Foglio di esercizi di algebra lineare

Sansonetto Nicola*

1. Si enunci il Teorema di Schur. (*3 punti*)

2. Si consideri la seguente matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 3 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   (a) Si determinino il polinomio caratteristico e gli autovalori di A. (*3 punti*)
   (b) Per ogni autovalore λ di A si determini una base dell'autospazio E_λ. (*4 punti*)
   (c) Si diagonalizzi A, cioè si trovino una matrice $P \in Gl(3, \mathbb{R})$ e una matrice diagonale $D \in M_{3\times3}(\mathbb{R}^)$ tali che $P^{-1}AP = D$. (*2 punti*)

3. Si determini la matrice associata all'applicazione lineare
$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+z \\ y+z \\ x+y \end{pmatrix}$$
   rispetto alla base canonica e si decida se f è un isomorfismo. (*6 punti*)

4. Siano $A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times4}(\mathbb{R})$ e $B := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times2}(\mathbb{R})$. Si dimostri che non può esistere una matrice $X \in M_{4\times2}(\mathbb{R})$ tale che $A\,X = B$. (*6 punti*)

5. Sia $n \in \mathbb{N}$. Si ricordi che una matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ è simmetrica se $A = A^T$.
   (a) Siano $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ due matrici simmetriche. Si dimostri: AB è simmetrica se e solo se vale $AB = BA$. (*3 punti*)
   (b) Si dia un esempio di matrici simmetriche $A, B \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$ tali che la matrice AB non è simmetrica. (*3 punti*)

*e-mail: nicola.sansonetto@gmail.com