2+2xyo(y)}{x^2+y^2}\\ &= \frac{x^3+xy^2+o(xy^2)+o(2xy^2)}{x^2+y^2}\\ &= \frac{o(x^2+y^2)+o(x^2+y^2)+o(x^2+y^2)^{3/2}+o(x^2+y^2)^{3/2}}{x^2+y^2}\\ &= \frac{o(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \to 0, \qquad (x,y)\to(0,0).\end{aligned}$$

6. $|f(x,y)| = |y||\mathrm{atan}(y/x)| \le |y|\frac{\pi}{2} \to 0, \qquad (x,y) \to (0,0).$

7. Riscriviamo la funzione della quale si deve calcolare il limite in coordinate polari. Essa diventa

$$\rho^2 \sin(\theta)\cos(\theta)(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)).$$

Pertanto

$$|f(\rho,\theta)| \le 4\rho^2 \to 0, \qquad \rho \to 0^+.$$

8. Utilizzando le coordinate polari la funzione di cui è richiesto il limite diventa

$$\frac{\rho^2 \cos(\theta)\sin(\theta)}{\rho\sqrt{1+\cos(\theta)\sin(\theta)}}.$$

Tenendo conto del fatto che

$$-\frac{1}{2} \le \sin(\theta)\cos(\theta) \le \frac{1}{2}$$

si deduce che

$$|f(\rho,\theta)| \le \frac{\sqrt{2}}{2}\rho \to 0, \qquad \rho \to 0^+.$$

9. Si ha

$$\begin{aligned} |f(x,y)| = |z|\frac{|x||y|}{x^2+y^2} &= |z|\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &\le |z| \to 0, \qquad (x,y,z) \to (0,0,0). \end{aligned}$$

10. Il limite non esiste. Il sospetto deve venire osservando che al numeratore non è presente la variabile z, mentre al denominatore non è presente la variabile y. Pertanto è ragionevole valutare la possibilità di usare questo fatto per costruire due 'percorsi' per le variabili lungo i quali la funzione abbia due limiti differenti.

Il primo percorso è $(x,0,0)$. Si ottiene

$$f(x,0,0) = x^2 \to +\infty, \qquad x \to \infty.$$

Per il secondo percorso si utilizzerà qualcosa del tipo $(0, z^\alpha, z)$. Variando il parametro α varia la potenza del numeratore mentre resta inalterata quella del denominatore. Sarà sufficiente cercare un valore α per il quale la potenza del denominatore sia superiore a quella del numeratore. Il limite lungo questo percorso farà zero e pertanto il limite della funzione non esiste. Un semplice calcolo mostra che è sufficiente prendere $\alpha < 1/4$. Scegliendo, ad esempio, $\alpha = 1/8$ si ottiene

$$f(0, z^{1/8}, z) = z^{-3/2} \to 0, \qquad z \to +\infty.$$

11. Il limite non esiste. Con un'analisi superficiale il limite sembrerebbe essere zero (tale è ad esempio sulla curva (x,x,x). Infatti

$$f(x,x,x) = \frac{1}{x^2} \to 0, \qquad x \to +\infty).$$

Tuttavia la mancanza della variabile y dalla definizione della funzione ha delle ripercussioni notevoli sul limite della funzione stessa. Infatti valutandola su un percorso del tipo (y^{-1}, y, y^{-1}) osserviamo che $|(y^{-1}, y, y^{-1})| \to +\infty$ se $y \to +\infty$ e che

$$f(y^{-1}, y, y^{-1}) = y^2 \to +\infty, \qquad y \to +\infty.$$

12. La funzione tende a $+\infty$ se $|(x,y,z)| \to +\infty$. Infatti la funzione assegnata può essere vista come la somma di tre funzioni di una sola variabile. Precisamente $f(x,y,z) = f_1(x) + f_2(y) + f_3(z)$ dove $f_1(x) = x^4 - x$, $f_2(y) = y^2 + 3y$ e $f_3(z) = z^2 - z$. Ognuna di queste funzioni è limitata inferiormente e tende a $+\infty$ se la rispettiva variabile tende a $\pm\infty$. Se $|(x,y,z)| \to +\infty$ allora almeno una delle tre variabili tende a $\pm\infty$. Indipendentemente da quale sia ed indipendentemente dal comportamento delle altre due la funzione tende comunque a $+\infty$.

13. Il limite della funzione assegnata non esiste. A differenza dell'esercizio precedente, infatti, non è garantita la sua positività. Pertanto si può tentare di produrre due percorsi che portino la funzione, l'uno verso $+\infty$, e l'altro verso $-\infty$. Il primo percorso è abbastanza evidente. Basta infatti considerare

$$f(x,0,0) = x^4 - x^3 - x \to +\infty, \qquad x \to +\infty.$$

Per ottenere il secondo percorso sarà cruciale il ruolo del termine xyz che non è limitato inferioremente. Inoltre, essendo il prodotto di tutte le variabili, c'è la possiblità di renderlo l'addendo dominante ai fini del calcolo del limite. Precisamente questo accade considerando il percorso (x, x^2, x^2) con $x \to -\infty$. Infatti si ha

$$f(x, x^2, x^2) = 3x^4 - x^3 + x^5 - x + 4 \to -\infty, \qquad x \to -\infty.$$

$\blacksquare$

(2.23) Esercizio *Determinare per quali valori di $n \in \mathbb{N}$ si ha :*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x|y|^{\frac{1}{n}}}{x^2 + y^2 + |y|} = 0 \quad [n = 1].$$

Risoluzione. Poichè $x^2 + y^2 + |y| \geq |y|$ abbiamo la seguente maggiorazione

$$|f(x,y)| \le |x||y|^{\frac{1}{n}-1}.$$

Pertanto se $n=1$ $f(x,y) \to 0$ per $(x,y) \to (0,0)$. Se invece $n \ge 2$ il limite non può essere zero. Infatti è sufficiente osservare che, ad esempio,

$$f(x,x^2) = \frac{x|x|^{\frac{2}{n}}}{2x^2+x^4} \sim \frac{1}{2}|x|^{\frac{2}{n}-1} \to \begin{cases} \frac{1}{2}, & n=2, \\ +\infty, & n>2, \end{cases}$$

per $x \to 0$. ■

(2.24) Esercizio *Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha :*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|y|^\alpha}{x} e^{-\frac{y^2}{x^2}} = 0.$$

Risoluzione. Utilizziamo le coordinate polari. Si ottiene

$$|f(\rho,\theta)| = \rho^{\alpha-1}|\sin^{\alpha-1}(\theta)||\tan(\theta)|e^{-\tan^2(\theta)}.$$

Poichè la funzione $g(t) = |t|e^{-t^2}$ è limitata su $\mathbb{R}$ (precisamente $0 \le g(t) \le 1/\sqrt{2}e^{-1/2}$), se ne deduce che, se $\alpha > 1$ allora la funzione assegnata tende a zero per $(x,y) \to (0,0)$. Per $\alpha \le 1$, invece, la funzione non può tendere a zero per $(x,y) \to (0,0)$. Per dimostrarlo è sufficiente osservare che

$$f(x,x) = |x|^{\alpha-1}e^{-1} \to \begin{cases} e^{-1}, & \alpha = 1, \\ +\infty, & \alpha > 1 \end{cases}$$

per $x \to 0$. ■

(2.25) Esercizio *Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha :*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y\sin(x) - x\cos(y)}{(x^2+y^2)^\alpha} = 0.$$

Risoluzione. Utilizzando gli sviluppi di Taylor sappiamo che $\sin(x) = x + o(x^2)$ per $x \to 0$ e che $\cos(y) = 1 + o(y)$ per $y \to 0$. Pertanto si può scrivere

$$\begin{aligned} y\sin(x) - x\cos(y) &= y(x+o(x^2)) - x(1+o(y)) = xy - x + o(x^2y) + o(xy) \\ &= xy - x + o(\sqrt{(x^2+y^2)^2}) \qquad (x,y) \to (0,0). \end{aligned}$$

Pertanto si ha

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \frac{y\sin(x) - x\cos(y)}{(\sqrt{x^2+y^2})^{2\alpha}} = \frac{xy - x + o(\sqrt{(x^2+y^2)^2})}{(\sqrt{x^2+y^2})^{2\alpha}} \\
&= \frac{o(\sqrt{x^2+y^2}) + o((\sqrt{x^2+y^2})^{1-\varepsilon}) + o((\sqrt{x^2+y^2})^2)}{(\sqrt{x^2+y^2})^{2\alpha}} \\
&= \frac{o((\sqrt{x^2+y^2})^{1-\varepsilon})}{(\sqrt{x^2+y^2})^{2\alpha}} \\
&= o((\sqrt{x^2+y^2})^{1-2\alpha-\varepsilon}), \quad (x,y) \to (0,0)
\end{aligned}$$

per ogni $\varepsilon > 0$. Distinguiamo i due casi $1-2\alpha > 0$ e $1-2\alpha \leq 0$.

Sia $\alpha < 1/2$. Allora $o((\sqrt{x^2+y^2})^{1-2\alpha-\varepsilon}) \to 0$ per $(x,y) \to (0,0)$, pur di prendere $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo.

Se invece $\alpha \geq 1/2$ la funzione non tende a zero. Infatti basta osservare che

$$f(x,0) = \frac{-x}{x^{2\alpha}} = -\frac{1}{x^{2\alpha-1}} \to \begin{cases} \infty, & \alpha > 1/2, \\ -1, & \alpha = 1/2. \end{cases}$$

Pertanto il limite, ammesso che esista, non potrà mai essere zero. ■

(2.26) Esercizio *Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite :*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{1-\frac{\alpha}{2}} \left(e^{-\frac{y^2}{x^2}} + 1\right) = \ell.$$

Risoluzione. Passiamo a coordinate polari. Si ha

$$\begin{aligned}
f(\rho,\theta) &= \rho^{2\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \left(e^{-\tan^2(\theta)+1}\right) \\
&= \rho^{2-\alpha}\left(1 + e^{-\tan^2(\theta)}\right).
\end{aligned}$$

Pertanto, se $\alpha < 2$ allora $f(\rho,\theta) \to 0$ per $\rho \to 0^+$.

Se $\alpha = 2$ allora la funzione assegnata diventa

$$f(x,y) = e^{\frac{y^2}{x^2}+1} + 1,$$

la quale non ammette limite per $(x,y) \to (0,0)$. Infatti $f(x,x) = e^{-1} + 1$, mentre

$$f(x,x^2) = e^{-x^2} + 1 \to 1, \qquad x \to 0.$$

Sia ora $\alpha > 2$. Utilizzando nuovamente le coordinate polari ritroviamo che

$$f(\rho,\theta) = \rho^{2-\alpha}\left(1+e^{-\tan^2(\theta)}\right).$$

Poichè $e^{-\tan^2(\theta)} > 0$, allora

$$f(\rho,\theta) > \rho^{2-\alpha} \to +\infty, \qquad \rho \to 0^+.$$

■

(2.27) Esercizio *Dire per quali valori di* $\alpha,\beta,\gamma > 0$ *il limite :*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{(3x^2+5y^2)^{\frac{\gamma}{2}}},$$

esiste finito.

Risoluzione. Osserviamo preliminarmente che vale la seguente maggiorazione

$$\begin{aligned}\frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{(3x^2+5y^2)^{\gamma/2}} &\le \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{\sqrt{(x^2+y^2)^\gamma}}\\ &= \frac{o(\sqrt{(x^2+y^2)^{\alpha+\beta-\varepsilon}})}{\sqrt{(x^2+y^2)^\gamma}}\end{aligned}$$

per ogni $\varepsilon > 0$. Dunque, se $\gamma < \alpha+\beta$ allora il limite vale zero, scegliendo opportunamente ε.

Se $\gamma = \alpha+\beta$, la funzione non ammette limite. Infatti si ha

$$\begin{aligned} f(x,x) &= \frac{|x|^{\alpha+\beta}}{(8x^2)^{\gamma/2}} = \frac{1}{8}\\ f(x,x^2) &= \frac{|x|^{\alpha+2\beta}}{3x^\gamma+5x^{2\gamma}} \sim |x|^{\alpha+2\beta-\gamma} = x^\beta \to 0.\end{aligned}$$

Infine, se $\gamma > \alpha+\beta$ il limite della funzione per $(x,y)\to(0,0)$, ammesso che esiste, non può essere finito. Infatti

$$|f(x,x)| = \frac{|x|^{\alpha+\beta}}{8x^\gamma} = \frac{1}{8}|x|^{\alpha+\beta-\gamma} \to +\infty, \qquad x \to 0.$$

■

(2.28) Esercizio *Dire se è continua in* $(0,0)$ *la funzione*

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{se } x\neq 0\\ y & \text{se } x=0\,.\end{cases}$$

Risoluzione. La funzione assegnata non può essere continua. Infatti dovrebbe essere, ad esempio, $f(x,1)\to 1$ per $x\to 0$. Invece

$$\begin{aligned} f(x,1) &= (1+x^2)\mathrm{atan}\left(\frac{1}{x}\right)\\ &= \mathrm{atan}\left(\frac{1}{x}\right)+x^2\mathrm{atan}\left(\frac{1}{x}\right)\to\begin{cases}\pi/2, & x\to 0^+,\\ -\pi/2, & x\to 0^-.\end{cases}\end{aligned}$$

■

(2.29) Esercizio *Dire se è continua nei punti dell'asse y la funzione*

$$f(x,y)=\begin{cases}(x-y)e^{-\frac{y^2}{x^2}} & \text{se } x\neq 0\\ 0 & \text{se } x=0\,.\end{cases}$$

(2.30) Esercizio *Dire per quali valori di $\alpha\in\mathbb{R}^+$ la funzione*

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{|y|^\alpha}{x}e^{-\frac{y^2}{x^2}} & \text{se } x\neq 0\\ 0 & \text{se } x=0\,,\end{cases}$$

è continua in $(0,0)$.

(2.31) Esercizio *Fare l'esempio di una funzione di variabile reale uniformemente continua ma non lipschitziana*.

(2.32) Esercizio *Si consideri la funzione*

$$f(x,y):=\int_0^1\frac{1-e^{-xyt^2}}{t}\,dt\,.$$

Calcolare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$

Suggerimento. Utilizzare gli sviluppi di Taylor e i risultati dei teoremi che aprono questa sezione. ■

(2.33) Esercizio *Studiare la continuità della seguente funzione*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+2y^2}{x^2+y^4} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{per } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Risoluzione. Evidentemente f è continua ovunque fuori dall'origine . Vediamo ora che f non può essere continua in $(0,0)$. In effetti risulta

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{x^2+2y^2}{x^2+y^4} = 1\,,$$

e

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} \frac{x^2+2y^2}{x^2+y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{2}{y^2} = +\infty\,,$$

da cui la tesi . ■

(2.34) Esercizio *Si consideri la funzione*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{x+y} & \text{se } x+y \neq 0 \\ 0 & \text{se } x+y = 0\,. \end{cases}$$

Dire se f è continua nel punto $(-1,1)$.

Risoluzione. Con le coordinate polari centrate in $(-1,1)$

$$\begin{cases} x = -1+\varrho\cos(\vartheta) \\ y = 1+\varrho\sin(\vartheta) \end{cases}$$

dove $\varrho > 0$ e $\vartheta \in]0,2\pi[$, si ottiene

$$f(x,y) = F(\varrho,\vartheta) = \frac{2+\varrho^2+2\varrho(\sin(\vartheta)-\cos(\vartheta))}{\varrho(\sin(\vartheta)+\cos(\vartheta))}\,.$$

da cui si vede che non può essere

$$\lim_{\varrho\to 0} F(\varrho,\vartheta) = 0,$$

per cui la funzione non è continua . ■

(2.35) Esercizio *Calcolare il seguente limite*

$$\lim_{\varrho\to+\infty} e^{-3\varrho} \iint_{B_\varrho} e^{|x|+|y|}\, dx\, dy\,,$$

dove

$$B_\varrho = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \le \varrho^2\right\}.$$

Risoluzione. Tenuto conto che

$$\forall x,y\in\mathbb{R}:\ |x|+|y| \le \sqrt{2}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}},$$

si deduce per ogni $\varrho > 0$

$$e^{-3\varrho} \iint_{B_\varrho} e^{|x|+|y|}\, dx\, dy \le e^{-3\varrho} \iint_{B_\varrho} e^{\sqrt{2}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}\, dx\, dy \le 4\pi e^{-(3-\sqrt{2})\varrho}\varrho^2,$$

da cui segue che

$$\lim_{\varrho\to+\infty} e^{-3\varrho} \iint_{B_\varrho} e^{|x|+|y|}\, dx\, dy = 0\,.$$

Lo stesso risultato si poteva ottenere trasformando l'integrando in coordinate polari . ■

1.3 Teorema delle contrazioni

(3.36) Esercizio *Sia (X,d) uno spazio metrico completo e $f : X \to X$ una applicazione. Supponiamo che esista $m \geq 1$ tale che*

$$f^m = \overbrace{f \circ \cdots \circ f}^{m-volte},$$

sia una applicazione Lipschitziana di costante $c \in [0,1[$.

Allora esiste uno ed un solo $\xi \in X$ tale che $f(\xi) = \xi$ e, per ogni $y \in X$ si ha $f^n(y) \to x$ per $n \to +\infty$.

Risoluzione. Sia m come nell'ipotesi. Per il teorema delle contrazioni esiste un unico $x \in X$ tale che $f^m(x) = x$. Inoltre, per ogni $y \in X$ si ha $f^{mn}(y) \to x$ per $n \to +\infty$ (perchè??). Poichè

$$f^m(f(x)) = f^{m+1}(x) = f(f^m(x)) = f(x)$$

, segue che anche $f(x)$ è punto fisso di f^m, il che implica $x = f(x)$. D'altra parte f non può avere altri punti fissi, poichè ogni punto fisso per f lo è anche per f^m.

La tesi di approssimazione è verificata se si prova che, per ogni $\tilde{y} \in Y$ e per ogni $i = 0,1,2,\ldots,m-1$ fissati, si ha $f^{mn+i}(\tilde{y}) \to x$ per $n \to +\infty$ (infatti la successione $(f^n(y))$ verrebbe 'ripartita' in un numero FINITO (!) di sottosuccessioni, ciascuna con limite x). Si ha $f^{mn+i}(\tilde{y}) = f^{mn}(f^i(\tilde{y}))$. Posto $y = f^i(\tilde{y})$, la nostra affermazione è provata allora dal fatto che $f^{mn}(y) \to x$ per ogni $y \in X$. ∎

(3.37) Esercizio *Si consideri $(C^0([a,b]), d_\infty)$ con $b - a < 1$ e sia*

$$T : C^0([a,b]) \to C^0([a,b]),$$

l'operatore definito ponendo per ogni $f \in C^0([a,b])$

$$\forall x \in [a,b] : \ (Tf)(x) := \int_a^x |f(t)|\, dt.$$

Dimostrare che esiste una e una sola $f \in C^0([a,b])$ tale che $Tf = f$.

Risoluzione. Occorre verificare che T sia una contrazione su $(C^0([a,b]), d_\infty)$, e per farlo dobbiamo calcolare la costante di Lipschitz di T e dimostrare che è inferiore a 1. Si ha

$$
\begin{aligned}
\|Tf - Tg\|_\infty &= \sup_{x\in[a,b]} |(Tf)(x) - (Tg)(x) \\
&= \sup_{x\in[a,b]} \left| \int_a^x |f(t)|dt - \int_a^x |g(t)|dt \right| \\
&\le \sup_{x\in[a,b]} \int_a^x ||f(t)| - |g(t)||dt \\
&\le \sup_{x\in[a,b]} \int_a^x |f(t) - g(t)|dt \\
&\le (b-a)\|f-g\|_\infty .
\end{aligned}
$$

Poichè, per ipotesi, $(b-a) < 1$ si ottiene che T è una contrazione. ■

(3.38) Esercizio *Si consideri* $(C^0([a,b]), d_\infty)$ *e sia*

$$
T : Y \to C^0([a,b]), \quad Y := \left\{ f \in C^0([a,b]) : \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \le M \right\}
$$

l'operatore definito ponendo per ogni $f \in C^0([a,b])$

$$
\forall x \in [a,b] : \; (Tf)(x) := \int_a^x |f(t)|^2 \, dt.
$$

Dimostrare che se $M(b-a) < \frac{1}{2}$ *esiste una e una sola* $f \in C^0([a,b])$ *tale che* $Tf = f$ *.*

Suggerimento. Applicare il procedimento dell'esercizio precedente, determinando l'intervallo di valori che M deve assumere affinchè T risulti una contrazione. ■

(3.39) Esercizio *L'applicazione*

$$
T : C^0([0,1]) \to C^0([0,1])
$$

definita ponendo

$$
\forall x \in [0,1] : \; (Tf)(x) := \int_0^x \arctan(txf(t))\, dt - g(x),
$$

con $g \in C^0([0,1])$*, è una contrazione ?*

Risoluzione. L'applicazione assegnata non è una contrazione. Siano infatti, ad esempio $f(x) \equiv 1$ e $h(x) \equiv -1$. Allora si ha

$$\begin{aligned}\|Tf - Th\|_\infty &= \sup_{x\in[0,1]} \left| \int_0^x (\mathrm{atan}(tx) - \mathrm{atan}(-tx))\,dt \right| \\ &= \sup_{x\in[0,1]} 2\int_0^x \mathrm{atan}(tx)\,dt.\end{aligned}$$

Per ipotesi $0 \leq (tx) \leq 1$. Pertanto

$$tx \geq \mathrm{atan}(tx) \geq \frac{4}{\pi} tx, \qquad 0 \leq tx \leq 1.$$

Dunque

$$\begin{aligned}\|Tf - Th\|_\infty &\geq 2 \sup_{x\in[0,1]} \int_0^x \frac{4}{\pi} tx\,dt \\ &= \sup_{x\in[0,1]} \frac{4}{\pi} x^3 = \frac{4}{\pi} > 1.\end{aligned}$$

Dunque T non è una contrazione. ∎

(3.40) Esercizio *Sia $T : C^0([-1,1]) \to C^0([-1,1])$ l'applicazione definita ponendo*

$$\forall x \in [-1,1]: \ (Tf)(x) = \frac{x}{2} f\left(\frac{x}{2}\right).$$

Provare che T ha uno e un solo punto fisso.

1.4 Successioni di funzioni

(4.41) Esercizio *Si consideri la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita ponendo*

$$f_n(x) = \int_1^n \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt.$$

Provare che f_n è continua e studiare la convergenza puntuale ed uniforme di (f_n).

Risoluzione. Siano $x \in \mathbb{R}$ e $h \in \mathbb{R}_+$. Si ha

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_n(x+h)| &= \left| \int_1^n \frac{e^{-xt}(1-e^{-ht})}{1+t^2} dt \right| \\ &\le \int_1^n \frac{e^{-xt}|1-e^{-ht}|}{1+t^2} dt \\ &\le h \int_1^n \frac{te^{-xt}}{1+t^2} \to 0, \qquad h \to 0. \end{aligned}$$

Per quanto riguarda la convergenza puntuale è evidente che se $x < 0$ l'integrale che definisce le f_n diverge se $n \to 0$. Pertanto la successione f_n converge puntualmente su $[0,+\infty[$. Non è possibile esprimere la funzione limite f per la quale vale tuttavia la seguente stima

$$0 < f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt \le \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Nell'intervallo $[0,+\infty[$ la convergenza è anche uniforme, come mostra la seguente catena di disuguaglianze.

$$\begin{aligned} \sup_{[0,+\infty[} |f_n(x) - f(x)| &= \sup_{[0,+\infty[} \left| \int_1^n \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt \right| \\ &= \sup_{[0,+\infty[} \int_n^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt \\ &= \int_n^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \frac{\pi}{2} - \operatorname{atan}(n) \to 0, \qquad n \to +\infty. \end{aligned}$$

■

(4.42) Esercizio *Si consideri la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita ponendo*

$$f_n(x,y) = \frac{2^n(x+y)}{1+n2^n(x^2+y^2)}.$$

Studiare la convergenza puntuale ed uniforme di (f_n) *.*

Risoluzione. La successione f_n converge puntualmente alla funzione nulla su tutto $\mathbb{R}^2$. Infatti $f_n(0,0) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e, se $(x, y) \neq (0,0)$ si ha

$$|f_n(x, y)| \leq \frac{|x + y|}{n(x^2 + y^2)} \to 0, \qquad n \to +\infty.$$

La convergenza non può essere uniforme su tutto $\mathbb{R}^2$. Piv̌recisamente i problemi si localizzano nell'origine. La definizione delle f_n (osservando in particolare il denominatore), ci suggerisce di valutare la convergenza uniforme lungo una successione di punti del tipo $(x, y) = (1/\sqrt{n2^n}, 0)$. La successione si rivela effettivamente 'patologica'. Infatti si ha

$$\sup_{\mathbb{R}^2} |f_n(x, y)| \geq |f_n(1/\sqrt{n2^n}, 0)| = \frac{2^n}{2\sqrt{n2^n}} \to +\infty, \qquad n \to +\infty.$$

Occorre pertanto rimuovere un intorno dell'origine. Per semplicità rimuoviamo un intorno circolare di $(0,0)$ e, passando a coordinate polari, valutiamo la convergenza uniforme su insiemi del tipo $\mathbb{R}^2 \setminus B_{\overline{\rho}} := \{(\rho, \theta) \in (0, \overline{\rho}) \times (0, 2\pi)\}$, con $\overline{\rho} > 0$. Non è difficile verificare che

$$|f_n(\rho, \theta)| \leq \frac{2^n \rho}{1 + n2n\rho^2}.$$

Derivando rispetto a ρ si verifica che, per $\rho > 0$, la funzione $2^n\rho(1 + n2^n\rho^2)^{-1}$ ha un massimo assoluto in $\rho = 1/\sqrt{n2^n}$. Pertanto, se n è abbastanza grande si ha

$$\sup_{\rho \geq \overline{\rho}} |f_n(\rho, \theta)| \leq \frac{2^n\overline{\rho}}{1 + n2^n\overline{\rho}} \to 0, \qquad n \to +\infty.$$

■

(4.43) Esercizio *Dimostrare il seguente* ***Teorema****(Convergenza dominata per l'integrale di Riemann) Sia* $]a, b[$ *un intervallo di* $\mathbb{R}$ *con* $-\infty < a < b < +\infty$, *una successione di funzioni reali equi-limitate integrabili su* $]a, b[$, *uniformemente convergente ad* f *su ogni compatto in* $]a, b[$. *Allora* f *è integrabile su* $]a, b[$ *e si ha*

$$\int_a^b f_n \to \int_a^b f.$$

Commento. Se (f_n) è una successione di funzioni reali (Riemann) integrabili su $]a, b[$ puntualmente convergente su $]a, b[$ ad una funzione f, non è detto che f sia integrabile su $]a, b[$ o che, nel caso lo sia, si abbia $\int_a^b f_n \to \int_a^b f$ (documentare con esempi queste affermazioni!). È noto però che le suddette implicazioni sussistono nel caso la convergenza sia uniforme. Il teorema appena presentato permette di indebolire questa ipotesi. ■

(4.44) Esercizio *Sia $\varphi(y) = e^{-y}\log(y)$. Studiare la convergenza della successione di funzioni $f_n(x) = \varphi(nx)$. Calcolare poi*

$$\lim_n \int_0^1 f_n(x)\,dx.$$

Suggerimento. Attraverso lo studio della convergenza uniforme si osservi come non sia possibile scambiare l'operazione di limite con quella di integrale. Per farlo sarà necessario fare affidamento sul precedente teorema, verificando che la successione di funzioni assegnata ha le ipotesi necessarie. ■

(4.45) Esercizio *Studiare la convergenza della successione di funzioni*

$$f_n(x) = e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

sull'intervallo $[0, +\infty[$.

(4.46) Esercizio *Si consideri la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da*

$$f_n(x) = nxe^{-n^2x^2},$$

e si studi la convergenza puntuale uniforme.

Risoluzione. Non è difficile osservare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ fissato la successione numerica $f_n(x)$ converge a zero. Pertanto f_n converge puntualmente alla funzione nulla su $\mathbb{R}$.

La convergenza, tuttavia, non può essere uniforme in alcun intorno contenente $x = 0$. Infatti la definizione stessa delle f_n ci suggerisce di valutare le funzioni lungo le successioni 'patologiche' $x = \pm\frac{1}{n}$. Si ha

$$|f_n(\pm 1/n)| = e^{-1} \not\to 0, \qquad n \to +\infty.$$

Ciascuna f_n è dispari. Valutiamo la convergenza uniforme su intervalli del tipo $[\varepsilon, +\infty[$ con $\varepsilon > 0$. Il risultato, qualunque esso sia, sarà il medesimo per gli intervalli del tipo $]-\infty, -\varepsilon]$, con $\varepsilon > 0$.

Lo studio della derivata prima delle funzioni che compongono la successione ci dice che, per ogni $n \in \mathbb{N}$ la funzione f_n ha un massimo assoluto in $x = \frac{1}{\sqrt{2}n}$. Pertanto, per n sufficientemente grande $\frac{1}{\sqrt{2}n} < \varepsilon$ e dunque, per n grande

$$\sup_{[\varepsilon,+\infty[} |f_n(x)| = |f_n(\varepsilon)| \to 0, \qquad n \to +\infty.$$

La convergenza è pertanto uniforme sugli insiemi del tipo $]-\infty,-\varepsilon] \cup [\varepsilon,+\infty[$, per ogni $\varepsilon > 0$.
■

(4.47) Esercizio *Si consideri la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da*

$$f_n(x) = n^\alpha x e^{-n^2x^2},$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ e si studi la convergenza puntuale uniforme.

Suggerimento. Sfruttare i ragionamenti dell'esercizio precedente. Valutare per quali valori del parametro α permangono i problemi di convergenza uniforme negli intorni contenenti lo zero e per quali invece questi problemi spariscono. ■

(4.48) Esercizio *Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della successione*

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$$

di funzioni definite su $\mathbb{R}$.

Risoluzione. Osserviamo preliminarmente che $f_n(0) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Sia ora $x \neq 0$ fissato. Allora

$$f_n(x) \sim \frac{1}{nx} \to 0, \qquad n \to +\infty.$$

Pertanto la successione converge puntualmente alla funzione nulla su tutto $\mathbb{R}$.

Lo studio della derivata prima ci mostra che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $|f_n|$ ha due punti di massimo in $x = \pm 1/n$. Poichè $|f_n(\pm 1/n)| = 1/2$ la convergenza non può essere uniforme in alcun intorno contenente l'origine (punto di accumulazione delle successioni 'patologiche' $x = \pm 1/n$).

Tenendo conto della disparità delle f_n studiamo la convergenza uniforme su intervalli del tipo $[\varepsilon,+\infty[$, con $\varepsilon > 0$, estendendo poi il risultato anche agli intervalli del tipo $]-\infty,-\varepsilon]$.

Lo studio fatto sulla derivata prima delle f_n ci permette di garantire che la convergenza su $[\varepsilon,+\infty[$ è effettivamente uniforme. Infatti, essendo il punto di massimo in $x = 1/n$, per n abbastanza grande si ha

$$\sup_{[\varepsilon,+\infty[} |f_n(x)| = |f_n(\varepsilon)| \to 0, \qquad n \to +\infty.$$

■

(4.49) Esercizio *Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della successione*

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$$

di funzioni definite su $[0,1]$.

Risoluzione. Osserviamo preliminarmente che $f_n(0) = 0$ per ogni n. Sia ora $x \neq 0$ fissato. Allora è facile vedere che $f_n(x) \sim 1$ per $n \to +\infty$. Pertanto

$$f_n(x) \to f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1, & x \in]0,1]. \end{cases}$$

La discontinuità della funzione limite, in contrasto con la continuità delle funzioni che compongono la successione, esclude la convergenza uniforme in intorni destri dello zero.

Sia pertanto $\varepsilon > 0$. Allora

$$\begin{aligned} \sup_{[\varepsilon,1]} |f_n(x) - f(x)| &= \sup_{[\varepsilon,1]} \left| \frac{nx}{1+nx} - 1 \right| \\ &= \sup_{[\varepsilon,1]} \left| \frac{1}{1+nx} \right| \\ &= \frac{1}{1+n\varepsilon} \to 0, \qquad n \to +\infty, \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza è dovuta alla monotonia della funzione $(1+nx)^{-1}$ su $[\varepsilon, 1]$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ fissato. ■

(4.50) Esercizio *Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della successione*

$$f_n(x) = \frac{n^2}{1+n^2x^2}$$

di funzioni definite su $]0,1]$.

Suggerimento. La convergenza puntuale è abbastanza semplice. La definizione delle f_n dovrebbe suggerire la scelta di una successione 'patologica' di punti che escluda la convergenza uniforme in intorni di un determinato punto (il punto di accumulazione della successione 'patologica'). Eliminati questi intorni la convergenza uniforme si ottiene come in alcuni degli esercizi precedenti, 'attendendo' che n sia grande abbastanza e sfruttando la convergenza puntuale. ■

(4.51) Esercizio *Sia $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni continue e derivabili con derivata continua. Supponiamo che*

$$f_n' \to f' \text{ in } d_\infty ,$$

per $n \to +\infty$ e che esista $x_0 \in [a,b]$ tale che

$$\lim_n f_n(x_0) = f(x_0) .$$

Provare allora $f_n \to f$ in d_∞ .

(4.52) Esercizio *Sia $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni convesse che converga puntualmente ad una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dimostrare che f è convessa .*

(4.53) Esercizio *Sia $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni continue che converga uniformemente ad una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dimostrare che per ogni $p \in [1,+\infty[$ si ha*

$$\lim_n \int_a^b |f_n - f|^p \, dx = 0 .$$

(4.54) Esercizio *Sia $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ la successione di funzioni continue definita da*

$$f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n} & \text{se } \frac{1}{2n} \le x \le \frac{1}{n} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Provare che la successione (f_n) converge puntualmente a 0 *ma non uniformemente in* $[0,1]$.

Risoluzione. Le f_n sono funzioni costanti a tratti. Osservato che $f_n(0) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia ora $x \in]0.1]$ fissato. Per n abbastanza grande si ha $1/n < x$. Pertanto $f_n(x) = 0$ definitivamente. Dunque f_n converge puntualmente alla funzione nulla su $[0,1]$.

La convergenza non può essere uniforme su tutto $[0,1]$. Infatti è sufficiente scegliere come successione 'patologica' una tra $x = 1/n$ e $x = 1/2n$ ed osservare che

$$\sup_{[0,1]} |f_n(x)| \ge f_n(1/2n) = \sqrt{n} \to +\infty, \qquad n \to +\infty,$$

$$\sup_{[0,1]} |f_n(x)| \ge f_n(1/n) = \sqrt{n} \to +\infty, \qquad n \to +\infty.$$

La convergenza non può pertanto essere uniforme in alcun intorno contenente lo zero. Per ogni $\varepsilon > 0$ si ottiene la convergenza uniforme su $[\varepsilon, 1]$ come in molti esercizi precedenti. ∎

(4.55) Esercizio *Sia $a > 0\,, b > 1$ ed $f_n : [0, b] \to \mathbb{R}$ la successione di funzioni continue definita da*

$$f_n(x) = \begin{cases} an^2 x & \text{se } 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ \frac{a}{1-b} n^2 x + \frac{ab}{b-1} n & \text{se } \frac{1}{n} \le x \le \frac{b}{n} \\ 0 & \text{se } \frac{b}{n} \le x \le b\,. \end{cases}$$

Studiare la convergenza puntuale e uniforme di (f_n).

Risoluzione. L'esercizio è molto simile, come idea di fondo, all'esercizio precedente. Disegnando l'andamento delle f_n (molto semplice a dispetto della definizione solo apparentemente complicata!) ci si convince immediatamente che il limite puntuale è la funzione nulla. Lo stesso disegno suggerisce la scelta di una successione 'patologica' che esclude la convergenza uniforme in intorni contenenti lo zero. Esclusi questi intorni la convergenza uniforme si ottiene con la solita tecnica. ∎

(4.56) Esercizio *Verificare che la successione (f_n) definita da*

$$f_n(x) = (x^2 - x)^n\,,$$

converge a 0 *uniformemente in* $[0, 1]$.

Risoluzione. Per $x \in [0, 1]$,

$$|(x^2 - x)^n| \le |x^2 - x|^n \le (1/2)^n \to 0, \qquad n \to +\infty.$$

∎

(4.57) Esercizio *Verificare che la successione (f_n) definita da*

$$f_n(x) = (x - 1)x^{-n}\,,$$

converge a 0 *uniformemente in* $[1, +\infty[$.

Risoluzione. Su $[1, +\infty[$ ciascuna f_n è non negativa. Si può valutare

$$\sup_{[1,+\infty[} f_n(x)$$

attraverso lo studio della derivata prima delle f_n. Questo studio ci porta ad osservare che ciascuna f_n, con $n \geq 2$, ammette massimo assoluto in $x = n(n-1)^{-1}$. Utilizzando questo risultato si ottiene

$$\sup_{[1,+\infty[} f_n(x) = f_n(n(n-1)^{-1}) = \frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \to 0, \qquad n \to +\infty.$$

■

(4.58) Esercizio *Studiare la convergenza della successione di funzioni* (f_n) *definita da*

$$f_n(x) = n(x-1)x^{-n},$$

su $\mathbb{R}$.

Suggerimento. Si conseideri l'esercizio precedente e si valuti l'incidenza del fattore n sugli intervalli di convergenza. ■

(4.59) Esercizio *Verificare che la successiona* (f_n) *definita da*

$$f_n(x) = \frac{x\sin(x^2+1)+n^2x}{n^2(x^2+1)},$$

converge uniformemente in $\mathbb{R}$ *a*

$$\frac{x}{x^2+1},$$

e la successione

$$f_n(x) = \frac{nx^3+(n+1)^2\sin(x)}{n^2+1}$$

converge a

$$\sin(x),$$

uniformemente su ogni $[a,b]$ *con* $a, b \in \mathbb{R}$ *e* $a < b$.

Risoluzione. Sia $x \in \mathbb{R}$ fissato. Per $n \to +\infty$ si ha

$$f_n(x) \sim \frac{n^2x}{n^2x^2+n^2} = \frac{x}{1+x^2}.$$

Per valutare la convergenza uniforme osserviamo che, spezzando f_n come somma di due addendi, si ottiene

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{x \sin(1+x^2)}{n^2 x^2 + n^2} \right|.$$

Pertanto si ha

$$\begin{aligned}
\sup_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| &= \sup_{\mathbb{R}} \frac{|x| |\sin(1+x^2)|}{n^2(1+x^2)} \\
&\leq \frac{1}{n^2} \sup_{\mathbb{R}} \frac{|x|}{1+x^2} \\
&= \frac{1}{2n^2} \to 0, \qquad n \to +\infty.
\end{aligned}$$

Si studi la seconda successione con tecniche analoghe. ■

(4.60) Esercizio *Data la successioni di funzioni (f_n) definita da*

$$f_n(x) = \frac{e^{-\frac{1}{n^2 x^2}}}{nx},$$

stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$ converge puntualmente e su quali sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ si ha convergenza uniforme.

Risoluzione. Se $x \neq 0$ fissato si ha

$$\frac{1}{nx} e^{-\frac{1}{n^2 x^2}} \to 0, \qquad n \to +\infty.$$

Pertanto la successione converge puntualmente alla funzione nulla su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Come in molti esercizi precedenti, la definizione delle funzioni che compongono la successione ci suggerisce la successione 'patologica' di punti $x = 1/n$. Si ha

$$f_n(1/n) = e^{-1}$$

e dunque la convergenza non può essere uniforme su alcun intorno contenente l'origine. Data la simmetria delle f_n studiamo la convergenza uniforme su intervalli del tipo $[\varepsilon, +\infty[$ con $\varepsilon > 0$ per poi estendere i risultati ottenuti agli analoghi intervalli di $\mathbb{R}_-$.

Studiando la derivata prima di f_n si verifica che queste funzioni hanno un massimo assoluto nei punti $x = 1/n$. Pertanto, se n è sufficientemente grande si ha

$$\sup_{[\varepsilon, +\infty[} |f_n(x)| = |f_n(\varepsilon)| \to 0, \qquad n \to +\infty.$$

■

(4.61) Esercizio *Data la successione di funzioni*

$$f_h(x) = 2^h e^{-hx},$$

studire la convergenza puntuale uniforme.

Suggerimento. Sarà facile ottenere la funzione limite puntuale scrivendo le funzioni come termini di una successione geometrica. Dalle proprietà di f_n e della funzione limite si dedurranno poi problemi per la convergenza uniforme in un determinato punto. Si valuti poi la convergenza uniforme una volta rimossi gli intorni di quel punto. ■

(4.62) Esercizio *Sia* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *la successione di funzioni definita da*

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \left[n, n+\frac{1}{n}\right] \\ \sqrt{n} & x \in \left[n, n+\frac{1}{n}\right] \end{cases}.$$

Per ciascuna delle seguenti affermazioni dire se è vera o falsa
(i) $f_n \to 0$ *puntualmente su* $\mathbb{R}$ *;*
(ii) $f_n \to 0$ *uniformemente su* $\mathbb{R}$ *;*
(iii)

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\, dx = 0;$$

(iv) $f_n \to 0$ *uniformemente su* $]-\infty, M[$ *per ogni* $M > 0$.

Risoluzione. Evidentemente la (i) è vera poichè per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$x_0 \notin \left[n_0, n_0 + \frac{1}{n_0}\right].$$

L'affermazione (ii) è invece falsa poichè evidentemente

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \sup_{x\in\left[n,n+\frac{1}{n}\right]} |f_n(x)| = \sqrt{n} \not\to 0.$$

L'affermazione (iii) è vera essendo

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\, dx = \lim_{n\to+\infty} \int_{\left[n,n+\frac{1}{n}\right]} \sqrt{n}\, dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Infine, l'affermazione (iv) è vera poichè per ogni $M > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$]-\infty, M[\cap \left[n, n+\frac{1}{n}\right] = \emptyset .$$

■

(4.63) Esercizio *Sia data $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si consideri la successione di funzioni definite su $\mathbb{R}$*

$$f_n(x) := n \int_{x-\frac{2}{n}}^{x+\frac{1}{n}} \varphi(t)\, dt$$

(a) *Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della successone (f_n) se $\varphi(x) = \cos(x)$.*

(b) *Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della successione (f_n) nel caso in cui φ sia Lipschitziana su $\mathbb{R}$.*

Risoluzione. Consideriamo il caso (b). Osserviamo anzitutto che per il Teorema della media, per ogni $x \in \mathbb{R}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste

$$\xi_n \in \left]x - \frac{2}{n}, x + \frac{1}{n}\right[$$

tale che

$$n \int_{x-\frac{2}{n}}^{x+\frac{1}{n}} \varphi(t)\, dt = 3\varphi(\xi_n).$$

Allora, fissato $x \in \mathbb{R}$, si ha per ogni $n, m \in \mathbb{N}$

$$|f_n(x) - f_m(x)| = 3|\varphi(\xi_n) - \varphi(\xi_m)|.$$

Poichè φ è Lipschitziana, esiste $c > 0$ tale che

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq 3c|\xi_n - \xi_m|,$$

con

$$\xi_n, \xi_m \in \left]x - \frac{2}{\min\{n,m\}}, x + \frac{1}{\min\{n,m\}}\right[.$$

Essendo per $n, m \to +\infty$

$$\xi_n \to x, \qquad \xi_m \to x ,$$

si conclude

$$|f_n(x) - f_m(x)| \to 0$$

per $n, m \to +\infty$, per cui $(f_n(x))$ converge. Per studiare la convergenza uniforme, osserviamo che

$$|\xi_n(x) - \xi_m(x)| \leq \frac{3}{\min\{n,m\}},$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed $n, m \in \mathbb{N}$. Ne segue che

$$|f_n(x) - f_m(x)| \le \frac{3c}{\min\{n, m\}}.$$

Passando all'estremo superiore si deduce che

$$d_\infty(f_n, f_m)| \le \frac{3c}{\min\{n, m\}}.$$

Poichè (f_n) è una successione di Cauchy nello spazio $C^0(\mathbb{R})$, si ha convergenza uniforme. Per la parte (a), si procede in modo simile. ■

(4.64) Esercizio *Sia data la successione di funzioni*

$$f_n(x) = 2^n e^{-nx}.$$

Studiare la convergenza puntuale ed uniforme.

Risoluzione. Fissiamo $x_0 \in \mathbb{R}$. Se $x_0 > 0$, ovviamente si ha

$$\lim_n f_n(x_0) = 0.$$

Se $x_0 = 0$ oppure $x_0 < 0$, si conclude

$$\lim_n f_n(x_0) = +\infty.$$

In particolare, la funzione che definisce il limite puntuale

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x > 0 \\ +\infty & \text{se } x \le 0, \end{cases}$$

è discontinua su tutti gli intervalli che contengono l'origine.

Ne segue che su ogni intervallo del tipo $[a, b]$ con $a < 0 < b$ non ci può essere convergenza uniforme.

Sugli intervalli $[\varepsilon, +\infty[$ con $\varepsilon > 0$ c'è convergenza uniforme. ■

(4.65) Esercizio *Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da*

$$f_n(x) = \begin{cases} n^{2\alpha-5}(1 - |x - n|) & \text{per } n-1 \le x \le n+1 \\ 0 & \text{altrimenti}. \end{cases}$$

Discutere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza puntuale ed uniforme di $(f_n)_{n>0}$.

Risoluzione. Riscriviamo la successione di funzioni senza i moduli :

$$f_n(x) = \begin{cases} n^{2\alpha-5}(1+n-x) & \text{per } n \le x \le n+1 \\ n^{2\alpha-5}(1-n+x) & \text{per } n-1 \le x \le n \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

Fissato $x_0 \in \mathbb{R}$, scegliamo n grande tale che $f_n(x_0) = 0$, per cui

$$\lim_n f_n(x_0) = f(x_0) = 0\,.$$

D'altra parte si verifica facilmente che

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = n^{2\alpha-5} \sup_{x\in\mathbb{R}} (1 - |x-n|) = n^{2\alpha-5}\,.$$

Ne segue che se $\alpha < \frac{5}{2}$ la successione (f_n) converge uniformemente, mentre se $\alpha \ge \frac{5}{2}$ non ci può essere convergenza uniforme. ∎

(4.66) Esercizio *Si consideri la successione di funzioni su $\mathbb{R}$*

$$f_n(x) = \frac{6nx}{1+3n^2x^2}\,.$$

Studiare la convergenza puntuale, uniforme e discutere la validità della formula

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_n \int_a^b f_n(t)\,dt\,,$$

al variare di $a, b \in \mathbb{R}$.

Risoluzione. Evidentemente per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ fissato si ha

$$\lim_n f_n(x_0) = 0\,.$$

Veniamo ora alla convergenza uniforme. Risulta per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$f_n'(x) = \frac{6n(1-3n^2x^2)}{(1+3n^2x^2)^2}\,,$$

per cui f_n assume il massimo assoluto in

$$x_n = \frac{\sqrt{3}}{3n}, \qquad f_n(x_n) = \sqrt{3}\,.$$

Ne segue che per ogni $a < 0 < b$ ed n sufficientemente grande si ha

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x)| = \sqrt{3},$$

e non ci può essere convergenza uniforme.

Su intervalli del tipo $[a,b]$ con $b > a > 0$ o $a < b < 0$ si ha

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x)| = \frac{6an}{1+3a^2n^2} \to 0,$$

per cui c'è convergenza uniforme.

Per quanto riguarda l'uguaglianza integrale, sugli intervalli $[a,b]$ con $b > a > 0$ oppure $a < b < 0$ è verificata per un noto teorema.

D'altra parte, per calcolo diretto, risulta per ogni $-\infty < a < 0 < b < +\infty$

$$\int_a^b \frac{6n\tau}{1+3n^2\tau^2}\,d\tau = \frac{1}{n}\log\left(\frac{1+3b^2n^2}{1+3a^2n^2}\right) \approx \frac{3(b^2-a^2)n}{1+3a^2n^2} \to 0,$$

se $n \to +\infty$, per cui l'uguaglianza è comunque verificata. ■

(4.67) Esercizio *Per $n = 1,2,\dots$ siano $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ e $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definite*

$$f_n(x) = \sqrt{n^2+nx} - n, \qquad g_n(t) = \sqrt{\sin^2(t) + 1/n}.$$

Mostrare che (g_n) converge uniformemente su $\mathbb{R}$, e che (f_n) converge uniformemente su ogni limitato di $\mathbb{R}^+$, ma non su $\mathbb{R}^+$. Posto quindi

$$\psi_n(t) = f_n(g_n(t)),$$

mostrare, eventualmente utilizzando i risultati precedenti, che (ψ_n) converge uniformemente su $\mathbb{R}$. Stabilire infine se $(\psi'(t))$ converge uniformemente su qualche intervallo contenente l'origine.

Risoluzione. Per x fissato e $n \to +\infty$ si ha che

$$f_n(x) = n\left(\sqrt{1+\frac{x}{n}} - 1\right) \to \frac{x}{2}.$$

La convergenza non è uniforme su $[0,+\infty[$ perchè, per ogni n fissato, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} |f_n(x) - f(x)| = +\infty.$$

Poichè

$$f_n'(x) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+nx}} - 1\right) = 0 \quad \Leftrightarrow x = 0,$$

si ha che

$$\sup_{x\in[0,\alpha]} \left| f_n(x) - \frac{x}{2} \right| = \left| f_n(\alpha) - \frac{\alpha}{2} \right| \to 0,$$

e quindi la convergenza è uniforme in ogni limitato.

Per t fissato e $n \to +\infty$, si ha che $g_n(t) \to |\sin(t)|$. La convergenza è uniforme su $\mathbb{R}$ perchè

$$|g_n(t) - |\sin(t)|| = \frac{1}{n(g_n(t) + |\sin(t)|)} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0.$$

(Giustificare la prima uguaglianza!)

Ovviamente, per t fissato,

$$\psi(t) \to \frac{|\sin(t)|}{2} := \psi(t).$$

Si ha, inoltre, essendo f_n crescente in x ed n separatamente,

$$f_n(|\sin(t)|) \leq f_n(g_n(t)) \leq \frac{g_n(t)}{2}.$$

Sia $\varepsilon > 0$ ed $\overline{n}$ tale che, per $n > \overline{n}$ e $x \in [0,1]$ si abbia $|f_n(x) - x/2| < \varepsilon$ e $g_n(t) - |\sin(t)| < \varepsilon$. Per $n > \overline{n}$ si ha allora

$$|\psi_n(t) - \psi(t)| < \frac{3}{2}\varepsilon,$$

per cui (ψ_n) converge uniformemente su $\mathbb{R}$.

Infine, se (ψ_n') converge uniformemente su $(-\alpha,\alpha)$ per qualche $\alpha > 0$, per il teorema di differenziazione delle successioni, ψ dovrebbe essere derivabile in $t = 0$. Per la parità di ψ_n, il discorso vale anche per gli intervalli $(-\alpha, 0]$ oppure $[0,\alpha)$. ∎

1.5 Serie di funzioni e di potenze

(5.68) Esercizio *Si consideri su $\mathbb{R}$ la serie di funzioni*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x}{x^4 + 3k^4}.$$

Studiare la convergenza uniforme.

Risoluzione. La serie di funzioni assegnata converge totalmente (e dunque uniformemente) su tutto $\mathbb{R}$. Infatti dallo studio della derivata, si deduce che la funzione $|x|(x^4 + k^4)^{-1}$ ammette massimo assoluto nel punto $x = k$. Pertanto si ha

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |f_k(x)| = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|x|}{x^4 + k^4} \leq \sum_{k=1} \frac{1}{4k^3}$$

dove la serie che compare all'ultimo membro è una serie numerica convergente.

■

(5.69) Esercizio *Si consideri la serie di funzioni*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x),$$

dove

$$f_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{se } \; k \leq x < k+1 \\ 0 & \text{altrimenti}. \end{cases}$$

Studiare la convergenza uniforme e totale.

Risoluzione. Non è difficile verificare che la serie di funzioni assegnata converge puntualmente su tutto $\mathbb{R}$ e la funzione somma è la funzione a scala data da

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \chi_{[k,k+1[}.$$

La convergenza è anche uniforme poichè

$$\begin{aligned} \sup_{\mathbb{R}} \left| \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} \right| &= \sup_{\mathbb{R}} \left| \sum_{k=n}^{+\infty} f_k(x) \right| \\ &= \frac{1}{n} \to 0, \qquad n \to +\infty. \end{aligned}$$

La convergenza tuttavia non è totale. Infatti

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |f_k(x)| = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

■

(5.70) Esercizio *Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della serie di funzioni per $x > 0$*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^n}$$

(5.71) Esercizio *Provare che la serie*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k+x^2},$$

è uniformemente convergente ma non assolutamente convergente.

Risoluzione. Poichè la serie di funzioni assegnata è a segno alterno e il termine generale è decrescente in k, valutando la differenza tra le somme parziali e la serie assegnata, si ha

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| &= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k+x^2} \right| \\ &\le \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{1+n+x^2} = \frac{1}{n+1} \to 0, \qquad n \to +\infty\end{aligned}$$

(perchè vale la precedente disuguaglianza??)

La convergenza non è assoluta. Infatti

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

■

(5.72) Esercizio *Dimostrare che la funzione definita dalla serie*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{\sinh(k\pi)},$$

è di classe $C^\infty(\mathbb{R})$.

Risoluzione. Il termine generale della serie assegnata è una successione di funzioni periodiche, di periodo 2π, e di classe C^∞ sul periodo, e con tutte le derivate periodiche di periodo 2π. Limitiamoci pertanto a rispondere al quesito proposto nell'intervallo $(0,2\pi)$.

Su $(0,2\pi)$ la serie è totalmente convergente. Infatti

$$|f_k(x)| \le \frac{2}{e^{k\pi}-e^{-k\pi}} = \frac{2}{e^{k\pi}(1-e^{-2k\pi})},$$

e dunque

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |f_k(x)| \le \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{e^{k\pi}}(1-e^{-2k\pi}) \le \frac{1}{1-e^{-2\pi}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{e^{k\pi}}$$

e la serie che compare all'ultimo membro è una serie numerica convergente.

La serie delle derivate m-me è assegnata con una formula differente a seconda che m sia pari oppure dispari. Più precisamente si ha, per $n = 1,2,\ldots$

$$\begin{aligned} f_k^{(2n-1)}(x) &= (-1)^{n+1}\frac{k^{2n-1}\cos(kx)}{\sinh(k\pi)} \\ f_k^{(2n)}(x) &= (-1)^{n}\frac{k^{2n}\sin(kx)}{\sinh(k\pi)} \end{aligned}$$

e, attraverso maggiorazioni simili alle precedenti, si deduce che la serie delle derivate m-me è totalmente convergente su $(0,2\pi)$ per ogni $m \in \mathbb{N}$. Infatti

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |f_k^{(m)}(x)| \le \frac{1}{1-e^{-2\pi}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^m}{e^{k\pi}}$$

e la serie a secondo membro è una serie numerica convergente. Pertanto $\sum f_k(x)$ è di classe C^∞ su $(0,2\pi)$. La periodicità e la regolarità delle f_k permette di estendere a tutto $\mathbb{R}$ il risultato trovato. ■

(5.73) Esercizio *Dimostrare che risulta*

$$\int_0^\pi \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2kx)}{(2k-1)(2k+1)}\,dx = 0\,.$$

Risoluzione. La serie di funzioni che compare all'interno dell'integrale è totalmente convergente. Infatti

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|\cos(2kx)|}{(2k-1)(2k+1)} \le \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2-1}$$

e la serie a secondo membro è una serie numerica convergente. Pertanto è possibile integrare termine a termine. Poichè ogni f_k ha integrale nullo su $(0,\pi)$ si ottiene la tesi. ■

(5.74) Esercizio *Determinare l'intervallo di convergenza delle serie*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^3}, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^k$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{kx}}{k^2-k+1}, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(1+x^2)^k}.$$

Risoluzione. La prima serie è una serie di potenze. Utilizzando il criterio del rapporto si deduce che il raggio di convergenza è 1. Valutando la serie di funzioni nei punti $x=1$ e $x=-1$ si deduce facilmente la convergenza in entrambi i casi. Pertanto l'insieme di convergenza puntuale è $[-1,1]$. Un noto teorema di Abel garantisce che su tale insieme la convergenza è anche uniforme.

Poniamo $y=(1-x)(1+x)^{-1}$. La seconda serie è una serie di potenze. Utilizzando il criterio del rapporto si deduce che la serie converge puntualmente per $|y|<1$, diverge per $|y|>1$ e un calcolo diretto permette di concludere che la serie diverge anche in $y=1$ e in $y=-1$. Per il teorema di Abel la serie converge uniformemente in ogni intervallo compatto contenuto in $(-1,1)$. Riportando la serie in x si ottiene che la convergenza puntuale si ha per $x>0$ e che la serie converge uniformemente su ogni insieme del tipo $[\varepsilon,+\infty[$ per ogni $\varepsilon>0$.

Poniamo $y=e^x$. Anche la terza serie è una serie di potenze. Utilizzando anche in questo caso il criterio della radice si ottiene che il raggio di convergenza è pari a 1. Pertanto la serie converge puntualmente se $e^x<1$, cioè se $x<0$. Un calcolo diretto permette di ottenere la convergenza puntuale anche per $x=0$. Pertanto la serie assegnata converge uniformemente su $]-\infty,0]$.

Poniamo $y=(1+x^2)^{-1}$. Anche la quarta serie è una serie di potenze. Ancora una volta il raggio di convergenza è 1. Pertanto, reintroducendo la variabile x la serie converge puntualmente per $x>0$. Valutando la serie in $x=0$ si verifica che questa non converge. Pertanto la serie assegnata converge uniformemente su $[\varepsilon,+\infty[$ per ogni $\varepsilon>0$. ∎

(5.75) Esercizio *Data la serie*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(x-e)^k}{ke^k},$$

determinare il suo intervallo di convergenza precisandone il comportamento agli estremi. Calcolare poi la somma in tutto l'intervallo di convergenza.

Risoluzione. La serie assegnata è una serie di potenze centrata in $x=e$. Utilizzando il criterio della radice si deduce che il raggio di convergenza è pari ad e. Valutando la serie nei due punti estremi $x = 0$ e $x = 2e$ (la serie è centrata in $x = e$), si ha convergenza in $x = 0$ (criterio di Leibnitz) e la non convergenza in $x = 2e$. Pertanto la serie converge puntualmente in $[0, 2e[$, e uniformemente in ogni sottoinsieme compatto di $[0, 2e[$.

Poniamo $y = (x - e)e^{-1}$. Si ha, utilizzando le serie di Taylor,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(x-e)^k}{ke^k} &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{y^k}{k} \\ &= -\log(1+y) \\ &= -\log\left(1 - \frac{x-e}{e}\right) \\ &= 1 + \log\left(\frac{1}{2e-x}\right) \end{aligned}$$

■

(5.76) Esercizio *Verificare che la serie*

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{kx-1}{k(kx+1)},$$

converge per $x = 2$ e che la serie della derivate converge uniformemente in $]1, 3[$.

Risoluzione. La serie assegnata converge in $x = 2$ per il criterio di Leibnitz. Infatti il termine generale tende a zero ed è definitivamente decrescente (per $k \geq 2$).

La serie delle derivate è definita da

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{2}{(kx+1)^2}$$

e tale serie converge totalmente su $]1, 3[$. Infatti, su tale intervallo si ha

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left\| (-1)^k \frac{2}{(kx+1)^2} \right\|_\infty = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{(1+k)^2} \leq 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

■

(5.77) Esercizio *In quale insieme del piano complesso $\mathbb{C}$ la serie*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} e^{kz^2},$$

risulta convergente? Quanto vale la sua somma ?

(5.78) Esercizio *Data la serie*

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k \frac{(4\sin^2(x))^k}{k+1},$$

determinare gli intervalli di convergenza puntuale ed assoluta.

Risoluzione. La serie assegnata può essere riscritta nel seguente modo

$$4\sin^2(x)\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{(4\sin^2(x))^k}{k}.$$

La serie pertanto converge uniformemente se $\sin^2(x) < 1/4$, cioè se $-1/2 < \sin(x) < 1/2$. Per il criterio di Leibnitz la serie converge anche per $\sin^2(x) = 1/4$. La convergenza puntuale, invece, si ha solo per $-1/2 < \sin(x) < 1/2$. ■

(5.79) Esercizio *Determinare nel piano complesso* $\mathbb{C}$ *l'insieme di convergenza della serie*

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\left(\frac{z+j}{1+j}\right)^k.$$

Dire poi dove la serie converge uniformemente.

(5.80) Esercizio *Determinare l'insieme di convergenza della serie*

$$\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k\log^2(k)}\left(\frac{\sqrt{2}z+1}{z+\sqrt{2}}\right)^k,$$

e disegnarlo nel piano x, y *precisando se è aperto o chiuso.*

(5.81) Esercizio *Determinare l'insieme di convergenza della serie*

$$\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\sin\left(\frac{1}{k}\right)\left(\frac{e^{z^2}-1}{e^{z^2}+1}\right)^k,$$

e disegnarlo nel piano x, y *precisando anche il comportamento della serie sulla frontiera.*

(5.82) Esercizio *Per quali* $\alpha \geq 0$ *la serie di funzioni*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin(nx)+3n^{1/2}+e^{-n|x|}}{n^\alpha}$$

converge uniformemente su $\mathbb{R}$*?.*

Risoluzione. Osserviamo che i tre contributi :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(nx)}{n^\alpha}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^{1/2}}{n^\alpha}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n|x|}}{n^\alpha}$$

convergono rispettivamente per $\alpha > 0$, per $\alpha > 3/2$ e per $\alpha > 1$. Pertanto, complessivamente per $\alpha > 3/2$ c'è convergenza uniforme . ∎

(5.83) Esercizio *Sia* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *la successione di funzioni*

$$f_n(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k} \chi_{[k,k+1[}(x)$$

dove per ogni intervallo I *si ha* $\chi_I(x) = 1$ *se* $x \in I$ *mentre* $\chi_I(x) = 0$ *se* $x \notin I$ *. Detto* f *il limite puntuale di* f_n *dire se le seguenti affermazioni sono vere o false :*

(i) $f_n \to f$ *uniformemente su* $\mathbb{R}$ *;*

(ii) $f_n \not\to f$ *uniformemente su* $]-\infty, 0[$ *;*

(iii) *per ogni* $M > 0$ *si ha*

$$\lim_n \int_{-\infty}^{M} f_n(x)\, dx = \int_{-\infty}^{M} f(x)\, dx,$$

(iv) *si ha*

$$\lim_n \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx.$$

Risoluzione. Si verifica facilmente che il limite puntuale f è uguale a 0 . Infatti, fissato $x_0 \in \mathbb{R}$ basta prendere n_0 abbastanza grande tale che $x \notin [n_0, n_0+1[$ per cui $f_n(x) = 0$ per ogni $n \geq n_0$.

Dalla definizione risulta

$$\sup_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{\mathbb{R}} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k} \chi_{[k,k+1[}(x) = \frac{1}{n} \to 0$$

se $n \to +\infty$, per cui (i) è vera. Ne segue anche che (ii) deve essere falsa . Fissato $M > 0$ la (iii) è vera, infatti basta prendere n_0 abbastanza grande tale che

$$]-\infty, M[\cap [n_0, n_0+1[= \emptyset .$$

Infine la (iv) è falsa perchè il membro di destra è nullo mentre per quello di sinistra si ha

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\, dx = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k} \not\to 0$$

se $n \to +\infty$. ■

(5.84) Esercizio *Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da*

$$f_n(x) = \begin{cases} n^{2\alpha-5}(1-|x-n|) & \text{per } \; n-1 \le x \le n+1 \\ 0 & \text{altrimenti}. \end{cases}$$

Discutere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza puntuale ed uniforme di $(f_n)_{n>0}$.

Risoluzione. Riscriviamo la successione di funzioni senza i moduli :

$$f_n(x) = \begin{cases} n^{2\alpha-5}(1+n-x) & \text{per } \; n \le x \le n+1 \\ n^{2\alpha-5}(1-n+x) & \text{per } \; n-1 \le x \le n \\ 0 & \text{altrimenti}, \end{cases}$$

Fissato $x_0 \in \mathbb{R}$, scegliamo n grande tale che $f_n(x_0) = 0$, per cui

$$\lim_n f_n(x_0) = f(x_0) = 0\,.$$

D'altra parte si verifica facilmente che

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = n^{2\alpha-5} \sup_{x\in\mathbb{R}} (1-|x-n|) = n^{2\alpha-5}\,.$$

Ne segue che se $\alpha < \frac{5}{2}$ la successione (f_n) converge uniformemente, mentre se $\alpha \ge \frac{5}{2}$ non ci può essere convergenza uniforme . ■

(5.85) Esercizio *Si consideri la seguente serie di potenze*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)(2n+1)!}$$

e si calcoli il raggio di convergenza e la somma.

Risoluzione. Si verifica facilmente che il raggio di convergenza è infinito . Posto

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^x \tau^{2n+2}\, d\tau\,,$$

applicando il teorema di derivazione per serie, si ottiene

$$\varphi(x) = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \tau^{2n+2}\, d\tau = \int_0^x \tau \sin\tau \, d\tau = -x\cos(x) + \sin(x)\,.$$

■

(5.86) Esercizio *Sia* (f_n) *una successione di funzioni reali di variabile reale, continue, uniformemente convergente su* $\mathbb{R}$ *ad* f. *Per ognuna delle seguenti affermazioni indicare se essa è vera o falsa, giustificando la risposta.*

a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} f_n$ *è uniformemente convergente su* $(0,1)$.
b) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} f_n$ *è uniformemente convergente su* $\mathbb{R}$.

Risoluzione. **a)** Vera. Su $[0,1]$ ogni f_n è limitata e quindi, per l'uniformità della convergenza, le f_n sono equilimitate. Allora $\sum n^{-2} f_n$ è addirittura totalmente convergente su $[0,1]$.

b) Falsa. Sia, per esempio, $f_n(x) = x$ per $n = 1,2,\ldots$. Allora $\sum e^{-n} f_n$ non è uniformemente convergente su $\mathbb{R}$ poichè il termine generale non è uniformemente infinitesimo per $n \to +\infty$.

■

1.6 Serie di Fourier in $\mathbb{R}$

(6.87) Esercizio *Si consideri la funzione di periodo* 2π *definita ponendo*

$$f(x) = x(x-\pi)\,,$$

per ogni $0 \le x \le \pi$ *. Disegnare il grafico di* f *in* $]-2\pi, 2\pi[$ *e svilupparla in serie di Fourier. Dire se la serie ottenuta converge puntualmente e uniformemente .*

(6.88) Esercizio *Si consideri la funzione di periodo* 2π *definita ponendo*

$$f(x) = \sin(2x)\,,$$

per ogni $0 \le x \le \pi$ *. Disegnare il grafico di* f *in* $]-\pi, 3\pi[$ *e svilupparla in serie di Fourier calcolando i primi due coefficienti. Dire se la serie ottenuta converge puntualmente in* $]0, 2\pi[$ *.*

(6.89) Esercizio *Si consideri la funzione di periodo* 2π *definita ponendo*

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{se } 0 < x < \pi/2 \\ \sin(x) & \text{se } \pi/2 < x \le 2\pi \end{cases}\,,$$

per ogni $0 \le x \le 2\pi$ *. Disegnare il grafico di* f *in* $]-2\pi, 4\pi[$ *e svilupparla in serie di Fourier calcolando* a_0 *ed* a_1*. Dire se la serie ottenuta converge puntualmente in* $x = \pi/2$ *e* $x = 7\pi/3$ *e precisarne la somma .*