Università degli Studi di Verona

DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Esame di Analisi Matematica II - a.a. 2007/08, M. Squassina

[Corsi di Laurea in Mat. Applicata, Spec. Informatica, Info. Multimediale, Bioinfo]

Appello d'esame N.1, 13 Dicembre 2007 - Sessione Straordinaria

Nome, Cognome, Matricola, CdL: *MatApp* ☐

Indicazioni: Per sostenere l'esame è necessario essere iscritti on-line. Scrivere *nome, cognome, matricola* e *corso di laurea* in stampatello. I compiti anonimi *non* saranno corretti. Libri, appunti e calcolatrici grafiche *non* sono consentiti. Totale punteggio massimale: *+35 punti.*

Problema 1 [≤ 8pt]. Studiare, al variare di $\alpha > 0$, continuità e la differenziabilità di $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{\sin[(x^2+y^2)^\alpha]} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Problema 2 [≤ 10pt]. Studiare i massimi e minimi assoluti della funzione $f : Q \to \mathbb{R}$:

$$f(x,y) = \sin(x^2+y^2), \qquad Q = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, |x| \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \, |y| \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right\}.$$

Problema 3 [≤ 10pt]. Calcolare, al variare di $\alpha > 0$, l'integrale doppio:

$$I_\alpha = \int_C \frac{xy}{\alpha x^2 + y^2}\,dx\,dy, \qquad C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, \frac{\alpha^2}{3} \leq x^2 + \alpha^2 y^2 \leq \alpha^2, \; y \geq \frac{x}{\alpha}\right\}.$$

Problema 4 [≤ 7pt]. Studiare la convergenza puntuale della successione $f_n : [0,2] \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \frac{n+1}{n} < x \leq 2 \\ 1 & \text{se } \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{n+1}{n} \\ 0 & \text{se } 0 \leq x < \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Su quali intervalli $[a,b] \subset [0,2]$ tale convergenza è uniforme?

TEMPO: 2h:30m. Verona, 13/12/2007

Università degli Studi di Verona

DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Appello di Analisi Matematica II (Mod. base) - a.a. 07/08, M. Squassina

[Corsi di Laurea in Mat. Applicata, Spec. Informatica, Info. Multimediale, Bioinfo]

Appello d'esame N.2, 17 Marzo 2008 - Sessione Primaverile

Nome, Cognome, Matricola, CdL: *MatApp* □

Indicazioni: Per sostenere l'esame è necessario essere iscritti on-line. Scrivere *nome*, *cognome*, *matricola* e *corso di laurea* in stampatello. I compiti anonimi *non* saranno corretti. Libri, appunti e calcolatrici grafiche *non* sono consentiti. Punteggio massimo: *+35 punti*.

Problema 1 [≤ 8pt]. Studiare continuità e differenziabilità della funzione f definita da

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^\alpha y^{1-2\alpha}\arctan(xy^2)}{\cos(\sqrt{x^2+y^2})-1} & \text{se } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

al variare di $\alpha \geq \frac{1}{2}$.

Problema 2 [≤ 10pt]. Determinare gli estremi assoluti della funzione f definita da

$$f(x,y)=(x^2+y^2)^2-(x^2-y^2),$$

sopra il disco unitario chiuso di $\mathbb{R}^2$.

Problema 3 [≤ 10pt]. Stabilire se la funzione f definita da

$$f(x,y)=\frac{x}{y(x^2+y^2)}$$

è integrabile sull'insieme $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y>|x|\right\}$.

Problema 4 [≤ 7pt]. Stabilire per quali valori di $\alpha>0$ la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{xy}{n^2+|xy|^\alpha}$$

converge uniformemente su $\mathbb{R}^2$.

TEMPO: 2h:30m. Verona, 17 Marzo 2008

Università degli Studi di Verona

DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Appello di Analisi Matematica II (Mod. base) - a.a. 07/08, M. Squassina

[Corsi di Laurea in Mat. Applicata, Spec. Informatica, Info. Multimediale, Bioinfo]

Appello d'esame N.3, 20 Marzo 2008 - Sessione Straordinaria

Nome, Cognome, Matricola, CdL: *MatApp* ☐

Indicazioni: Per sostenere l'esame è necessario essere iscritti on-line. Scrivere *nome, cognome, matricola* e *corso di laurea* in stampatello. I compiti anonimi *non* saranno corretti. Libri, appunti e calcolatrici grafiche *non* sono consentiti. Punteggio massimo: *+35 punti*.

Problema 1 [≤ 8pt]. Studiare continuità e differenziabilità della funzione f definita da

$$f(x,y)=\begin{cases}\sin^{\alpha}(x+y)\log(x^2+y^2) & \text{se } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

al variare di $\alpha \geq 0$.

Problema 2 [≤ 10pt]. Determinare gli estremi della funzione f definita da

$$f(x,y)=x^2ye^{-x^2-y^2}$$

sull'insieme $D=\{(x,y\in\mathbb{R}^2 : x^2+4y^2\leq 4\}$.

Problema 3 [≤ 10pt]. Calcolare il volume del solido D definito da

$$D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\leq 6,\ 1\leq z\leq x^2+y^2\}.$$

Problema 4 [≤ 7pt]. Stabilire per quali valori di $\alpha>0$ la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^2+y^2}{n^2+(x^2+y^2)^{\alpha}}$$

converge uniformemente su $\mathbb{R}^2$.

TEMPO: 2h:30m. Verona, 20 Marzo 2008

Università degli Studi di Verona
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Appello di Analisi Matematica II (Mod. base) - a.a. 07/08, M. Squassina

[Corsi di Laurea in Mat. Applicata, Spec. Informatica, Info. Multimediale, Bioinfo]

Appello d'esame N.4, 24 Giugno 2008 - Sessione Estiva

Nome, Cognome, Matricola, CdL: *MatApp? crocia il box* □

Indicazioni: Per sostenere l'esame è necessario essere iscritti on-line. Scrivere *nome, cognome, matricola* e *corso di laurea* in stampatello. I compiti anonimi *non* saranno corretti. Libri, appunti e calcolatrici grafiche *non* sono consentiti. Punteggio massimo: *+35 punti.*

Problema 1 [≤ 8pt]. Determinare i punti di continuità della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{se } (x,y) \in A \times B, \\ -x^2 - y^2 & \text{se } (x,y) \in \mathbb{R} \setminus A \times \mathbb{R} \setminus B, \end{cases}$$

nei seguenti due casi:

1. $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $B = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
2. $A = \mathbb{Q}$ e $B = \mathbb{Q}$.

La funzione f è differenziabile nell'origine nel secondo caso?

Problema 2 [≤ 10pt]. Siano $a, b > 0$ due numeri reali, e siano A e B due asticelle di lunghezza $2a$ e $2b$, rispettivamente. Ogni asticella è libera di muoversi nel piano mantenendo i propri vertici ancorati, uno all'asse x, e l'altro all'asse y, in modo tale che l'asticella A sia sempre nel primo quadrante, e l'asticella B sia sempre nel terzo quadrante. Valutando tutte le possibili posizioni reciproche assumibili dalle asticelle A e B, si calcolino la minima e la massima distanza tra i loro punti medi.

Problema 3 [≤ 8pt]. Si calcoli $\lim_{n\to\infty} I_n$, dove si è posto, per ogni $n \geq 1$,

$$I_n = \iint_{C_n} f, \qquad f(x,y) = \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} e^{x^2+y^2}, \qquad C_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 16,\ y \geq \frac{1}{n} - x\right\}.$$

Problema 4 [≤ 9pt]. Sia $\varepsilon > 0$ e si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 u'' + u = 1, \\ u(0) = 0, \\ u'(0) = \frac{1}{\varepsilon}. \end{cases}$$

Determinare la soluzione $u_\varepsilon : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ del problema. Calcolare il limite *puntuale* della successione (u_ε) su $[0,\infty)$ per $\varepsilon \to 0$. Stabilire infine su quali intervalli $I \subset [0,\infty)$ la successione (u_ε) converge *uniformemente*.

Si ricorda che con almeno **15 studenti iscritti** *viene attivato il Corso di Recupero di* **ANALISI MATEMATICA II** *presso la sede di Canazei dal* **17** *al* **30** *agosto 2008.* **Le iscrizioni sono aperte e si chiuderanno il 4 luglio 2008**.

TEMPO: 2h:30m. Verona, 24 Giugno 2008

Università degli Studi di Verona

DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Appello di Analisi Matematica II (Mod. base) - a.a. 07/08, M. Squassina

[Corsi di Laurea in Mat. Applicata, Spec. Informatica, Info. Multimediale, Bioinfo]

Appello d'esame N.5, 15 Luglio 2008 - Sessione Estiva

Nome, Cognome, Matricola, CdL: *MatApp? crocia il box* ☐

Indicazioni: Per sostenere l'esame è necessario essere iscritti on-line. Scrivere *nome, cognome, matricola* e *corso di laurea* in stampatello. I compiti anonimi *non* saranno corretti. Libri, appunti e calcolatrici grafiche *non* sono consentiti. Punteggio massimo: *+35 punti.*

Problema 1 [≤ 10pt]. Per ogni k intero positivo, si consideri la funzione

$$f_k(x,y) = \begin{cases} (y^k - x^2)\log|y-x| & \text{se } y \neq x, \\ 0 & \text{se } y = x. \end{cases}$$

1. Discutere continuità e differenziabilità di f_2;
2. Discutere continuità e differenziabilità di f_k nell'origine.

Problema 2 [≤ 8pt]. In quali punti della circonferenza di centro $C_\alpha = (\alpha, \sqrt{3}\alpha)$ e raggio $r > 0$ la distanza (euclidea) dall'origine assume i valori massimo e minimo?

Problema 3 [≤ 8pt]. Si calcoli $\lim_{n\to\infty} I_n$, dove si è posto, per ogni $n \geq 1$,

$$I_n = \iint_{C_n} f, \qquad f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{per } y \geq 0, \\ 0 & \text{per } y < 0, \end{cases} \qquad C_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x - \frac{n+1}{n}\right)^2 + y^2 \leq \frac{(n+1)^2}{4n^2}\right\}.$$

Problema 4 [≤ 9pt]. Per ogni $\mu \in \mathbb{R}^+$ si consideri il problema

$$\begin{cases} u'' - 2u' + (1+\mu^2)u = \mu^2 \sin(x) - 2\cos(x), \\ u(0) = u(\pi) = 0. \end{cases}$$

1. Per quali $\mu \in \mathbb{R}^+$ esiste una e una sola soluzione al problema?
2. Per quali $\mu \in \mathbb{R}^+$ esistono infinite soluzioni al problema?

TEMPO: 2h:30m. Verona, 15 Luglio 2008

Università degli Studi di Verona

DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Appello di Analisi Matematica II (Mod. base) - a.a. 07/08, M. Squassina

[Corsi di Laurea in Mat. Applicata, Spec. Informatica, Info. Multimediale, Bioinfo]

Appello d'esame N.6, 10 Settembre 2008 - Sessione Autunnale

Nome, Cognome, Matricola, CdL: *MatApp? crocia il box* □

Indicazioni: Per sostenere l'esame è necessario essere iscritti on-line. Scrivere *nome*, *cognome*, *matricola* e *corso di laurea* in stampatello. I compiti anonimi *non* saranno corretti. Libri, appunti e calcolatrici grafiche *non* sono consentiti. Punteggio massimo: *+35 punti*.

GIUSTIFICARE ACCURATAMENTE TUTTE LE RISPOSTE FORNITE

Problema 1 [≤ 9pt]. Per $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione

$$f_\alpha(x,y) = \begin{cases} \frac{x^{2\alpha}|y|\arctan(xy)}{(4x^2+9y^2)^{\alpha/2}} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \text{ se } \alpha \geq 0, \text{ per } x \neq 0 \text{ se } \alpha < 0, \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0) \text{ se } \alpha \geq 0, \text{ per } x = 0 \text{ se } \alpha < 0. \end{cases}$$

Discutere la continuità di f_α al variare di α. Vero o falso che f_{-2} è differenziabile in $(0,0)$?

Problema 2 [≤ 8pt]. Si determini l'insieme $f(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}$, dove f è la funzione definita da $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2xy$.

Problema 3 [≤ 8pt]. Si calcoli l'integrale

$$\iint_C xye^{-\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy, \qquad C = C_1 \cup C_2,$$

dove si è posto $C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1,\ x \leq 0\}$ e $C_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x,\ x \geq 0\}$.

Problema 4 [≤ 10pt]. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e si consideri la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^∞

$$f_n(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+\frac{1}{n^2}} + \alpha e^{-n^2(x^2+y^2)}, \qquad n \in \mathbb{N},\ n \geq 1.$$

1. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, determinare il limite puntuale f di f_n e dire se f è continua oppure no;
2. Per $\alpha = 0$, dire se limite puntuale f è differenziabile o meno;
3. Per $\alpha = 0$, dire se la convergenza di f_n a f è uniforme sul disco $D_\varepsilon = \{x^2+y^2 \leq \varepsilon^2\}$, con $\varepsilon > 0$;
4. Per $\alpha = 0$, tenuto di 2), dire se le successioni $\frac{\partial f_n}{\partial x}$, $\frac{\partial f_n}{\partial y}$ possono convergere uniformemente su D_ε. [∗]

[∗] Il punto 4) è facoltativo.

TEMPO: 2h:30m. Verona, 10 Settembre 2008

Università degli Studi di Verona

DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Appello di Analisi Matematica II (Mod. base) - a.a. 07/08, M. Squassina

[Corsi di Laurea in Mat. Applicata, Spec. Informatica, Info. Multimediale, Bioinfo]

Appello d'esame N.7, 25 Settembre 2008 - Sessione Autunnale

Nome, Cognome, Matricola, CdL: *MatApp? crocia il box* □

Indicazioni: Per sostenere l'esame è necessario essere iscritti on-line. Scrivere *nome, cognome, matricola* e *corso di laurea* in stampatello. I compiti anonimi *non* saranno corretti. Libri, appunti e calcolatrici grafiche *non* sono consentiti. Punteggio massimo: *+35 punti.*

GIUSTIFICARE ACCURATAMENTE TUTTE LE RISPOSTE FORNITE

Problema 1 [≤ 10pt]. Sia $\alpha > 0$ e si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\cos(x^2y^2)-1}{\sin[\ln(1+(4x^2+25y^2)^{\alpha})]} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Discutere la differenziabilità di f in $(0,0)$ al variare di α.

Problema 2 [≤ 8pt]. Si determini l'insieme $f(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}$, dove f è la funzione definita da $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}(x^2-y^2)$.

Problema 3 [≤ 8pt]. Per ogni $\alpha > 0$ si consideri l'integrale

$$I(\alpha) = \iint_{C_\alpha} \frac{1}{1+\alpha^2x^2+y^2}\,dxdy, \qquad C_\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha^2x^2+y^2 \leq \alpha^2\}.$$

Si calcoli il limite

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \frac{\alpha I(\alpha)}{2\ln\alpha}.$$

Problema 4 [≤ 9pt]. Mostrare che la relazione

$$F(x,y) = 0, \qquad F(x,y) = x^2y^3 + x + y,$$

individua una funzione implicita φ definita in un intorno di $(0,0)$. Mostrare inoltre che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)+x}{x} = 0.$$

Dire infine se la funzione implicita φ si può definire su tutto $\mathbb{R}$. [$*$]

[$*$] L'ultima richiesta è facoltativa.

[$*$] *Suggerimento: ad $x \in \mathbb{R}$ fissato si calcolino $\lim_{y\to\pm\infty} F(x,y)$ e il segno di $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$. Si utilizzi poi un noto teorema.*

TEMPO: 2h:30m. Verona, 25 Settembre 2008