Logica Computazionale - 2007-8
esercizio 6

November 16, 2007

Esercizio 1. Un termine u ha la *proprietà di CR* se per ogni u_1, u_2 tali che $u\beta u_1$ e $u\beta u_2$ allora esiste u' tale che $u_1\beta u'$ e $u_2\beta u'$.

- Dimostrare che se $u[t/x]t_1 \dots t_n$ ha la proprietà di CR, anche $(\lambda xu)tt_1 \dots t_n$ ha la proprietà di CR.

Esercizio 2. L'insieme Λ_I dei lambda-I termini è così definito:

1. Per ogni variabile x, $x \in \Lambda_I$;
2. Se $u, t \in \Lambda_I$, allora $ut \in \Lambda_I$;
3. Se $u \in \Lambda_I$ e x è una variabile che occorre libera in u, allora $\lambda xu \in \Lambda_I$.

Dimostrare che ogni lambda-I termine è normalizzabile per leftmost reduction se e solo se è fortemente normalizzabile.

(*Hint:* Procedere per induzione sulla coppia $(l(v), c(v))$, dove $l(v)$ è la lunghezza della leftmost reduction di v e $c(v)$ il numero di simboli di v.)

Esercizio 3. (i) Si consideri il calcolo dei sequenti sul linguaggio

$$A, B \quad := \quad p \mid \top \mid A \wedge B \mid A \to B$$

con sequenti della forma $A \Rightarrow B$ (una sola formula sia destra che a sinistra) con assiomi $id: \ A \Rightarrow A$ e solo la regola del Cut nella forma

$$\frac{f: \ A \Rightarrow B \qquad g: \ B \Rightarrow C}{g \circ f: \ A \Rightarrow C}$$

Definire la categoria $Seq(IL)$ che ha come oggetti le formule e come insieme di morfismi $Hom_{Seq(IL)}(A, B) = \{f : \ A \Rightarrow B\}$. Dimostrare che $Seq(IL)$ è una categoria.

(ii) Considera il calcolo dei sequenti minimale $\mathbf{LJ}^{\supset\cap\top}$ con linguaggio e sequenti come in (i), aggiungendo gli assiomi e le regole

$$nil_A : \ A \Rightarrow T$$

$$\frac{f : \ C \Rightarrow A \qquad g : \ C \Rightarrow B}{< f, g >: \ C \Rightarrow A \cap B} \qquad \pi_1 : \ A_1 \cap A_2 \Rightarrow A_1 \qquad \pi_2 : \ A_1 \cap A_2 \Rightarrow A_2$$

$$\frac{f \ C \cap A \Rightarrow B}{cur(f) : \ C \Rightarrow A \supset B} \qquad App_{A,B} : \ (A \supset B) \cap A \Rightarrow B$$

Dimostrare che $Seq(IL)$ è una categoria cartesiana chiusa, con $A \cap B$ come prodotto di A e B e con $A \to B$ come oggetto dei morfismi da A in B.

(iii) Dato un insieme A, considera il *preordine* $(\wp(A), \subseteq)$, (l'insieme dei sottoinsiemi di A, con la relazione di inclusione, che è riflessiva e transitiva). Definire una categoria $\wp(A)$ che ha come oggetti i sottoinsiemi di A e come insieme di morfismi $Hom_{wp(A)}(A, B) = \{f : A \subseteq B\}$ se A è un sottoinsieme di B ed $\emptyset$ altrimenti.

(iv) Dimostrare che $\wp(A)$ è cartesiana chiusa, con l'intersezione come prodotto e con $A^c \cup B$ come oggetto dei morfismi da A in B (dove A^c è il complemento di A).

(v) Si consideri il lambda calcolo tipato semplice, associato alla deduzione naturale $\mathbf{NJ}^{\supset\cap}$. Si definisca una categoria $C(\lambda)$ che ha come oggetti i tipi (secondo la grammatica della parte (i)) e come morfismi i termini $b(x)$ associati ad una derivazione di tipo $x : A \vdash b : B$ *modulo* α-equivalenza nella forma

$$x : A \vdash b : B \qquad \equiv \qquad y : A \vdash b[y/x] : B$$

Verificare che $C(\lambda)$ è una categoria.

(vi) Verificare che $C(\lambda)$ è cartesiana chiusa.