ALGEBRA LINEARE CON ELEMENTI DI GEOMETRIA

modulo: ELEMENTI DI GEOMETRIA (prof. M. Spera)

Prova scritta del 28 giugno 2011

(1) Nel piano euclideo reale, in cui sia fissato un riferimento cartesiano, ampliato proiettivamente (e complessificato), si determini la conica $\mathcal{C}$ tale che la polare di $P: [1,-1,0]$ sia $p: x_1 = 0$, e che passi per $P_1: [1,0,1]$, $P_2: [1,0,-1]$, $Q: [1,2,0]$.
Se ne individuino gli assi e la forma canonica metrica, e se ne abbozzi il grafico.

(2) Nel piano euclideo reale, in cui sia fissato un riferimento cartesiano, si determini la (matrice della) trasformazione che manda

$$A: (0,0) \longmapsto A': (0,0)$$

$$B: (2,0) \longmapsto B': (2,0)$$

$$C: (1,1) \longmapsto C': (2,2)$$

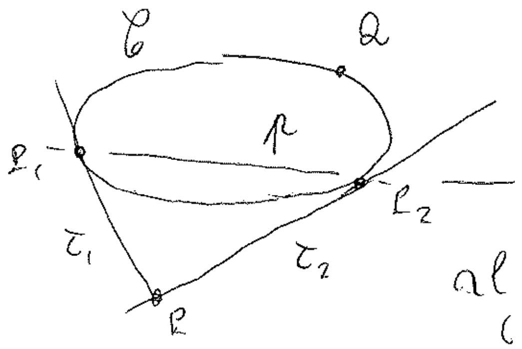
Si tratta di un movimento rigido?
Data $\mathcal{C}: x^2+y^2=1$, cosa si può dire di $\mathcal{C}'$, immagine di $\mathcal{C}$ tramite T?
Se $\mathcal{D} = \{x^2+y^2 \leq 1\}$, calcolare $\underset{\text{area}}{A}(\mathcal{D}')$, con $\mathcal{D}'$ immagine di $\mathcal{D}$ tramite T.
Determinare infine le coordinate baricentriche di $H: (1,0)$ rispetto ad A, B, C e quelle di H' (imm. di T) rispetto ad A', B', C'.

Tempo a disposizione: 1h 15m

Le risposte vanno adeguatamente giustificate

(1)

Conica $\mathcal{C}$ tale che la polare di $P:[1,-1,0]$ sia $p: x_1 = 0$ (asse y) e passante per $P_1:[1,0,1]$, $P_2:[1,0,-1]$, $Q:[1,2,0]$

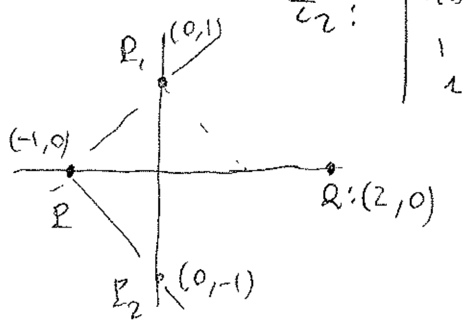


P_1 e P_2 appartengono sia a $\mathcal{C}$ che a p, dunque $\tau_1 = PP_1$ e $\tau_2 = PP_2$ sono tangenti a $\mathcal{C}$ in P_1, P_2, risp. $\mathcal{C}$ appartiene pertanto al fascio di coniche bitangenti: (forma non omogenea)

$$\boxed{\tau_1\tau_2 + \lambda p^2 = 0}$$

$$\tau_1: \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad -x_0 - x_1 + x_2 = 0 \qquad y = x+1$$

$$x_0 + x_1 - x_2 = 0$$



$$\tau_2: \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad x_0 - x_1(-1) + x_2 = 0$$

$$x_0 + x_1 + x_2 = 0 \qquad y = -x-1$$

$$\downarrow$$

$$\mathcal{C}: \quad (\overbrace{x_0 + x_1}^{A} \overbrace{- x_2}^{-B})(\overbrace{x_0 + x_1}^{A} \overbrace{+ x_2}^{+B}) + \lambda x_1^2 = 0$$

$$\overbrace{(x_0+x_1)^2}^{A^2} - \overbrace{x_2^2}^{B^2} + \lambda x_1^2 = 0$$

passaggio per Q: $(\underbrace{1+2}_{3})^2 + \lambda \cdot 4 = 0 \qquad 9 + \lambda\cdot 4 = 0 \qquad \lambda = -\dfrac{9}{4}$

$$(x_0+x_1)^2 - x_2^2 - \frac{9}{4}x_1^2 = 0$$

$$4(x_0+x_1)^2 - 4x_2^2 - 9x_1^2 = 0$$

$$4(x_0^2 + 2x_0x_1 + x_1^2) - 4x_2^2 - 9x_1^2 = 0$$

$$\boxed{4x_0^2 - 5x_1^2 - 4x_2^2 + 8x_0x_1 = 0}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

A_{00}

$\alpha = \det A =$ (Laplace ultima riga o col.)

$$(-4)\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -4(-20-16) = +36 \cdot 4 = 12^2$$

$$\alpha_{00} = \det A_{00} = 20 > 0$$

(ellisse)

$$\gamma = \operatorname{tr} A_{00} = -9$$

det. gli assi e le lungh. dei semiassi in modo elementare, sfruttando le simmetrie della figura
gli assi saranno // agli assi coordinati. uno degli assi è l'asse x

$$\mathcal{C} \cap \{y=0\}: \quad 4 - 5x^2 + 8x = 0$$

$$5x^2 - 8x - 4 = 0 \qquad x = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{5} = \frac{4 \pm 6}{5} \begin{cases} 2 \leftarrow Q \\ -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$x_{C_1} = \frac{2 - \frac{2}{5}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{5} = \frac{4}{5}$$

uno dei semiassi vale $\frac{1}{2}\left\{2 - \left(-\frac{2}{5}\right)\right\} = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{12}{5} = \frac{6}{5}$

come è giusto che sia

L'altro: $\quad \mathcal{C} \cap \{x = \frac{4}{5}\}$

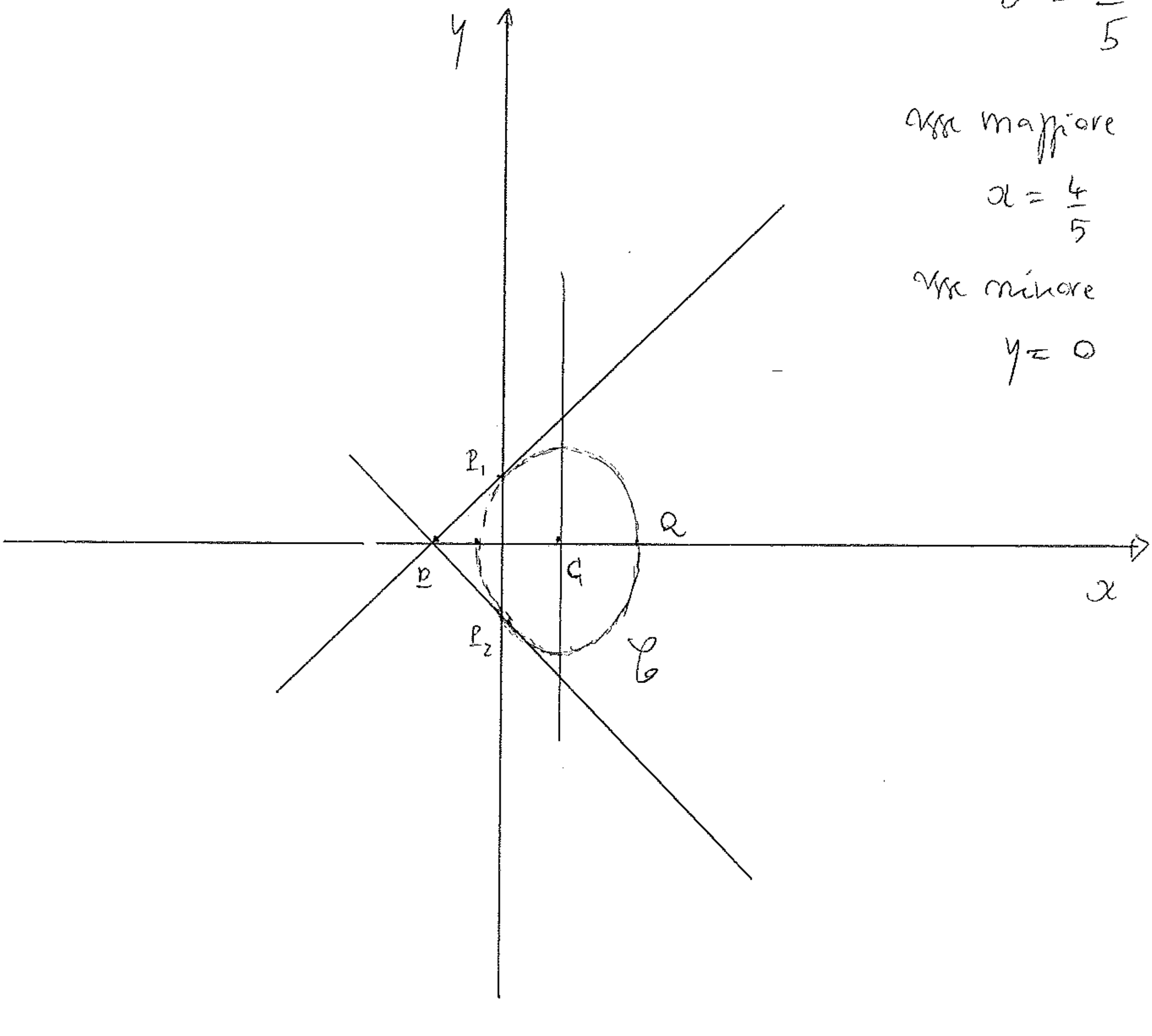
$$4 - 5\left(\frac{4}{5}\right)^2 - 4y^2 + 8\,\frac{4}{5} = 0$$

$$4 - \frac{\cancel{5}\cdot 16}{5\cancel{2}} - 4y^2 + \frac{32}{5} = 0 \qquad \frac{\overbrace{20-16}^{4}}{5} - 4y^2 + \frac{32}{5} = 0$$

$$4 - 20y^2 + 32 = 0$$

$$20y^2 - 36 = 0 \qquad 5y^2 - 9 = 0 \qquad y = \pm\frac{3}{\sqrt{5}} = \pm\frac{3}{5}\sqrt{5}$$

l'altro semiasse vale $\frac{3}{5}\sqrt{5}$: $\quad$ Dunque $\quad a = \frac{3}{5}\sqrt{5}$ maggiore
$b = \frac{6}{5}$ minore



asse maggiore (fuochi)

$x = \frac{4}{5}$

asse minore

$y = 0$

Controlliamo il calcolo col metodo degli invarianti

$$\mathfrak{A} = 144 = 12^2 = 4^2 \cdot 3^2$$

$$a_{00} = 20$$

$$\gamma = -9$$

risolviamo perciò:

$$t^2 + \frac{a_{00}\gamma}{\mathfrak{A}} t + \frac{a_{00}^3}{\mathfrak{A}^2} = 0$$

$$t^2 + \frac{-20 \cdot 3^2}{4^2 \cdot 3^2} t + \frac{4^3 \cdot 5^3}{4^4 \cdot 3^4} = 0$$

$$t^2 - \frac{5 \cdot \cancel{4}}{4^{\cancel{2}}} t + \frac{5^3}{4 \cdot 3^4} = 0$$

$$4 \cdot 3^4 \, t^2 - 3^4 \cdot 5 \, t + 5^3 = 0$$

$$t = \frac{3^4 \cdot 5 \pm \sqrt{3^8 \cdot 5^2 - 4^2 \cdot 3^4 \cdot 5^3}}{4 \cdot 3^4} =$$

$$= \frac{3^4 \cdot 5 \pm \sqrt{3^4 5^2 \left[\underbrace{3^4}_{81} - \underbrace{4^2 \cdot 5}_{80} \right]}}{4 \cdot 3^4} =$$

$$= \frac{3^4 \cdot 5 \pm 3^2 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 3^4} = \frac{3^{\cancel{4}} \cdot 5 \, (\overset{9}{3^2} \pm 1)}{2 \cdot 4 \cdot 3^{\cancel{4}\,2}} =$$

$$\frac{5}{8 \cdot 9} (9 \pm 1) \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{5}{{}_4\cancel{8} \cdot 9} \cdot \cancel{10}^{5} = \dfrac{25}{36} = \dfrac{5^2}{6^2} \\[2ex] \dfrac{5}{8 \cdot 9} \cdot 8 = \dfrac{5}{9} \end{array} \right.$$

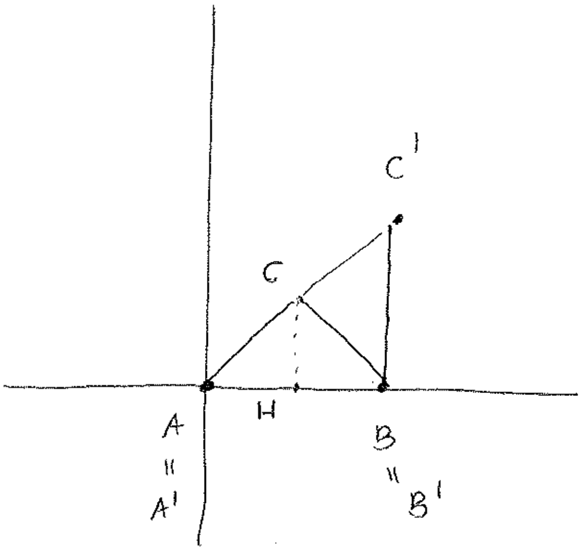
$$t = \begin{cases} \dfrac{5^2}{6^2} \longrightarrow \dfrac{6}{5} = b \\[2ex] \dfrac{5}{9} \longrightarrow \dfrac{3}{\sqrt{5}} = a \end{cases}$$

$$t = \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$$

$$a^2 = \alpha$$
$$b^2 = \beta$$

[è poi chiaro che gli assi sono quelli già trovati...]

(2)



$H: (1,0)$

$A: (0,0) \longmapsto A' = (0,0)$

$B: (2,0) \longmapsto B' = (2,0)$

$C: (1,1) \longmapsto C' = (2,2)$

T è della forma (formalismo unificato) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\quad O = A \longmapsto A' = O \Rightarrow b_1 = b_2 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2a_{11} = 2 \\ 2a_{21} = 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \boxed{a_{11} = 1} \\ \boxed{a_{21} = 0} \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_{12} \\ 0 & 0 & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1 + a_{12} = 2 \\ a_{22} = 2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \boxed{a_{12} = 1} \\ \boxed{a_{22} = 2} \end{matrix}$$

$$T: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det T = 2$$

(non è un mov. rigido)

$$\mathcal{D} = \{x^2 + y^2 \leq 1\} \qquad A(\mathcal{D}) = \pi$$

$$A(\mathcal{D}') = \pi \cdot \det A = 2\pi$$

coord. bar. di H risp. ad A, B, C. È immediato vedere che $H = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$. Le coord. del punto trasformato non cambiano