

Esercizi per il Corso di ALGEBRA

Foglio 4

27 ottobre 2015

1. Si consideri il sottoinsieme $\mathbb{Z}[\sqrt{11}] = \{a + b\sqrt{11} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ di \mathbb{R} .
 - (a) **(4 punti)** Si verifichi $\mathbb{Z}[\sqrt{11}]$ è un sottoanello del campo \mathbb{R} dei numeri reali.
 - (b) **(5 punti)** Si verifichi che il sottoinsieme $I = \{a + b\sqrt{11} \mid a + 5b \text{ è multiplo di } 7\}$ è un ideale di $\mathbb{Z}[\sqrt{11}]$.
 - (c) **(4 punti)** Si verifichi che la funzione $\varphi : \mathbb{Z}[\sqrt{11}] \rightarrow \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, $\varphi(a + b\sqrt{11}) = \overline{a + 5b}$, è un omomorfismo d'anelli e si deduca che I è un ideale massimale di $\mathbb{Z}[\sqrt{11}]$.
2. Si consideri l'anello $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$.
 - (a) **(3 punti)** Si calcoli $\overline{11}^{1760}$ in $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$;
 - (b) **(3 punti)** Si trovino tutti gli elementi invertibili di $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$;
 - (c) **(3 punti)** Si calcolino le ordine degli elementi del gruppo moltiplicativo $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}^*$;
 - (d) **(3 punti)** Si dimostri che il gruppo moltiplicativo $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}^*$ è isomorfo al gruppo $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$.
3. **(5 punti)** Si consideri l'anello dei quaternioni, cioè il spazio vettoriale reale \mathbb{H} di dimensione 4 e base ortonormale $\{\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ con l'operazione lineare $*$: $\mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ tale che

$$\mathbf{1} * h = h * \mathbf{1} = h, \forall h \in \mathbb{H}$$

$$\mathbf{i} * \mathbf{i} = \mathbf{j} * \mathbf{j} = \mathbf{k} * \mathbf{k} = -\mathbf{1}$$

$$\mathbf{i} * \mathbf{j} = -\mathbf{j} * \mathbf{i} = \mathbf{k}$$

$$\mathbf{j} * \mathbf{k} = -\mathbf{k} * \mathbf{j} = \mathbf{i}$$

$$\mathbf{k} * \mathbf{i} = -\mathbf{i} * \mathbf{k} = \mathbf{j}$$

Si dimostri che ogni elemento \mathbf{q} di $\mathbb{H} \setminus \{0\}$ è invertibile. Un'anello con questa proprietà si chiama **anello di divisione**.

Consegna: martedì 3 novembre, 15:30, all'inizio delle esercitazioni.