ALGEBRA LINEARE CON ELEMENTI DI GEOMETRIA

modulo: ELEMENTI DI GEOMETRIA (Prof. M. Spera)

Prova scritta del 4 luglio 2012

① Nel piano euclideo reale, in cui sia fissato un riferimento cartesiano, e ampliato proiettivamente, si determini la conica $\mathscr{C}$ tangente a $r_1 : x=0$ in $P_1:(0,2)$ e a $r_2: x=4$ in $P_2:(4,0)$, e passante per $P:(2,3)$. Determinarne gli assi e la forma canonica metrica, abbozzandone altresì il grafico. Individuarne infine il diametro d' coniugato di $d: x=2$.

② Nello spazio euclideo reale, in cui sia fissato un riferimento cartesiano, si determinino centro e raggio della circonferenza $\mathscr{C} = \mathcal{S} \cap \pi$, dove $\mathcal{S}: x^2+y^2+z^2=1$, $\pi: x+y=1$, nonché il vertice V del cono tangente a $\mathcal{S}$ lungo $\mathscr{C}$.

Tempo a disposizione: 1h 15m

Le risposte vanno adeguatamente giustificate.

Elegeo
4 luglio 2012

(1) Determinare la conica $\mathscr{C}$

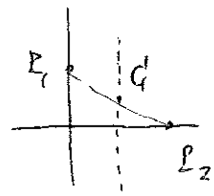
tangente a $r_1 : x=0$ in $P_1 : (0,2)$

e a $r_2 : x = 4$ in $P_2 : (4,0)$ e passante

per $P : (2,3)$.

Sol. $r_1 \parallel r_2 \Rightarrow$

P_1P_2 è un diametro



$P_1P_2 : \quad \frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$

$P_1P_2 : \quad x + 2y - 4 = 0$

G, pto medio di P_1P_2, è il centro $\quad G : (2,1)$

(è già chiaro che sarà un'ellisse...) (passaggio per P e per il suo simmetrico...

si ha il fascio di coniche bitangenti

$$x(x-4) + \lambda(x+2y-4)^2 = 0$$

Passaggio per $P : (2,3)$ $\quad 2(\underbrace{2-4}_{-2}) + \lambda(2+6-4)^2 = 0$

$-4 + \lambda \cdot 4^2 = 0 \qquad \lambda = \frac{1}{4}$

$\mathscr{C}: \quad 4x(x-4) + (x+2y-4)^2 = 0$

$4x^2 - 16x + x^2 + 4y^2 + 16 + 4xy - 8x - 16y = 0$

$5x^2 + 4xy + 4y^2 - 24x - 16y + 16 = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 16 & -12 & -8 \\ -12 & 5 & 2 \\ -8 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{a} = \det A = 16\cdot 20 + \overset{16}{\overbrace{2\cdot 12\cdot 8\cdot 2}} - \overset{16\cdot 4\cdot 5}{\overset{\parallel}{8^2\cdot 5}} - \underbrace{12^2\cdot 4}_{\substack{-4^2\cdot 3^2\cdot 4 \\ = -4^2\cdot 36}} - 16\cdot 4$$

$$= 16\,(\cancel{20} + 24 - \cancel{20} - 36)$$

$$= 16\,(-12) = -4^2\cdot 4\cdot 3 = -4^3\cdot 3$$

$$\mathfrak{a}_{00} = \det A_{00} = 20 - 4 = 16 \quad (>0\text{, ellisse})$$

$$\gamma = \mathrm{tr}\, A_{00} = 9 = 3^2$$

$$\boxed{t^2 + \frac{\mathfrak{a}_{00}\gamma}{\mathfrak{a}}\, t + \frac{\mathfrak{a}_{00}^3}{\mathfrak{a}^2} = 0}$$

$$t^2 + \frac{16\cdot 9}{(-16)\cdot 12}\, t + \frac{16^3}{16^2(-12)^2} = 0$$

$$t^2 - \frac{3}{4}t + \frac{16}{12^2} = 0 \qquad \frac{4^2}{4^2\cdot 3^2} = \frac{1}{9}$$

36 $$t^2 - \frac{3}{4}t + \frac{1}{9} = 0$$

$$3^6 - 3^2\cdot 4^2\cdot 4 = 3^6 - 3^2\cdot 4^3 = 3^2[3^4 - 4^3]$$

$$36t^2 - 27t + 4 = 0$$

$$t = \frac{27 \pm \sqrt{3^6 - 4\cdot 4\cdot 36}}{2\cdot 36} = \frac{27 \pm \sqrt{3^2[3^4-4^3]}}{2\cdot 36}$$

$$= \frac{\overset{3\cdot 9}{27} \pm 3\sqrt{17}}{\underset{3\cdot 3\cdot 8}{9\cdot 8}} = \frac{9 \pm \sqrt{17}}{24}$$

entrambi positivi (come dev'essere)

$$3^4 - 4^3 = 81 - 64 = 17$$

Prima: $\sqrt{17} = \sqrt{16+1} = \sqrt{16\left(1+\frac{1}{16}\right)} =$

$$= 4\sqrt{1+\frac{1}{16}} \simeq 4\left(1+\frac{1}{32}\right) = 4 + \frac{1}{8} \simeq 4{,}125$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{9-\sqrt{17}}{24}}} \qquad b = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{9+\sqrt{17}}{24}}}$$

$\frac{24}{5} = 4{,}8$

$\frac{5}{24} \simeq \frac{1}{5}$ $\quad a \sim \sqrt{5} \sim 2{,}25$ $\qquad \frac{13}{24} \sim \frac{1}{2}$ $\quad b \sim \sqrt{2} \sim 1{,}414\ldots$

$$\sqrt{5} = \sqrt{4+1} = \sqrt{4\left(1+\frac{1}{4}\right)} = 2\sqrt{1+\frac{1}{4}}$$
$$\sim 2\left(1+\frac{1}{8}\right) = 2+\frac{1}{4}$$

* Diametro coniugato di d: $x = 2$: è subito visto che è R_1R_2

assi (altri: $\begin{pmatrix} -m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = 0$

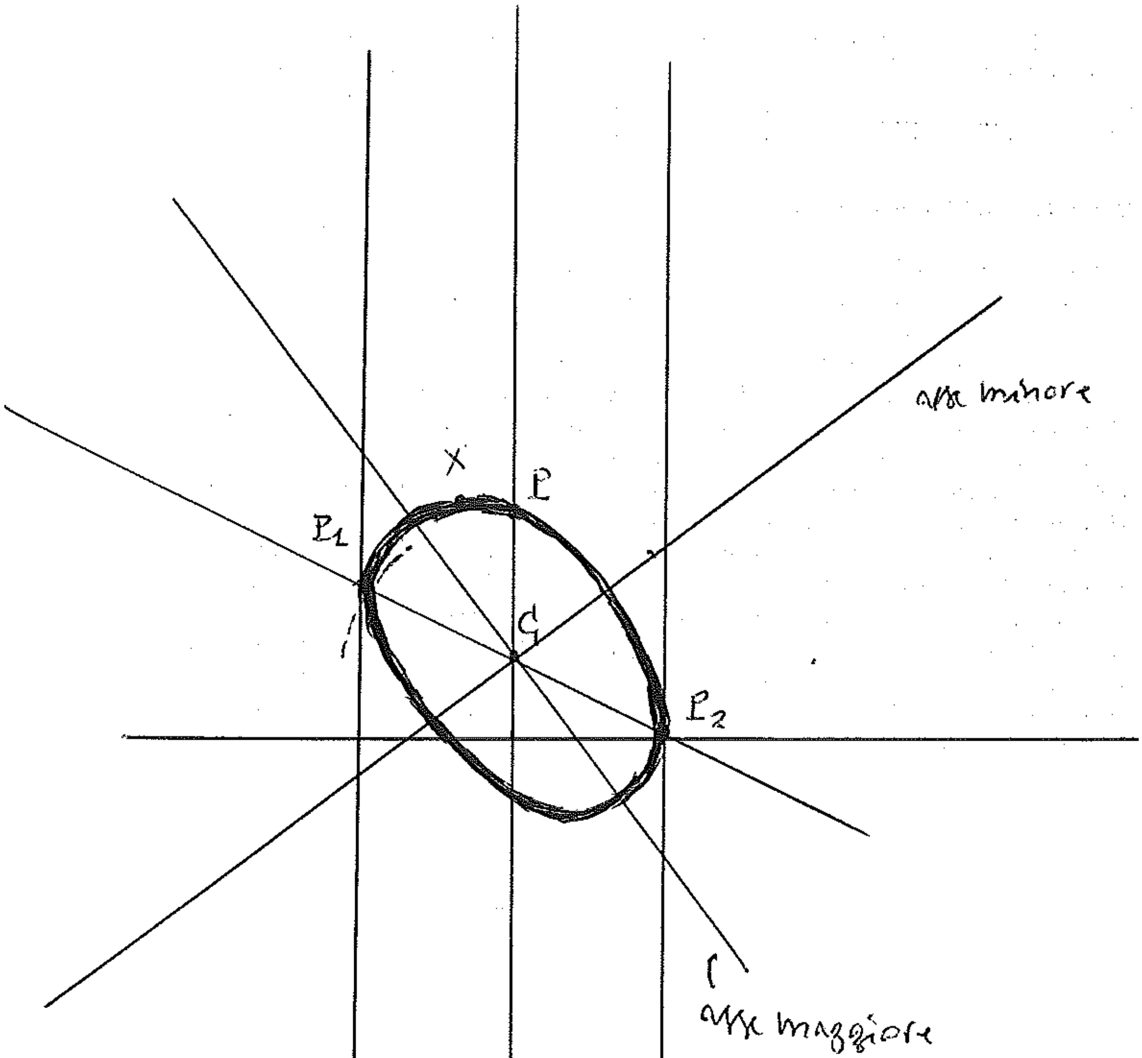
$$\begin{pmatrix} -m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5+2m \\ 2+4m \end{pmatrix} = 0 \qquad -m(5+2m) + 2 + 4m = 0$$
$$-5m - 2m^2 + 2 + 4m = 0$$

$$-2m^2 - m + 2 = 0 \qquad m = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$$
$$2m^2 + m - 2 = 0$$

(sono effe. ortog.

$$\frac{(-1-\sqrt{17})(-1+\sqrt{17})}{16} =$$
$$\frac{1-17}{16} = -1 \quad \checkmark)$$

Grafico



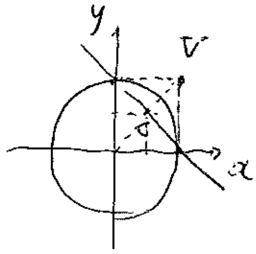
[Come si fa a capire subito?
osservare che $\overline{CP_1}^2 = 2^2+1 = 5$
$\overline{CP}^2 = 4$ Per ragioni di
simmetria $\overline{CX}$ deve aumentare
tra P_1 e P e in seguito
diminuire]

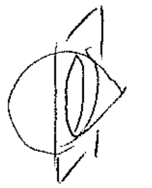
Elegro
6 luglio 2012

② det. centro e raggio della circonferenza $\mathcal{C} : \mathcal{S} \cap \pi$

$\mathcal{S}: \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$

$\pi: \quad x + y = 1$



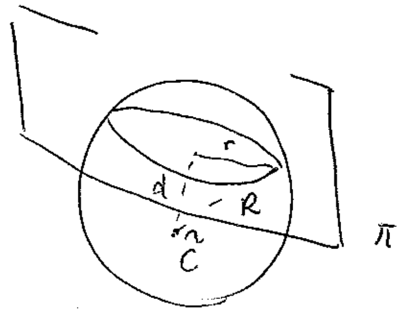


\+ vertice del cono tangente a $\mathcal{S}$ lungo $\mathcal{C}$.

Sol. ① velocissima (v. figura)

$C: \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \qquad r = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad V: (1, 1, 0)$

② standard:



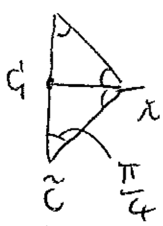
$C: \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$
$V: (1, 1, 0)$

d = distanza di $\hat{C}$ (centro della sfera) da π

$= \dfrac{|-1|}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} < 1 \implies \mathcal{C}$ è reale.

Si ha pertanto (Pitagora) $d^2 + r^2 = R^2$, ossia

$\frac{1}{2} + r^2 = 1 \implies r^2 = \frac{1}{2} \implies r = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$



C e V si trovano sulla retta per C, perp. a π

$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$ $\qquad C: \quad t + t - 1 = 0 \qquad 2t = 1 \implies t = \frac{1}{2}$

V corr. in questo caso a 2t, cioè $2t = 1$