

## FOGLIO 1

Da consegnare Giovedì 10 ottobre all'inizio della lezione.

**Esercizio 1** (Punti 1+1+1). Si decida (motivando la risposta) se i seguenti enunciati su un numero  $a \in \mathbb{N}$  sono veri o falsi:

- (1) Se  $a^3 > a^2$  allora  $a > 1$ ;
- (2) Se 3 divide  $a$ , allora  $a$  è multiplo di 5;
- (3)  $a$  è dispari se e solo se  $a^2$  è dispari.

**Esercizio 2** (Punti 4). Si dimostri per induzione che  $\sum_{i=0}^n (2i)^3 = 2n^2(n+1)^2$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

**Esercizio 3** (Punti 4). Si dimostri per induzione che  $(1 - \frac{1}{2^2})(1 - \frac{1}{3^2}) \dots (1 - \frac{1}{n^2}) = \frac{n+1}{2n}$  per ogni  $n \geq 2$ .

**Esercizio 4** (Punti 4). Si dimostri per induzione che  $4^n \geq 1 + 3n$  per ogni intero  $n \geq 1$ .

**Esercizio 5** (Punti 4). Trovare l'errore nella seguente "dimostrazione" per induzione:

*Dimostrazione.* Dimostriamo per induzione che tutti i punti del piano sono allineati, cioè dati  $n$  punti del piano, ( $n \geq 1$ ), esiste una retta che li contiene.

Passo Base ( $n = 1$ ): Dato un punto  $P_1$ , esiste sempre una retta che passa per  $P_1$ ;

Passo induttivo: Si considerino  $n+1$  punti del piano  $P_1, \dots, P_n, P_{n+1}$ . Per ipotesi induttiva esiste una retta  $r$  passante per  $P_1, \dots, P_n$  e una retta  $s$  passante per  $P_2, \dots, P_n, P_{n+1}$ . Consideriamo l'intersezione  $r \cap s = \{P_2, \dots, P_n\}$ . Ricordiamo che date due rette nel piano, esse o sono parallele, o hanno un punto in comune, o sono coincidenti. Nel nostro caso  $r$  e  $s$  hanno almeno due punti in comune ( $P_2$  e  $P_n$ ) e quindi concludiamo che  $r$  e  $s$  coincidono. Pertanto  $P_1 \in s$  e quindi  $P_1, \dots, P_n, P_{n+1}$  sono allineati  $\square$

**Esercizio 6** (Punti 2+2+2). (1) Si scriva  $\frac{2+i}{1-2i}$  in forma algebrica.

(2) Si scriva  $\frac{1-i}{3}$  in forma trigonometrica.

(3) Si calcoli  $(\frac{1-i}{3})^6$ .

**Esercizio 7** (Punti 2). Dati tre insiemi  $A, B, C$ , si dimostri che

(1)  $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

(2)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

**Esercizio 8** (Punti 3). Individuare nel piano cartesiano i punti  $P = (x, y)$  tali che

(1)  $x^2 + y^2 = 1$

(2)  $|x + y| \leq 1$

(3)  $|x| + |y| \leq 1$

(4)  $|x| > |y|$