6. I NUMERI ORDINALI.

6.1. BUONI ORDINAMENTI.

Nell'esaminare le modalita' del contare un insieme finito di elementi, si era osservato che i passaggi a considerare un altro elemento sono in ugual quantita' indipendentemente dall'ordine con cui si sceglie il prossimo elemento da considerare. Questa osservazione mostra come si sia seguito un cammino che utilizza insiemi ordinati per arrivare a determinare la quantita' di elementi di un insieme finito, anche se poi non si e' insistito nel mettere in risalto l'ordinamento utilizzato poiche' si ottiene la stessa cardinalita' (esistenza di una biiettivita') qualsiasi sia ordinamento scelto dell'insieme finito.
Si sono studiate anche le cardinalita' di insiemi non finiti, senza ordinarli, pervenendo a situazioni a volte anti intuitive.
Ci si puo' domandare se l'introduzione di un ordine in insiemi infiniti faciliti il calcolo della quantita' di elementi dell'insieme e se questo calcolo e' indipendente dall'ordine scelto nel considerare gli elementi.
Forse e' opportuno precisare che la relazione d'ordine che si vuole considerare non e' una qualsiasi relazione d'ordine, ma una relazione d'ordine del tipo di quella dei numeri naturali che abbiamo visto essere una relazione di buon ordine, cioe' antiriflessiva, transitiva e tale che ogni sottoinsieme non vuoto di naturali ha primo elemento.
Cio' che si vuole studiare e' cosi' una struttura (X, {R}, {}, {}) con un universo X (che e' l'insieme su cui si vuole considerare un buon ordinamento, e che viene spesso chiamato supporto del buon ordinamento) e una relazione binaria R antiriflessiva, transitiva e tale che ogni sottoinsieme non vuoto dell'universo ha minimo rispetto a tale relazione d'ordine, struttura che non ha ne' funzioni ne' costanti, che indicheremo piu' semplicemente con (X,<) e che chiameremo **struttura di buon ordine** o **buon ordinamento**.
Esempi di strutture di buon ordine sono i singoli numeri naturali, considerati come insiemi di quelli che li precedono con l'usuale relazione d'ordine tra questi. Un esempio di struttura infinita di buon ordine e' costituito dall'insieme dei numeri naturali con il loro ordine usuale.
Due strutture di buon ordine saranno dette **dello stesso tipo d'ordine**, o **ordine isomorfe**, se sono isomorfe, cioe' se esiste una biiettivita' $\mathfrak{f}$ tra i supporti delle due che preserva l'ordine, ossia tale che a precede b nell'ordine della prima struttura se e solo se anche $\mathfrak{f}(a)$ precede $\mathfrak{f}(b)$ nell'ordine della seconda struttura; una tale funzione e' detta un **isomorfismo d'ordine**. Si noti la forte analogia tra il fatto che due insiemi siano equinumerosi e quello che due strutture di buon ordine siano dello stesso tipo: nel primo caso si richiede una biiettivita' tra i due insiemi, nel secondo si richiede ancora una biiettivita' tra i due insiemi, ma in piu' tale funzione deve preservare l'ordine.
Un esempio di struttura infinita di buon ordine della stessa cardinalita' dell'insieme dei naturali, ma non ordine isomorfo alla struttura di buon ordine usuale dei naturali, e' il seguente: il supporto e' dato dai numeri naturali a cui si aggiunge un elemento diverso, chiamiamolo a, e la relazione d'ordine, $<_X$ su detto supporto e' tale che tra naturali e' la usuale relazione d'ordine, <, inoltre a segue tutti gli altri elementi del supporto, $<_X = < \cup\{(n,a): n\in\mathbb{N}\}$. Si vede immediatamente che l'insieme $X = \mathbb{N}\cup\{a\}$ e' equinumeroso all'insieme $\mathbb{N}$ grazie alla biiettivita' che fa corrispondere ad a l'elemento 0 di $\mathbb{N}$ e a ciascun numero naturale di X il suo successore. Inoltre $(X,<_X)$ e $(\mathbb{N},<)$ non sono dello stesso tipo perche' una biiettivita' tra X e $\mathbb{N}$ deve far corrispondere all'elemento a di X un elemento di $\mathbb{N}$, chiamiamolo n, ma n ha successori mentre a no, sicche' una tale biiettivita' non puo' preservare l'ordine e non puo' essere un isomorfismo tra le due strutture.
Dimostriamo che
TEOREMA. C'e' un'unica funzione che e' un isomorfismo d'ordine tra due strutture di buon ordine dello stesso tipo.
DIMOSTRAZIONE. Siano $(A,<_A)$ e $(B,<_B)$ due strutture di buon ordine, e siano f_1 e f_2 due isomorfismi d'ordine tra la prima e la seconda. Mostriamo che deve essere $f_1 = f_2$. Altrimenti ci sarebbero degli elementi x di A tali che $f_1(x) \neq f_2(x)$ e sia $\underline{x}$ il piu' piccolo di tali elementi ($\underline{x}$ esiste perche' A e' bene ordinato da $<_A$). $\underline{x}$ non puo' essere il primo

elemento di A, perche' al piu' piccolo elemento di A deve corrispondere il piu' piccolo elemento di B e su tale elemento entrambe le funzioni che vogliono essere isomorfismi d'ordine fanno corrispondere lo stesso elemento. Allora per ogni y $<_A$ $\underline{x}$ si dovra' avere $f_1(y) = f_2(y)$. Sia z il piu' piccolo degli elementi di B (nell'ordine $<_B$) maggiori di $f_1(y)$ (o di $f_2(y)$ che e' lo stesso) per ogni y $<_A$ $\underline{x}$. Per essere isomorfismi d'ordine sia f_1 che f_2 devono far corrispondere z a $\underline{x}$, contro l'ipotesi che $\underline{x}$ fosse uno (il piu' piccolo) degli elementi x tali che $f_1(x) \neq f_2(x)$. Dunque non ci possono essere elementi di A ai quali le due funzioni facciano corrispondere elementi diversi, e le due funzioni f_1 e f_2 devono essere uguali.

Si noti la differenza tra il risultato appena dimostrato e il fatto che tra due insiemi equinumerosi con piu' di un elemento ci sono molte biiettivita'.

Per **segmento iniziale** di una struttura di buon ordine si intende la coppia formata da un sottoinsieme degli elementi del supporto tale che se contiene un elemento contiene anche quelli che lo precedono, e dalla restrizione a detto sottoinsieme della relazione d'ordine. Cosi' un segmento iniziale di una struttura di buon ordine e' anch'esso una struttura di buon ordine (lo si dimostri per esercizio). Spesso per indicare un segmento iniziale non si precisa di quale struttura di buon ordine si tratta, ma si indica solo il suo supporto, essendo di conseguenza univocamente determinata la relativa relazione d'ordine.

Si noti che una struttura di buon ordine e' un segmento iniziale di se' stessa, e che l'insieme vuoto con la relazione vuota e' un segmento iniziale di ogni struttura di buon ordine. Ancora l'unione dei supporti di segmenti iniziali e' ancora il supporto di un segmento iniziale, e dati due segmenti iniziali il supporto di uno e' contenuto nel supporto dell'altro essendo il supporto di un segmento iniziale dell'altro. Inoltre, se un segmento iniziale ha per supporto X che non e' l'intero supporto A della struttura di buon ordine $(A,<_A)$, allora c'e' un piu' piccolo elemento z di A che non appartiene a X e che sara' maggiore di tutti gli elementi di X, e l'insieme $X \cup \{z\}$ e' esso pure il supporto di un segmento iniziale di $(A,<_A)$.

Un esempio di segmento iniziale della struttura di buon ordine $(A,<_A)$ non vuota e' quello che ha per supporto l'insieme $a^<$, o l'insieme $a^\leq$, e, ovviamente, per relazione d'ordine la restrizione, a detto insieme, della relazione $<_A$, dove $a^< = \{x: x \in A \text{ e } x <_A a\}$ e $a^\leq = \{x: x \in A \text{ e } (x <_A a \text{ oppure } x=a)\}$.

Un primo risultato importante per le strutture di buon ordine e' il seguente

TEOREMA. Date due strutture di buon ordine, una e' dello stesso tipo d'ordine di un segmento iniziale dell'altra.

DIMOSTRAZIONE. Siano $(A,<_A)$ e $(B,<_B)$ due strutture di buon ordine. Si consideri il sottoinsieme X di A costituito da quegli elementi tali che per ciascuno di essi c'e' un isomorfismo d'ordine tra il segmento iniziale di $(A,<_A)$ che ha per supporto l'insieme cui appartengono lo stesso elemento e quelli che lo precedono e un segmento iniziale di $(B,<_B)$, cioe' $X = \{a: a \in A$ e esiste un isomorfismo d'ordine da $a^\leq$ in un segmento iniziale di $(B,<_B)\}$, dove $a^\leq = \{x: x \in A \text{ e } (x <_A a \text{ oppure } x=a)\}$.

Si osservi che X e' il supporto di un segmento iniziale di $(A,<_A)$. Infatti se $x \in X$ e $y <_A x$ allora anche $y \in X$ poiche' la restrizione all'insieme $y^\leq$ dell'isomorfismo d'ordine da $x^\leq$ nel supporto di un segmento iniziale di $(B,<_B)$ e' ancora un isomorfismo d'ordine dello stesso tipo (lo si dimostri per esercizio).

Si osservi anche che dati due elementi y e z di X con uno, diciamo y, che precede l'altro nell'ordine di A, l'isomorfismo d'ordine da $y^\leq$ in un segmento iniziale di $(B,<_B)$ e' contenuto in quello da $z^\leq$, poiche' la restrizione del secondo (che e' contenuta in questo) al suo sottoinsieme degli elementi minori od uguali ad y e' ancora un isomorfismo d'ordine in un segmento iniziale di $(B,<_B)$ che ha per dominio $y^\leq$, e questo e' unico. Cosi' la funzione $\mathfrak{f}$ unione sull'insieme degli isomorfismi d'ordine dagli insieme $a^\leq$ per ogni $a \in X$ in segmenti iniziali di $(B,<_B)$ e' ben definita e $\mathfrak{f}$ e' un isomorfismo d'ordine in un segmento iniziale di $(B,<_B)$ che ha per dominio X.

Puo' succedere che X sia tutto A: in tal caso l'isomorfismo d'ordine f e' da $(A,<_A)$ su un segmento iniziale di $(B,<_B)$, e il teorema e' dimostrato.

Altrimenti il codominio di f e' B. Se non fosse cosi', in B ci sarebbero elementi non nel codominio di f che sarebbero maggiori di quelli del codominio di f poiche' questo e' un segmento iniziale di $(B,<_B)$, e si potrebbe considerare il piu' piccolo tra tali elementi, chiamiamolo m_B. Analogamente in A possiamo considerare il piu' piccolo elemento non in X, chiamiamolo m_A, che esiste ed e' maggiore di ciascun elemento di X poiche' questo e' un segmento iniziale di A contenuto propriamente in A. Allora $f\cup\{(m_A,m_B)\}$ e' un isomorfismo d'ordine dal segmento iniziale $X\cup\{m_A\}$ di A in un segmento iniziale di $(B,<_B)$ e anche m_A dovrebbe appartenere a X, contro la scelta di m_A. Allora il codominio di f e' proprio B e la funzione inversa f^{-1} e' un isomorfismo d'ordine da $(B,<_B)$ su un segmento iniziale di $(A,<_A)$, precisamente quello che ha per supporto X. Cio' conclude la dimostrazione del teorema.

Si osservi che un insieme bene ordinato puo' essere dello stesso tipo di un suo sottoinsieme proprio, ad esempio l'insieme dei naturali con l'usuale ordine tra i numeri e' ordine isomorfo al suo sottoinsieme privato del primo elemento con lo stesso ordine ristretto al nuovo insieme: la funzione che manda un numero nel suo successore immediato e' una biiettivita' che preserva l'ordine. Ma il risultato non e' piu' vero se il sottoinsieme proprio e' un segmento iniziale: si dimostra infatti che

TEOREMA Un segmento iniziale proprio di un buon ordinamento, ordinato dalla relazione d'ordine del buon ordinamento ristretta al segmento iniziale, non e' dello stesso tipo del buon ordinamento.

DIMOSTRAZIONE. Se esistesse un isomorfismo d'ordine f tra buon ordinamento $(A,<_A)$ ed un suo segmento iniziale proprio B con l'ordine richiesto, allora esisterebbero elementi x (quelli di A-B) tali che $f(x) <_A x$. Sia $X=\{x: x\in A \text{ e } f(x) <_A x\}$, e X non e' vuoto per l'ipotesi fatta. Sia m il minimo elemento di X nell'ordine $<_A$. m non puo' essere il minimo di A, perche' una biiettivita' da A in B che preserva l'ordine Deve far corrispondere al minimo di A il minimo di B, che e' lo stesso m essendo B un segmento iniziale, sicche' si avrebbe $f(m) \leq_A m$, contro l'ipotesi che m appartenga a X. Per ogni $y <_A m$ dovra' essere $y \leq_A f(y)$, in particolare $f(m) \leq_A f(f(m))$, mentre $f(m) <_A m$, e f non preserverebbe l'ordine, pur essendo un isomorfismo d'ordine. Questa contraddizione dimostra quanto asserito.

Come conseguenza di questo risultato si puo' rafforzare il risultato precedente precisan do che se un buon ordinamento e' ordine isomorfo ad un segmento iniziale di un altro, tale segmento iniziale e' unico.

6.2. LA NOZIONE DI ORDINALE.

Come per gli insiemi si e' introdotta la nozione di cardinalita' per indicare la quantita' di elementi di un insieme, cosi' per i buoni ordinamenti si vorrebbe pure introdurre una nozione che misurasse la quantita' ordinata di elementi di un buon ordinamento. Una tale nozione dovrebbe assegnare la stessa valutazione a buoni ordinamenti dello stesso tipo, e una valutazione minore a un buon ordinamento che sia segmento iniziale di un altro. Una prima idea potrebbe essere quella di assegnare ad un buon ordinamento la classe di tutti i buoni ordinamenti a lui ordine isomorfi: cosi' si assegnerebbe la stessa classe a tutti i buoni ordinamenti dello stesso tipo, ma il guaio e' che, come per le classi di equinumerosita', si presenta il problema che queste classi sono proprie, eccetto la classe contenente il buon ordinamento sull'insieme vuoto: infatti gia' la classe che contiene i buoni ordinamenti il cui supporto e' costituito da un unico elemento con l'unica relazione di buon ordine possibile, quella vuota, e' in biiettivita' con la classe universale potendosi costruire un buono ordinamento del tipo descritto per ogni elemento della classe universale ed essendo tra loro diversi buoni ordinamenti costruiti a partire da elementi diversi. Cosi' le classi di buoni ordinamenti dello stesso tipo sono inutili per costruire un loro calcolo non potendo essere considerate elementi pena contraddizioni. Anche per le classi di buoni ordinamenti tra loro isomorfi si ricorre allora alla scelta, all'interno di ciascuna classe, di un elemento tipico, e con questo poi si svolgera' il calcolo.

I numeri ordinali vogliono essere gli elementi scelti in ciascuna classe per rappresentare i tipi di buon ordine di insiemi (supporti) anche infiniti .

Per gli insiemi finiti i numeri naturali gia' svolgono egregiamente questa funzione; si osservi che il contare un insieme finito e' una operazione che prevede un ordine, infatti prima si devono considerare un primo elemento e poi un secondo e un terzo e cosi' via, cioe' considerare gli elementi ordinatamente (nominandoli con quelli che vengono chiamati numeri ordinali) e solo alla fine del conteggio si potra' determinare la cardinalita', vista l'indipendenza, gia' dimostrata, dall'ordine scelto.

Sicche' i numeri ordinali estenderanno i naturali avendo questi come loro segmento iniziale. L'esigenza di rappresentare i tipi di buon ordine di insiemi infiniti segue dalla presenza di buoni ordinamenti infiniti, come si e' gia' visto nelle esemplificazioni precedenti, che diventano una quantita' enorme se si accetta l'assioma della scelta poiche' questo e' equivalente al principio del buon ordinamento affermante che ogni insieme, di qualsiasi cardinalita', puo' essere bene ordinato. Ovviamente, se l'insieme e' infinito, il suo tipo di buon ordine non puo' essere rappresentato con i numeri naturali.

La scelta dell'elemento tipico nel caso di buoni ordini finiti e' proprio il numero naturale che conta gli elementi dell'insieme, visto come l'insieme di quelli che lo precedono, con, al suo interno, la naturale e usuale relazione d'ordine di appartenenza tra i suoi elementi. Infatti i numeri naturali piu' piccoli appartengono a quelli piu' grandi se questi sono visti come l'insieme dei predecessori. Questa scelta e' forzata per la classe dei buoni ordinamenti con nessun elemento nel supporto perche' in tal caso si considera l'unico buon ordinamento della classe, mentre per le altre classi e' una naturale estensione della scelta fatta per la classe con un elemento in meno, poiche' si aggiunge alla scelta fatta un solo elemento, quello che era il supporto del buon ordine con un elemento in meno, e l'elemento aggiunto viene considerato, nell'ordine, dopo gli altri. Poiche' l'elemento aggiunto, diciamo x, e' il supporto del buon ordinamento scelto immediatamente precedente, il supporto del buon ordinamento ottenuto sara' $x\cup\{x\}$, cosi' sia x che i suoi elementi sono elementi del supporto del nuovo buon ordinamento che continua ad avere come elementi i supporti dei buoni ordinamenti precedenti. Cio' mette in risalto una caratteristica dei supporti dei buoni ordinamenti scelti in ciascuna classe: essi sono transitivi rispetto all'appartenenza, cioe' un elemento di uno di essi e' anche un suo sottoinsieme poiche' i suoi elementi sono anche elementi dello stesso supporto. In generale verra' detto **transitivo** un insieme x che e' transitivo rispetto all'appartenenza, cioe' tale che per ogni y e z, se $z\in y$ e $y\in x$, allora $z\in x$.

Se invece l'insieme supporto di un buon ordine scelto in una classe e' infinito non si sa come raggiungerlo con successive aggiunte di un solo elemento. Si potrebbe tentare di scegliere come rappresentante di una classe un buon ordinamento che rispetti gli altri criteri che avevano portato a scegliere i rappresentanti per i buoni ordini finiti, se questi sono sufficenti per individuare un unico buon ordinamento. Cosi' ogni ordinale dovra' avere per elementi del suo supporto gli ordinali che lo precedono che dovranno essere un insieme transitivo bene ordinato dall'appartenenza. Scegliamo allora di definire un ordinale come un insieme bene ordinato dall'appartenenza e transitivo rispetto alla stessa relazione, e dimostreremo che questa scelta risponde alle esigenze manifestate.

Detto esplicitamente un **ordinale** e' un insieme X ordinato dall'appartenenza tale che

1. per ogni due suoi elementi y e z o y=z o $y\in z$ o $z\in y$ (tricotomia della relazione $\in$ in X), e
2. per ogni sottoinsieme non vuoto V di X esiste un elemento u tale che per ogni $v\in V$ risulta che $v\notin u$ (sicche' o $u\in v$ o u=v, per 1.) (ogni sottoinsieme non vuoto ha minimo rispetto a $\in$ in X), e
3. per ogni coppia di elementi z e y, se $z\in y$ e $y\in X$ allora $z\in X$ (transitivita' della relazione $\in$ in X).

Nella definizione si dice esplicitamente che l'appartenenza e' una relazione transitiva tra gli elementi dell'ordinale, ma per dire che e' una relazione d'ordine bisogna far vedere che e' anche antiriflessiva. Cio' segue dall'affermazione che ogni sottoinsieme ha minimo. Infatti, se, per assurdo, ci fosse un elemento x di un ordinale X tale che $x \in x$, allora l'insieme $\{x\}$ non avrebbe minimo rispetto all'appartenenza perche' x ha degli elementi nell'insieme $\{x\}$ che gli appartengono, precisamente x stesso. Da quanto appena osservata segue anche che un ordinale non puo' appartenere a se' stesso, altrimenti l'ordinale avrebbe un elemento (lo stesso ordinale) che appartiene a se' stesso.

E' immediato notare che esistono degli ordinali, ad esempio il numero naturale 0 che e' l'insieme vuoto $\emptyset$, il numero naturale 1 che e' l'insieme il cui unico elemento e' l'insieme vuoto $\{\emptyset\}$, il numero naturale 2 che e' l'insieme $\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$. Inoltre, se x e' un ordinale anche $x \cup \{x\}$ e' un ordinale (indicato con $x+1$) a cui, evidentemente, x appartiene (la dimostrazione di queste affermazioni e' lasciata per esercizio). Dai fatti che 0 sia un ordinale e che se un numero naturale e' un ordinale allora anche il suo successore immediato e' un ordinale, segue, per induzione, che tutti i naturali sono ordinali.

Altro fatto rilevante e' il seguente

TEOREMA Un elemento y di un ordinale x e' esso stesso un ordinale.

DIMOSTRAZIONE. Infatti, per la transitivita' dell'appartenenza sugli elementi di x, y e' un sottoinsieme di x e il buon ordine di x, che e' l'appartenenza, ristretto al sottoinsieme y di x, e' pure un buon ordine su y (lo si dimostri per esercizio), ed inoltre gli elementi degli elementi di y sono ancora elementi di y, poiche', se $u \in z$ con z un elemento di y, per la transitivita' di x, anche $u \in x$, sicche' o $u=y$ o $y \in u$ o $u \in y$, e non potendo valere le prime due (altrimenti il sottoinsieme $\{u,z,y\}$ di x non avrebbe minimo rispetto all'appartenenza) deve essere $u \in y$.

E' consuetudine indicare gli ordinali con lettere greche minuscole, convenzione che viene adottata da qui in poi in questa breve esposizione sugli ordinali. Poiche' un ordinale e' un insieme bene ordinato da una relazione d'ordine che e' l'appartenenza, le scritture $\alpha<\beta$ e $\alpha \in \beta$ sono equivalenti indicando entrambe l'ordine tra ordinali.

Da quanto visto seguono due fatti basilari sugli ordinali.

- Se $\gamma<\beta$ e $\beta<\alpha$ allora $\gamma<\alpha$ (segue immediatamente dalla transitivita' di α).
- Un sottoinsieme transitivo di un ordinale α o e' l'ordinale stesso o e' un suo elemento.

Infatti, sia y un sottoinsieme transitivo di α che non sia lo stesso ordinale. Allora l'insieme $u=\alpha-y$ non e' vuoto ed e' un sottoinsieme di α e pertanto avra' un minimo v rispetto all'appartenenza. v e' un ordinale poiche' appartiene ad α (dal momento che appartiene al suo sottoinsieme u). Se facciamo vedere che y e' v avremo concluso come si voleva che y e' un elemento di α. Per far vedere cio' si osservi dapprima che se $z \in v$ allora $z \in \alpha$ (per la transitivita' di α), ed, essendo minore di v non puo' appartenere ad u di cui v e' il minimo elemento, dovra' appartenere a y, sicche' $v \subseteq y$; poi, se invece $z \in y$, allora anche $z \in \alpha$, e, poiche' $\in$ ordina totalmente α, o $z=v$ o $v \in z$ o $z \in v$, dovra' essere $z \in v$ essendo impossibili le altre alternative ($z=v$ implicherebbe $v \in y$ impossibile per la definizione di v, e anche $v \in z$ implicherebbe $v \in y$, per la transitivita' di y supposta), sicche' $y \subseteq v$; ed infine si ha $y=v$ poiche' si e' dimostrata che ciascuno dei due insiemi contiene l'altro.

6.3. LA CLASSE DEGLI ORDINALI.

Con quello che si e' dimostrato si puo' vedere che la relazione di appartenenza non solo e' un buon ordine all'interno di un ordinale, ma anche e' un buon ordine tra ordinali. Per mostrare cio' si dimostreranno singolarmente varie proprieta' che porteranno alla conclusione voluta.

TEOREMA.

i) Per ogni coppia di ordinali α e β, o $\alpha=\beta$ o $\alpha<\beta$ o $\beta<\alpha$.

ii) Ogni insieme di ordinali e' bene ordinato da $\in$ e la sua unione e' un ordinale.

DIMOSTRAZIONE.

i) Si consideri $\alpha \cap \beta$, che, essendo un sottoinsieme transitivo sia di α che di β, e' un ordinale, chiamiamolo γ. Dovra' essere o $\gamma=\alpha$ o $\gamma=\beta$, altrimenti, per il risultato precedente, sarebbe sia un elemento di α che di β, sicche' apparterrebbe all'intersezione dei due, cioe' a se' stesso, ma sappiamo che cio' non e' possibile per gli ordinali.

ii) Per arrivare a questo risultato mostriamo che, dato un insieme X di ordinali, X e' ordinato totalmente da $\in$, ogni suo sottoinsieme non vuoto ha minimo rispetto a $\in$, e l'unione su X e' un ordinale. La prima affermazione non e' altro che la parte i) appena dimostrata.

Per la seconda, sia U un sottoinsieme non vuoto di X, e sia α un suo elemento; allora o α e' il minimo di U o $\alpha \cap U$ non e' vuoto, e, essendo anche un sottoinsieme non vuoto di α, ha minimo elemento che sara' un ordinale che e' anche il minimo di U. Per la terza affermazione, banalmente $\cup X$ e' transitivo, inoltre i suoi elementi sono ordinali appartenendo a ordinali (quelli di X), cosi' anche $\cup X$ e' un insieme di ordinali che, per quanto appena visto, e' bene ordinato da $\in$, sicche' anche $\cup X$ e' un ordinale.

Come conseguenza di questi risultati si puo' osservare che:
1) dati due ordinali α e β, se sono isomorfi allora $\alpha=\beta$. Altrimenti uno apparterrebbe all'altro e sarebbe un segmento iniziale proprio dell'altro, ma abbiamo gia' visto che allora non sarebbero isomorfi. Cosi' ogni classe di buoni ordinamenti dello stesso tipo contiene al piu' un ordinale.
2) se un ordinale α e' minore di un altro ordinale β allora il successore immediato del primo, $\alpha \cup \{\alpha\}$, e' minore od uguale a β. Se non fosse cosi', per 1), dovrebbe essere $\beta \in \alpha \cup \{\alpha\}$, cioe' o β e' α o $\beta \in \alpha$, ma in entrambi i casi si viola l'assunzione che α sia minore di β.
3) tutti gli ordinali di un insieme X di ordinali sono minori od uguali ad un ordinale β se e solo se l'unione su quell'insieme (che e' un ordinale come si e' visto) e' minore od uguale a β. Infatti se $\alpha \in X$ allora $\alpha \subset \cup X$ e, per il secondo fatto fondamentale sopra richiamato, $\alpha \leq \cup X$ essendo α transitivo, sicche' se $\cup X \leq \beta$ anche ogni α in X e' minore od uguale a β. Viceversa, se ogni α appartenente a X e' minore od uguale a β, allora α e' un sottoinsieme di β (per la transitivita' di β), e l'unione di sottoinsiemi di β e' ancora un sottoinsieme di β, $\cup X \subset \beta$, e $\cup X \leq \beta$ ancora per il secondo fatto fondamentale visto sopra essendo $\cup X$ un ordinale e percio' un insieme transitivo.
Queste due ultime conseguenze mostrano dove vanno a collocarsi, nell'ordine tra ordinali che si cerca di scoprire, ordinali ottenuti da altri mediante le operazioni di passaggio al successore immediato o mediante unione.
In seguito sara' utile poter disporre anche del seguente risultato relativo all'unione su un insieme di ordinali. Sia X un insieme di ordinali, allora $\cup X$ e' maggiore di ciascun ordinale di X, se X non ha massimo, altrimenti e' proprio il massimo. Tutto cio' segue dal fatto che se X non ha massimo allora ogni ordinale che gli appartiene e' elemento di un altro ordinale piu' grande che pure appartiene a X, sicche' appartiene anche ad $\cup X$ che percio' e maggiore di lui; mentre se X ha massimo, tutti gli altri ordinali sono contenuti nel massimo e l'unione tra questi e' proprio il massimo.

Sia **Ord** la classe di tutti gli ordinali, Ord = {x: x e' un ordinale}. Essa e' una classe propria perche' altrimenti, essendo transitiva e bene ordinata da $\in$, sarebbe un ordinale e apparterrebbe a se' stessa, mentre sappiamo che un ordinale non appartiene a se' stesso. Useremo anche la notazione Ord(x) per dire che x e' un ordinale. Siccome Ord e' una classe propria, non e' elemento e non puo' essere utilizzata in quanto tale per la costruzione di altre classi. In particolare non puo' essere l'elemento che e' l'universo di una quaterna che e' una struttura.
Nonostante Ord sia una classe propria, si possono considerare coppie ordinate di suoi elementi, cioe' il prodotto cartesiano Ord×Ord, che sara' ancora una classe propria, avendo almeno tanti elementi quanto Ord. Nella collezione propria Ord×Ord si puo' considerare la sottocollezione che e' la relazione di appartenenza su Ord. Anche questa sara' una classe propria, ancora perche' ha almeno tanti elementi quanti Ord (per ogni ordinale α, la coppia ordinata $(\alpha,\{\alpha\})$ e' una coppia della relazione, $\in_{Ord}$, di appartenenza su Ord). Anche se Ord e $\in_{Ord}$ sono classi proprie e non ha senso parlare della loro coppia ordinata, tuttavia si puo' estendere la nozione di buon ordinamento ad includere anche buoni ordinamenti basati su una classe propria e la cui relazione d'ordine sia una classe propria: infatti le proprieta' che caratterizzano un buon ordinamento si riferiscono solo a elementi del supporto e non all'intero supporto o all'intera relazione d'ordine prese come un sol elemento.
Una volta estesa cosi' la nozione di buon ordinamento in modo da includere anche il buon ordinamento sulla classe Ord con la relazione $\in_{Ord}$, ci si puo' domandare se a questa nuova nozione si estendono anche i risultati precedentemente visti. Di fatto e' facile

vedere che continuano a valere e risultati ottenuti senza dover ricorrere al fatto che il supporto del buon ordine e la relazione che bene ordina sono elementi. La nozione di isomorfismo tra buoni ordinamenti, con questa nuova nozione dovra' essere modificata nello stesso spirito, poiche' dovra' essere una funzione da una classe propria in un'altra (che non sono elementi) e sara' una classe propria (poiche' la funzione e' totale) di coppie ordinate, ma la richiesta che sia una biiettivita' che preserva la struttura puo' essere ancora espressa poiche' si riferisce a coppie della funzione e non alle intere classi proprie che sono la funzione, il primo insieme o il secondo insieme.

Con queste estensioni delle nozioni si vede, ad esempio che rimane valido il risultato che dati due qualsiasi buoni ordinamenti (anche con supporto e relazione classi proprie) uno e' isomorfo ad un segmento iniziale dell'altro.

Ci si puo' allora domandare in che rapporto e' un qualsiasi buon ordinamento il cui supporto sia un insieme con il buon ordinamento dato da Ord e $\in_{Ord}$. Per il risultato appena ricordato, uno dovra' essere isomorfo ad un segmento iniziale dell'altro. Se Ord con $\in_{Ord}$ fosse isomorfo ad un segmento iniziale di un altro buon ordinamento, tale segmento iniziale dovrebbe essere una classe propria (perche' equinumerosa a Ord), ed anche il supporto che contiene il segmento iniziale dovrebbe essere una classe propria. Cosi' se l'altro ordinamento ha per supporto un insieme dovra' essere questo isomorfo ad un segmento iniziale di Ord, segmento iniziale che non potra' essere una classe propria (per il solito motivo di equinumerosita') e che quindi non sara' tutto Ord. Allora dovra' esserci un elemento di Ord, diciamo β, non nel segmento iniziale che dovra' essere maggiore di tutti gli elementi del segmento iniziale (per la definizione di segmento iniziale). Per la transitivita', questo segmento iniziale sara' anche un segmento iniziale di β. Ma si e' visto che un sottoinsieme transitivo (il segmento iniziale di un ordinale lo e' perche' la relazione d'ordine e' l'appartenenza) di un ordinale e' un ordinale sicche' un qualsiasi buon ordinamento il cui supporto e' un insieme e' ordine isomorfo ad un ordinale. Cio' ci permette di concludere che in ogni classe di buoni ordinamenti dello stesso tipo con supporto un insieme c'e' un ordinale, e, poiche' si e' gia' visto che in tali classi c'e' al piu' un ordinale, si puo' affermare che la nozione di ordinale e opportuna per individuare uno ed un solo elemento tipico all'interno delle classi di buoni ordini dello stesso tipo (con supporto un insieme), come ci si era prefissi di fare.

Abbiamo gia' visto che una qualsiasi collezione di ordinali ha primo elemento rispetto all'appartenenza. Cio' accade anche quando la collezione e' individuata mediante una formula, con una sola variabile libera, del linguaggio della teoria degli insiemi che e' un linguaggio il cui solo simbolo proprio e' il predicato per la relazione binaria di appartenenza. Cosi' sia $\varphi(x)$ una formula con una variabile libera, e $X=\{\alpha: \varphi(\alpha)\}$ la collezione individuata da $\varphi(x)$.

[Si noti l'uso non ortodosso della notazione adoperata: si sa dal modulo di logica che non ha senso sostituire un elemento di una struttura al posto di una variabile, ne' affermare la verita' di una formula senza precisare in quale realizzazione e' interpretata; tuttavia qui si fa riferimento alla realizzazione che si appoggia sulla "struttura" intesa che ha per universo la classe propria U di tutti gli insiemi e per unica relazione $\in$ la classe propria di coppie di insiemi che e' la relazione di appartenenza tra insiemi; In effetti si sarebbe dovuto scrivere, con maggiore precisione, $X=\{\alpha: U,\in \models \varphi(x)[\alpha]\}$, ma si mantiene l'abuso di notazione usata, perche' essa e' piu' immediata, essendo pero' consapevoli di cio' che si sottintende e di come ci si dovrebbe esprimere in maniere compiuta]

Dire che X ha minimo elemento vuol dire che c'e' un unico ordinale α tale che $\varphi(\alpha)$ e per ogni β, se $\beta<\alpha$ allora $\neg\varphi(\beta)$.

Da cio' segue che:

TEOREMA. Se per ogni ordinale α risulta che si puo' far vedere che se $\varphi(\beta)$ vale per ogni ordinale $\beta<\alpha$ allora vale anche $\varphi(\alpha)$, allora si puo' concludere che $\varphi(\alpha)$ vale per ogni ordinale α.

DIMOSTRAZIONE. Se non fosse cosi' non sarebbe vuoto l'insieme degli ordinali γ tali che $\neg\varphi(\gamma)$, e ci sarebbe un piu' piccolo ordinale δ in questo insieme. Cosi', e dovrebbe anche essere $\neg\varphi(\delta)$, mentre segue dalle ipotesi che nella situazione supposta (cioe' che per ogni $\beta<\delta$ valga $\varphi(\beta)$) deve valere $\varphi(\delta)$. La contraddizione raggiunta giustifica quanto

affermato.
Questo risultato va sotto il nome di **principio di induzione transfinita**, ed e' strettamente legato al principio di induzione gia' introdotto parlando di numeri naturali, come si fara' vedere in seguito.

6.4. I NUMERI NATURALI.

Inizialmente si erano introdotti i numeri naturali come degli elementi atti a rappresentare in maniera minimale l'operazione di contare, e che pertanto al loro insieme doveva:
a) appartenere lo zero, e
b) appartenere anche il successore immediato di ciascun elemento dell'insieme, e
c) valere il principio d'induzione come conseguenza della minimalita' dell'insieme indut- tivo voluto.
Poi si sono gia' introdotti gli stessi numeri naturali da un punto di vista insiemistico, come particolari insiemi che sono stati di ispirazione per la costruzione degli ordinali.
Si e' gia'osservato che gli ordinali contengono i naturali considerati insiemisticamente.
Ci si puo' domandare se gli ordinali coincidono con i naturali o se ci sono ordinali che non sono naturali. La risposta dipende da quell'assioma fondamentale della teoria degli insiemi che e' l'assioma dell'infinito affermante che la collezione dei naturali e' un insieme. Questo come insieme di ordinali e' un ordinale che non puo' essere Ord, proprio perche' insieme; sicche' a Ord devono appartenere degli ordinali che non sono naturali.

Ora si vuole trovare una proprieta' che distingua i naturali tra gli ordinali.
Si sa che ogni naturale, eccetto 0, e' successore immediato di un altro naturale, mentre ci sono ordinali, diversi da 0, che non sono successori immediati di alcun altro ordinale. Un esempio e' proprio l'unione sull'insieme di tutti i naturali. Si sa infatti che tale unione e' un ordinale (essendo unione di ordinali), ma non puo' essere il successore immediato di alcun ordinale, perche' altrimenti, se l'unione dei naturali fosse un successore immediato, diciamo $\alpha\cup\{\alpha\}$, allora α le apparterrebbe sicche' α sarebbe un naturale, e anche l'unione dei naturali sarebbe un naturale (i successori immediati di un naturale sono naturali) e apparterrebbe a se' stessa, impossibile per gli ordinali. Si noti che l'unione sull'insieme dei naturali e' l'insieme dei naturali perche', da una parte, ogni elemento dell'unione e' un naturale essendo elemento di un naturale, e, dall'altra, ogni naturale e' elemento del suo successore immediato, che e' pure un naturale, e pertanto appartiene all'unione.
Si chiameranno **ordinali limite** gli ordinali che non sono ne' 0 ne' successore immediato di un altro ordinale.
Si noti che per ogni ordinale limite ci sono ordinali successori immediati piu' grandi di quello: infatti ogni ordinale ha un successore immediato, che gli e' maggiore.
Il piu' piccolo ordinale limite e' l'insieme dei naturali, che si suole indicare con ω quando lo si considera un buon ordinamento, poiche' questo insieme e' bene ordinato dall'appartenenza e transitivo, e i suoi predecessori, che sono i suoi elementi, sono o 0 o immediati successori di un altro naturale. Cosi' i naturali possono essere caratterizzati, tra gli ordinali, come quegli ordinali tali che ne' loro ne' i loro predecessori sono ordinali limite. Infatti ogni altro ordinale dovra' seguire o essere uguale (ogni due ordinali sono confrontabili) a ω perche' per tutti quelli che lo precedono sono i naturali (per definizione di ω) sicche' o sono l'ordinale limite ω o a loro appartiene l'ordinale limite ω; cosi' per ogni altro ordinale non vale la proprieta' che vale per i naturali. D'ora in poi, se non esplicitamente detto diversamente, per naturali si intenderanno gli ordinali tali che ne' loro, ne' i loro predecessori sono ordinali limite, e scriveremo Nat(x) per dire che x e' un naturale
A questo punto si puo' precisare l'anti-intuitivita' dell'assioma dell'infinito. In effetti esso ci propone di considerare come una cosa singola una collezione ottenuta ripetendo indefinitamente l'operazione di passaggio al successore a partire da 0, cioe' di considerare nella sua interezza, dunque completata, una collezione che non finisce mai, che non si completa mai: come si puo' considerare completata una collezione che non si completa mai? Ma questa possibilita' e' proprio cio' che viene accettato nell'accettare l'assioma dell'infinito.

Il concetto di quantita' finita, pur essendo ritenuto intuitivamente chiaro, finora non e' stato ben precisato, ma ora, in questo contesto si puo' dire che un insieme e' finito se e' equinumeroso a un naturale. Si noti che questa non e' la soluzione definitiva di ogni difficolta' in quanto questa soluzione passa per l'accettazione degli assiomi della teoria degli insiemi, che in un certo senso sono piu' difficilmente accettabili delle stesse nozioni che si vogliono chiarire e giustificare mediante la teoria degli insiemi.

6.5 OLTRE I NUMERI NATURALI.

Se a ω si aggiunge il singolo elemento ω, si considera cioe' $\omega\cup\{\omega\}$, si trova, come si sa', un ulteriore insieme bene ordinato dall'appartenenza e transitivo, e pertanto un nuovo ordinale, che non e' ordine isomorfo all'insieme dei numeri naturali (sappiamo gia' che un ordinale che appartiene ad un altro non e' isomorfo a questo, ma, indipendentemente da cio', a chi far corrispondere in ω l'elemento ω di $\omega\cup\{\omega\}$ mediante una biiettivita' che preservi l'ordine? ω e' l'ultimo di $\omega\cup\{\omega\}$ mentre il suo corrispondente, qualunque esso sia, non sara' certo l'ultimo di ω, che non ha ultimo elemento), pur essendo equinumeroso allo stesso insieme dei naturali (non dovendo preservare l'ordine, si puo' considerare la biiettivita' da $\omega\cup\{\omega\}$ su ω che manda l'elemento ω di $\omega\cup\{\omega\}$ in 0 e ogni altro elemento di $\omega\cup\{\omega\}$ nel suo immediato successore).

Piu' in generale, partendo da un qualsiasi ordinale α maggiore di ω, si puo' considerare $\alpha\cup\{\alpha\}$. L'ordinale ottenuto (che, come si e' gia' visto, non e' isomorfo all'ordinale di partenza, ma e' il piu' piccolo che lo contenga come segmento iniziale) e' equinumeroso all'ordinale α (analogamente a prima, si puo' considerare la biiettivita' da $\alpha\cup\{\alpha\}$ su α che manda l'elemento α di $\alpha\cup\{\alpha\}$ in 0 e ogni altro elemento di α che sia un numero naturale nel suo immediato successore, mentre ogni altro elemento di α viene mandato in se' stesso).

Si noti una importante differenza tra i numeri naturali e gli ordinali non naturali: mentre due naturali diversi, anche pensati come ordinali, hanno diverse cardinalita', per ogni ordinale non naturale ci sono altri ordinali non naturali diversi dal primo che hanno la stessa cardinalita'. Detto altrimenti, il contare in un modo o nell'altro gli elementi di un insieme finito (equinumeroso ad un naturale) porta a buoni ordinamenti tra loro isomorfi, mentre la stessa cosa non vale per insiemi infiniti, anzi gli insiemi infiniti potrebbero essere proprio caratterizzati dalla proprieta' che se possono essere bene ordinati allora possono essere bene ordinati in modi tra loro non isomorfi, ma ciascuno isomorfo a ordinali tra loro diversi.

L'ordinale ω non e' l'unico ordinale limite: si parta da un qualsiasi ordinale maggiore di ω e si ripeta indefinitamente (in corrispondenza con i naturali nel senso ora precisato) l'operazione di passaggio all'immediato successore, si otterranno tanti nuovi ordinali sempre maggiori (ma sempre equinumerosi a quello di partenza), e si consideri il loro insieme: questo insieme e' un insieme (perche' gli elementi sono in corrispondenza univoca con i naturali che sono un insieme) di ordinali, e dunque un ordinale che dovra' essere maggiore di quelli che gli appartengono, ma nessuno di questi e' suo predecessore immediato.

6.6. PRINCIPIO DI INDUZIONE TRANSFINITA.

Si puo' pensare che la costruzione degli ordinali sia realizzata nel modo seguente. Si parte da zero e si fa il passaggio al successore indefinitamente (tante volte quanti sono i naturali), dopo essere andati avanti indefinitamente ed aver ottenuto tutta questa successione infinita di nuovi ordinali si considera il loro insieme, che e' ancora un ordinale e si riprende a passare al successore indefinitamente, e si ripete il considerare l'insieme degli elementi a cui si e' arrivati passando al successore immediato indefinitamente, per poi riprendere a considerare, indefinitamente, i successori immediati di quanto si e' ottenuto. Questa idea puo' essere precisata e giustificata dal seguente

TEOREMA. Sia X una collezione di ordinali tale che

- 0 le appartiene,

- se un ordinale le appartiene allora le appartiene anche il successore immediato di quello,
- se le appartengono tutti gli ordinali che precedono un ordinale limite allora anche lo stesso ordinale limite le appartiene.

In queste ipotesi la classe X coincide con Ord.

DIMOSTRAZIONE. Se X non coincide con Ord allora la classe Ord-X e' una classe non vuota di ordinali, sicche' avra' un minimo, chiamiamolo α, e ogni ordinale piu' piccolo di α deve appartenere a X. α non puo' essere 0 perche' $0\in X$; α non puo' essere successore immediato, perche' l'ordinale di cui sarebbe successore immediato dovrebbe appartenere a X (essendo piu' piccolo), ma allora anche il successore immediato, che e' α, apparterrebbe a X (per la seconda ipotesi fatta sull'insieme X); sicche' α dovrebbe essere un ordinale limite, ma anche cio' e' impossibile perche' tutti gli ordinali che gli sono minori devono appartenere a X e allora anche l'ordinale limite apparterrebbe a X, per la terza ipotesi sull'insieme X. Avendo comunque raggiunto un assurdo dall'assunzione che Ord-X non sia vuota, si deve concludere che X e' Ord, come si voleva.

Questo risultato e' una nuova forma del principio d'induzione transfinita, che si era gia' incontrato, e che ora si analizzera' un po'.

Anzitutto si osservi come esso estende il principio d'induzione sui numeri naturali considerando una ulteriore modalita' di passare a numeri piu' grandi nel caso degli ordinali limite. Con tale ulteriore modalita', la dimostrazione del teorema mostra come cosi' si arriva ad ottenere la classe di tutti gli ordinali.

Poi si noti che anche ora si puo' pensare al caso particolare che la classe X sia determinata da una formula con una variabile libera $\varphi(x)$ vedendo $X=\{\alpha: \varphi(\alpha)\}$ [Attenzione all'abuso di notazione appena usato, si veda il lungo commento al proposito subito prima della prima formulazione del principio di induzione transfinita. Per una tale collezione X il teorema precedente si puo' riformulare nel modo seguente

TEOREMA'. Sia $\varphi(x)$ una formula con una sola variabile libera tale che
- $\varphi(0)$,
- per ogni ordinale α se $\varphi(\alpha)$ allora $\varphi(\alpha\cup\{\alpha\})$,
- se γ e' un ordinale limite allora vale $\varphi(\gamma)$ se per ogni $\alpha<\gamma$ vale $\varphi(\alpha)$.

In queste ipotesi per ogni ordinale α vale $\varphi(\alpha)$.

Ovviamente non si ripete la dimostrazione di questo teorema che e' la precedente adattata alla situazione in cui ci si e' posti.

Presentato il teorema in questa forma, e' piu' facile vederne le connessioni con la prima formulazione del principio di induzione transfinita, al di la' del fatto che entrambe sono teoremi e fanno ottenere la classe di tutti gli ordinali.

Dapprima si mostrera' che la prima formulazione del principio di induzione transfinita implica l'ultima formulazione appena enunciata. Per dimostrare cio' si deve supporre l'ipotesi della seconda formulazione e arrivare alla conclusione della stessa utilizzando eventualmente il principio d'induzione transfinita nella prima formulazione. Cosi' si supponga che valga $\varphi(0)$, e che per ogni α se vale $\varphi(\alpha)$ allora vale anche $\varphi(\alpha\cup\{\alpha\})$, e che per ogni ordinale limite γ se vale $\varphi(\beta)$ per ogni $\beta<\gamma$ allora vale $\varphi(\gamma)$. Da queste ipotesi segue che valgono le ipotesi della prima formulazione del principio d'induzione transfinita: infatti con le attuali ipotesi si riesce a far vedere che vale $\varphi(\delta)$ non dovendo assumere che valga $\varphi(\varepsilon)$ per ogni $\varepsilon<\delta$, ma dalla piu' limitata assunzione che la formula valga per il predecessore immediato di δ se δ e' un ordinale successore (negli altri casi l'assunzione e' la stessa), e, siccome una conclusione che si puo' ottenere da assunzioni piu' deboli si puo' ottenere anche da assunzioni piu' forti, si e' fatto vedere che valgono anche le ipotesi della prima formulazione del principio d'induzione transfinita. Dunque si puo' concludere con le conseguenze del principio d'induzione transfinita nella prima formulazione, cioe' che $\varphi(\alpha)$ vale per ogni ordinale α, ma questa e' anche la conclusione dell'ultima formulazione del principio d'induzione transfinita che cosi' e' stata dimostrata usando il principio nella prima formulazione.

Ora si mostrera' che vale anche il viceversa, cioe' che la prima formulazione del principio di induzione transfinita segue dall'ultima formulazione appena enunciata. Per dimostrare cio' si deve supporre l'ipotesi della prima formulazione e arrivare alla conclusione della stessa utilizzando eventualmente il principio d'induzione transfinita nell'ultima formulazione. Cosi' si supponga che valga $\varphi(\alpha)$ se vale $\varphi(\beta)$ per ogni $\beta<\alpha$. Si consideri la nuova

formula $\psi(x)$ che e' $Ord(x) \wedge \forall y(y<x \rightarrow \varphi(y))$. Dalla supposizione che valga $\varphi(\alpha)$ se vale $\varphi(\beta)$ per ogni $\beta<\alpha$ seguono tre fatti:
1. vale $\psi(0)$: infatti 0 e' un ordinale che, non avendo elementi, soddisfa vacuamente l'affermazione $\forall y(y<x \rightarrow \varphi(y))$;
2. per ogni ordinale α se vale $\psi(\alpha)$ allora vale anche $\psi(\alpha \cup \{\alpha\})$: infatti, se $y<\alpha \cup \{\alpha\}$, allora o $y<\alpha$ o $y=\alpha$, sicche' vale $\varphi(y)$ per ogni $y<\alpha$ in quanto si sta supponendo $\psi(\alpha)$ e vale anche $\varphi(\alpha)$ per l'ipotesi (vale $\varphi(\alpha)$ se vale $\varphi(\beta)$ per ogni $\beta<\alpha$) del principio d'induzione transfinita nella prima formulazione dal momento che si e' appena visto che vale $\varphi(y)$ per ogni $y<\alpha$; cosi' si e' fatto vedere che per ogni $y<\alpha \cup \{\alpha\}$ vale $\varphi(y)$, e, siccome $Ord(\alpha \cup \{\alpha\})$, si e' anche fatto vedere che $\psi(\alpha \cup \{\alpha\})$;
3. per ogni ordinale limite γ vale $\psi(\gamma)$ se vale $\psi(\beta)$ per ogni $\beta<\gamma$: infatti da $\psi(\beta)$ segue, tra l'altro, che per ogni $y<\beta$ vale $\varphi(y)$, ma, siccome gli y che sono minori di un qualche β che e' minore di γ sono gli y che sono minori di γ dal momento che γ e' un ordinale limite, allora vale $\varphi(y)$ per ogni $y<\gamma$, e, poiche' $Ord(\gamma)$, allora segue $\psi(\gamma)$, come volevasi.

Cosi' si e' visto che valgono le ipotesi del principio d'induzione transfinita nell'ultima formulazione relativamente alla formula $\psi(x)$. Ne segue, proprio per questa formulazione del principio, che per ogni ordinale α vale $\psi(\alpha)$. Ma allora vale anche $\varphi(\delta)$ per ogni ordinale δ dal momento che per ogni tale ordinale se ne puo' trovare uno maggiore ξ per cui vale $\psi(\xi)$ e cio' implica che vale $\varphi(\zeta)$ per ogni $\zeta<\xi$, ed in particolare quando ζ e' δ. Sicche' si e' mostrato che il principio di induzione transfinita nella sua prima formulazione segue dall'ultima formulazione dello stesso principio.

6.7. DEFINIZIONE PER INDUZIONE TRANSFINITA.

Oltre la dimostrazione per induzione, tra i naturali e' presente anche la definizione per induzione, con tutte le sue difficolta'. Qui si vorrebbe ottenere la definizione per induzione transfinita, come estensione agli ordinali della definizione per induzione. Si osservi immediatamente una difficolta' di questo progetto: mentre i naturali sono un insieme e per induzione si definisce una funzione sui naturali a partire da altre funzioni sui naturali, ora gli ordinali sono classi proprie e anche il corrispondente della funzione che si vuol definire non puo' essere una funzione di dominio gli ordinali, ma una classe propria di coppie ordinate il cui primo elemento e' un ordinale. Si deve allora introdurre la nozione di collezione funzionale 1-aria, con cio' si intende per definizione una collezione di coppie ordinate tale che, se le coppie ordinate (a,c) e (a,d) le appartengono, allora c=d. Ancora si puo' definire la nozione di dominio di una collezione funzionale 1-aria come la collezione {a: esiste b tale che la coppia ordinata (a,b) appartiene alla collezione data}. Similmente per il codominio. Analogamente si definisce la nozione di collezione funzionale n-aria come una collezione di (n+1)-uple ordinate tale che, se le (n+1)-uple ordinate $(a_1,...,a_n,c)$ e $(a_1,...,a_n,d)$ appartengono alla collezione, allora c=d. Anche per le collezioni funzionali n-arie si danno nel modo ovvio le nozioni di primo dominio, ..., n-esimo dominio e codominio. Con queste nozioni si puo' affrontare

TEOREMA. Se S e' una collezione funzionale binaria il cui per primo dominio include Ord e il cui secondo dominio e' la classe universale, allora esiste un'unica collezione funzionale 1-aria T che ha per dominio Ord e che soddisfa alla seguente condizione induttiva relativa a S

$$(\alpha,x)\in T \text{ se e solo se } (\alpha, \{(\beta,y): (\beta,y)\in T \text{ e } \beta<\alpha\}, x)\in S;$$

cioe' il corrispondente di α nella collezione T e' il corrispondente nella collezione S di α e dell'insieme delle coppie ordinate di T che hanno primo elemento minore od uguale ad α (si noti che $\{(\beta,y): (\beta,y)\in T \text{ e } \beta<\alpha\}$ e' un insieme che ha tante coppie quanti sono gli ordinali minori di α, che di fatto costituiscono l'insieme α. Detto altrimenti, per conoscere cosa T fa corrispondere ad α, bisogna conoscere α e l'insieme delle coppie ordinate costituite dagli ordinali minori di α e dall'elemento che T fa corrispondere a quell'ordinale minore di α.

Anche in questo teorema si ripropone la difficolta' che per definire la collezione T si usa la stessa T, ma solo ristretta agli ordinali che precedono quello per il quale si cerca l'elemento che gli fa corrispondere T. Cosi' non si puo' dire che la collezione T e' definita, ma questo teorema permette di affermare che la condizione espressa caratterizza univocamente la collezione T, e cio' giustifica l'abuso di linguaggio che si compie dichiarando che T e' **definita per induzione transfinita a partire da** S. Si noti che, al contrario di quanto succede nella teoria dei numeri naturali, il successo ora di questo teorema, che permette di caratterizzare univocamente una collezione che soddisfa la condizione induttiva relativa a S, e' dovuto alle forti assunzioni fondazionali fatte nell'accettare gli assiomi della teoria degli insiemi.

DIMOSTRAZIONE. Sara' utile nella dimostrazione poter disporre della seguente nozione. Diciamo che la funzione f rispetta la condizione induttiva data dalla collezione S fino all'ordinale α, fatto che indicheremo con la notazione Ric(f,S,α), se

- per ogni $\beta\leq\alpha$ $(\beta, \{(\gamma,f(\gamma)): \gamma<\beta\}, f(\beta))\in S$, e
- per ogni funzione g, tale che anche per essa e' vero che $(\beta, \{(\gamma,g(\gamma)): \gamma<\beta\}, g(\beta))\in S$ per ogni $\beta\leq\alpha$, risulta che $f(\beta)=g(\beta)$ per ogni $\beta\leq\alpha$.

Si consideri ora la collezione $X=\{\alpha$: esiste f tale che Ric(f,S,α)$\}$.

E' immediato che X non e' vuoto, dal momento che $0\in X$: infatti e' unico l'elemento y tale che $(0,\varnothing,y)\in S$, come e' unica la funzione costituita dalla sola coppia ordinata (0,y).

Inoltre X e' un segmento iniziale di Ord. Infatti, se $\alpha\in X$ e $\beta\in\alpha$, allora c'e' una funzione f tale che Ric(f,S,α) e la restrizione $f_{|(\beta\cup\{\beta\})}$ della funzione f a $\beta\cup\{\beta\}$ e' tale che Ric($f_{|(\beta\cup\{\beta\})}$,S,$\beta$) dal momento che la funzione $f_{|\beta}$ si comporta come la funzione f nell'insieme a cui e' ristretta.

Infine X=Ord. Se, per assurdo, Ord-X fosse non vuoto, ci sarebbe un minimo elemento δ appartenente a (Ord-X), sicche' per ogni $\varepsilon<\delta$ esisterebbe una funzione f_ε tale che Ric(f_ε,S,ε) e, per ogni $\gamma<\varepsilon$, $f_{\gamma|(\gamma\cup\{\gamma\})}=f_{\varepsilon|(\gamma\cup\{\gamma\})}$; e cosi' $\cup\{f_{\varepsilon|(\varepsilon\cup\{\varepsilon\})}: \varepsilon<\delta\}$e' ancora una funzione g il cui dominio e' δ. Si consideri la funzione $h=g\cup(\delta,x)$ dove x e' l'unico elemento tale che $(\delta, \{(\gamma,g(\gamma)): \gamma<\delta\}, x)\in S$. Si vede facilmente che Ric(h,S,δ), contro la definizione di δ.

Cosi', poiche' X=Ord, si puo' definire la collezione $T=\{(\alpha, f_\alpha(\alpha)): \alpha$ e' un ordinale$\}$. Dal momento che, per ogni ordinale α, $T \cap((\alpha\cup\{\alpha\})\times\{ f_\alpha(\gamma): \gamma<(\alpha\cup\{\alpha\}))=f_{\alpha|(\alpha\cup\{\alpha\})}$, si vede facilmente che T e' proprio la collezione che si voleva.

Anche per la definizione per induzione transfinita, come per il principio di induzione transfinita, c'e' una seconda formulazione, equivalente alla prima, ma espressa in considerando i casi con cui puo' presentarsi un ordinale: 0, successore immediato, limite.

La seconda formulazione del metodo di **definizione per induzione transfinita** e' la seguente.

TEOREMA. Siano s_0 un elemento, S_1 e S_2 due collezioni funzionali binarie il cui primo dominio include gli ordinali e il cui secondo dominio e' l'universo degli insiemi, allora esiste un'unica collezione funzionale unaria T tale che

i) $(0,s_0)\in T$, e

ii) per ogni ordinale immediato successore α, cioe' $\alpha=\beta\cup\{\beta\}$, se $(\beta,y)\in T$ e $(\beta,y,x)\in S_1$ allora $(\alpha,x)\in T$, e

iii) per ogni ordinale limite γ, se $(\gamma,\{T(\delta): \delta<\gamma\},x)\in S_2$ allora $(\gamma,x)\in T$.

Queste tre condizioni possono essere ridette, usando la notazione delle funzioni, nel modo seguente:

i') $T(0)=s_0$, e

ii') per ogni ordinale immediato successore α, cioe' $\alpha=\beta\cup\{\beta\}$, $T(\alpha)= S_1(\beta,T(\beta))$, e

iii') per ogni ordinale limite γ, $T(\gamma)=S_2(\gamma,\{T(\delta): \delta<\gamma\})$.

Si dira' che la collezione unaria T e' stata definita per induzione transfinita a partire dall'elemento s_0 e dalle collezioni funzionali binarie S_1 e S_2.

DIMOSTRAZIONE. E' sufficiente considerare la seguente collezione funzionale binaria S, e applicare la definizione per induzione transfinita nella precedente formulazione a partire da S.

$S=\{(0,u,s_0): u=u\}\cup\{(\alpha,t,v)$: esistono β e w tali che $\alpha=\beta\cup\{\beta\}$ e $(\beta,w)\in t$ e $(\beta,w,v)\in S_1\}$ $\cup\{(\alpha,t,\varnothing)$: esiste β tale che $\alpha=\beta\cup\{\beta\}$ ma non esistono w e v tali che $(\beta,w)\in t$ e $(\beta,w,v)\in S_1\}\cup\{(\alpha,t,v)$: α e' un ordinale limite e $(\alpha,t,v)\in S_2\}$.

Cosi' S e' l'unione di quattro insiemi. Il primo considera il caso in cui l'ordinale nel primo elemento delle terne e' 0. In esso interessa solo la terna $(0,\varnothing,s_0)$, le altre sono state introdotte perche' il secondo dominio di S sia la classe universale quando il primo elemento di una terna e' 0, ma non sono rilevanti per l'applicazione della definizione per induzione transfinita relativa a S nella prima formulazione. Il secondo e il terzo prendono in considerazione le terne il cui primo elemento e' un ordinale successore immediato. Il terzo insieme e' stato introdotto affinche' il secondo dominio di S sia uguale alla classe universale quando il primo elemento di una terna e' un ordinale successore immediato, ma neppure queste terne intervengono nell'applicazione della definizione per induzione transfinita a partire da S nella prima formulazione. Si vede facilmente che la collezione funzionale unaria T ottenuta della definizione per induzione transfinita nella prima formulazione a partire dalla collezione funzionale S cosi' definita, e' uguale alla collezione funzionale unaria ottenuta della definizione per induzione transfinita nella seconda formulazione a partire dall'elemento s_0 e dalla collezioni funzionali binarie S_1 e S_2.

6.8. CARDINALI (PRINCIPIO DEL BUON ORDINAMENTO, ASSIOMA DELLA SCELTA).

Nel capitolo sugli insiemi infiniti, si era parlato di insiemi di ugual cardinalita', cioe' di coppie di insiemi per le quali c'e' una biiettivita' dall'uno sull'altro. Si noti che non si e' definito un certo elemento come la cardinalita' di un insieme arbitrariamente dato, ma si e' usata la locuzione "cardinalita' di un insieme" solo per confrontare la cardinalita' di un insieme con quella di un altro e per vedere se erano di ugual cardinalita' (cioe' se c'era una biiettivita' tra i due) o uno di cardinalita' minore od uguale a quella dell'altro (cioe' se c'era una iniettivita' totale dal primo nel secondo). Sappiamo che l'avere ugual cardinalita' e' un modo di corrispondersi che e' riflessivo, simmetrico e transitivo, sicche' si possono costruire classi di insiemi di ugual cardinalita', ma tali classi sono proprie (eccetto quella di ugual cardinalita' con l'insieme vuoto).

Si e' anche visto che per ciascuna di dette classi, quando contengono insiemi finiti, si puo' trovare un particolare insieme che le appartenga e che rappresenti la classe: il numero naturale che le appartiene. Si puo' fare qualcosa di analogo anche per le classi cui appartengono insiemi infiniti?

Si ricordi anche che per contare il numero di elementi di un insieme finito si considerava un elemento alla volta, a partire da zero, e lo si aggiungeva a quelli precedentemente considerati fino ad esaurire l'insieme da contare. Il considerare un elemento alla volta introduceva un buon ordine tra gli elementi dell'insieme finito, ma si e' fatto vedere che il numero finale degli elementi era indipendente dal particolare buon ordine con cui si consideravano gli elementi dell'insieme.

Da questa osservazione si potrebbe tratte l'idea di bene ordinare anche gli insiemi infiniti per arrivare a contare quanti elementi hanno. Una volta ben ordinato l'insieme, se esso sara' dello stesso tipo di un unico ordinale, si potrebbe pensare che questo ordinale dia il numero degli elementi dell'insieme. Ma ci sono serie difficolta' su questa via.

Anzitutto e' possibile bene ordinare un qualsiasi insieme?

Poi, anche se questo fosse possibile, e' unico il modo di bene ordinarlo o ci sono piu' modi? La domanda e' rilevante perche', in nell'ultimo caso, i diversi modi potrebbero corrispondere a diversi ordinali (che non sono dello stesso tipo) e non si saprebbe piu' quale dovrebbe rappresentare la numerosita' dell'insieme.

Si affronteranno questi due problemi uno alla volta.

E' evidente che un insieme finito o anche numerabile e' bene ordinabile: infatti, in tali casi, c'e' una biiettivita' tra l'insieme dato e o un naturale o l'insieme dei naturali, e questa biiettivita' permette di costruire un ordine sull'insieme dato facendo precedere l'elemento a cui corrisponde un piu' piccolo naturale nella biiettivita' (si vede facilmente che questo e' un buon ordinamento). Ma rimane la domanda se gli insiemi piu' che numerabili sono bene ordinabili.

La risposta a questo interrogativo e' abbastanza curiosa: infatti dipende da quale nozione di insieme viene accettata, dal momento che si dimostra che l'assunzione che ogni insieme possa essere bene ordinato (assunzione che viene chiamata **principio del buon ordinamento**) non e' in contrasto con le assunzioni basilari della teoria degli insiemi, come sono state a suo tempo introdotte, ma non lo e' neppure la negazione dell'assunzione che ogni insieme sia bene ordinabile. Questo stato di cose deriva dal fatto che, come si dimostrera', il principio del buon ordinamento equivale all'assioma della scelta per il quale e' stata dimostrata l'analoga situazione. L'**assioma della scelta** afferma che, dato un insieme di insiemi non vuoti, esiste una funzione (che viene detta funzione di scelta) che ad ognuno degli insiemi non vuoti dell'insieme dato associa un suo elemento. Gödel, nel 1940, ha dimostrato che, se si aggiunge l'assioma della scelta agli altri assiomi della teoria degli insiemi visti prima, si ottiene un sistema di enunciati soddisfacibile, se l'insieme dei precedenti assiomi era soddifacibile. Nel 1963, Cohen mostro' che pure l'aggiunta della negazione dell'assioma della scelta altri assiomi della teoria degli insiemi prima visti fa ottenere un insieme di formule soddisfacibile, se lo e' l'insieme dei precedenti assiomi. Questi risultati, per quanto interessanti e pertinenti con la discussione che si sta svolgendo, vanno ben oltre i limiti di questa presentazione, sicche' non ne sara' data la dimostrazione, ma si insistera' nel discutere che tipo di ipotesi si accetta assumendo l'assioma della scelta, e quanto questo assioma sia accettabile di per se'. Ma prima di arrivare a cio', si dimostrera', come promesso, l'equivalenza dell'assioma della scelta con il principio del buon ordinamento.

TEOREMA. Il principio del buon ordinamento implica l'assioma di scelta.

TRACCIA DI DIMOSTRAZIONE. Se si puo' indicare in un qualche modo preciso (cioe' mediante una formula del linguaggio della teoria degli insiemi) quale elemento x di un insieme non vuoto X di un insieme di insiemi non vuoti Y va' associato a quell'insieme X mediante una funzione di scelta, allora si puo' definire esplicitamente una funzione di scelta, la cui esistenza sara' dunque dimostrata, e non assunta per assioma.

Un tentativo di determinare un elemento in ciascun insieme non vuoto potrebbe essere fatto mediante la seguente argomentazione. Se vale il principio del buon ordinamento, dopo aver bene ordinato ciascun insieme non vuoto dell'insieme di insiemi non vuoti Y, ci sara' un modo esplicito di associare a ciascun insieme non vuoto appartenente a Y un suo elemento, precisamente il primo elemento nel buon ordine su quell'insieme. Allora la collezione delle coppie ordinate, il cui primo elemento e' un insieme di Y e il cui secondo elemento e' il primo elemento di detto insieme nel buon ordine introdotto, e' una funzione di scelta, che esiste, mostrando cosi' che l'assioma della scelta e' soddisfatto. Ma in questa argomentazione si e' fatto gia' uso inavvertitamente dell'assioma della scelta (a cui, invece, si vuole pervenire) quando si e' detto di bene ordinare ogni insieme, dal momento che i buoni ordinamenti di un insieme possono essere molti e tra questi ne va scelto uno per ciascun insieme non vuoto appartenente a Y, che va precisato, se si non si vuole invocare l'assioma della scelta. Fortunatamente c'e' una via d'uscita dalla difficolta' notata: basta considerare l'insieme unione degli insiemi non vuoti della collezione, $\cup$Y. Questo è uno solo e puo' essere ben ordinato, in base al principio del buon ordinamento, e tale buon ordine, una volta ristretto ai singoli insiemi non vuoti da cui si e' ottenuta l'unione, fornisce un buon ordine per ciascuno di questi ben determinato e non scelto mediante una funzione di scelta. A questo punto si puo' recuperare l'argomentazione del precedente tentativo per concludere la dimostrazione del teorema.

TEOREMA. L'assioma della scelta implica il principio del buon ordinamento.

DIMOSTRAZIONE. Per mostrare che un insieme Z e' bene ordinabile, basta costruire una funzione biiettivita' da un segmento iniziale degli ordinali sull'insieme, perche' allora si possono ordinare gli elementi dell'insieme in base all'ordine degli ordinali a cui corrispondono e cosi' si ottiene un buon ordine. In tal modo ci si e' ridotti a dover mostrare l'esistenza di tale funzione. Si consideri la collezione funzionale unaria T che a ciascun ordinale α associa l'elemento scelto da una funzione di scelta h applicata all'insieme Z-{y: $(\beta,y)\in T$ e $\beta<\alpha$} se questo e' diverso dal vuoto, un insieme t che non appartiene a S altrimenti (t esiste perche' Z e' un insieme sicche' non puo' essere la classe universale): l'esistenza della funzione h segue dall'assioma di scelta relativo all'insieme dei sottoinsiemi di Z , P(Z),che include gli insiemi del tipo Z-{y: $(\beta,y)\in T$ e $\beta<\alpha$}. Questa collezione funzionale unaria T e' definita correttamente per induzione transfinita a partire dalla collezione funzionale binaria S={(α, s, z): z=h(Z-cod(s)) se (Z-cod(s))$\neq\emptyset$, z=t altrimenti}. Si consideri ora la sottocollezione f di T delle coppie ordinate tali che il secondo elemento non e' t. Il dominio di f e' un segmento iniziale di Ord (non e' escluso a priori che sia tutto Ord): infatti se α appartiene al dominio di f vuol dire che Z-{y: $(\beta,y)\in T$ e $\beta<\alpha$} non e' vuoto, sicche' se $\gamma<\alpha$ anche Z-{y: $(\beta,y)\in T$ e $\beta<\gamma$} non e' vuoto dal momento che contiene Z-{y: $(\beta,y)\in T$ e $\beta<\alpha$}, e dunque anche γ appartiene al dominio di f. Inoltre f e' una collezione funzionale iniettiva poiche' se si applica a due ordinali diversi (uno dei due sara' minore dell'altro, siano $\delta<\varepsilon$) allora $f(\varepsilon)$=h(Y-{y: $(\beta,y)\in T$ e $\beta<\varepsilon$}) e $f(\delta)\in${y: $(\beta,y)\in T$ e $\beta<\varepsilon$} sicche' $f(\delta)$ non puo' essere scelto dalla collezione funzionale h applicata all'insieme (Y-{y: $(\beta,y)\in T$ e $\beta<\varepsilon$}) perche' non appartiene all'insieme (Y-{y: $(\beta,y)\in T$ e $\beta<\varepsilon$}), cosicche' $f(\delta)$ deve essere diverso da $f(\varepsilon)$. Essendo f iniettiva nell'insieme Z, il suo dominio dovra' pure essere un insieme, ma un segmento iniziale di Ord che sia un insieme non e' altro che un ordinale, sia esso ζ. Infine f e' suriettiva, perche' altrimenti si puo' considerare il minimo ordinale che non appartiene al dominio di f (esso e' proprio ζ), e Z-{y: $(\beta,y)\in T$ e $\beta<\zeta$} non sarebbe vuoto sicche' T farebbe corrispondere anche a ζ un elemento di Z (e percio' diverso da t) ed anche ζ apparterrebbe al dominio di f, contro la definizione di ζ. Cosi' f e' la funzione cercata che permette di bene ordinare Z, e la dimostrazione e' conclusa.

Ora si vuole esaminare l'accettabilita' dell'assioma di scelta, e, di conseguenza, del principio del buon ordinamento.

Le collezioni sono alla base della teoria degli insiemi dove il problema centrale, a causa del paradosso di Russell, e' determinare se una collezione e' un insieme. Ma gia' prima di arrivare a questo punto, ci si puo' chiedere cos'e' una collezione.

Qui ci sono due problematiche che si incrociano: da una parte l'avere una precisa nozione di cosa si intende per collezione, dall'altra saper riconoscere se una certa cosa e' effettivamente una collezione. Anche se le problematiche sono diverse, e' evidente che sono collegate: infatti si potrebbe dubitare della precisione della nozione se non e' in grado di riconoscerne le istanze.

Si potrebbe classificare il primo come problema ontologico e il secondo come problema epistemologico, e i due problemi esistono e sono distinti perche' l'uomo puo' aver chiare le caratteristiche di un concetto senza saperne riconoscere operativamente le istanziazioni.

Nel caso in esame si puo' affermare che dal punto di vista ontologico non ci sono grandi difficolta': considerare una collezione vuol dire fissare l'attenzione su degli elementi nel loro complesso. Molto piu' delicato e' il problema epistemologico. Si e' accettato di ritenere uguali due collezioni quando hanno gli stessi elementi. Cio' vuol anche dire che si accetta che per riconoscere una specifica collezione bisogna sapere, in qualche modo, quali sono i suoi elementi, e, se non si conoscono gli elementi, non si puo' dire di considerare una certa collezione, di cui rimane dubbia l'esistenza.

Si apre, cosi', il problema di precisare qual'e' la conoscenza richiesta di ciascun elemento per poter affermare che un elemento appartiene ad una collezione (che e' uno di quelli considerati), al fine di poter precisare che si sta considerando una certa specifica collezione, e dunque asserire l'esistenza di quella. Il problema diviene: quanto bene devono essere conosciuti e precisati gli elementi per poter dire che la loro collezione esiste? E' facile proporre collezioni, ad esempio formate da un numero finito di elementi ben individuati, per le quali non e' assolutamente problematico riconoscere quali sono gli elementi della collezione, e cosi' precisare quale collezione si sta considerando e asserirne tranquillamente l'esistenza. Ma ci sono delle situazioni in cui si puo' essere perplessi se effettivamente si sappia determinare quali elementi appartengono ad una collezione, il che puo' far dubitare sulle stessa esistenza della collezione che si vuol individuare.

Si consideri, ad esempio, la collezione dei sottoinsiemi dell'insieme dei numeri naturali: si sa che essa e' piu' che numerabile, sicche' non se ne possono nominare gli elementi neppure in un tempo illimitato (addirittura ci sono sottoinsiemi dei naturali che possono essere individuati solo dopo aver considerato una infinita' di altri sottoinsiemi dei numeri naturali). Eppure esiste una precisa definizione di sottoinsieme, sicche' il concetto di sottoinsieme e' chiaro. Inoltre pensiamo di poter riconoscere se una data collezione (anche infinita) e' un sottoinsieme dei naturali, cosi' ce la sentiamo di poter affermare di conoscere i sottoinsiemi dei naturali e di poter asserire tranquillamente l'esistenza della loro collezione (cio' viene anche precisamente affermato come conseguenza degli assiomi dell'infinito e dell'insieme potenza nella teoria degli insiemi).

L'esempio appena considerato mostra come si sia disposti a concedere molto alla nozione di conoscenza degli elementi che serve per poter concludere con l'esistenza di una certa collezione. Ma anche questa apertura non e' sufficiente per precisare dove mettere il confine esatto tra cio' che si vuol ritenere come conoscibile e cio' che non lo e'.

Un esempio paradigmatico di situazioni di questo tipo e' il seguente. Si consideri una famiglia di insiemi non vuoti,. Ci si chiede se esiste almeno una funzione, che chiameremo funzione di scelta, che ad ogni insieme della famiglia associa un elemento di quell'insieme. Non c'e' assolutamente alcun problema nell'affermare l'esistenza di una tale funzione se la famiglia e' finita, o se c'e' un criterio esplicito per individuare un elemento in ciascun insieme della famiglia. In particolare se ciascuno degli insiemi non vuoti della famiglia e' finito allora c'e' un criterio uniforme per scegliere un elemento da ciascun insieme non vuoto (ad esempio scegliendo il primo in un buon ordinamento dell'insieme, buon ordinamento che sicuramente esiste per la finitezza dell'insieme), e una funzione scelta esiste. Se, dunque, con pochi elementi in ciascuno degli insiemi non vuoti si puo' definire una funzione di scelta che ad ogni insieme della famiglia associ un suo elemento, cio' dovra' essere ancora piu' facile quando la "scelta e' maggiore", cioe' quando gli elementi in ciascun insieme della famiglia sono in numero maggiore.

Pur essendo del tutto naturale ritenere che, nel caso di maggior ricchezza di ciascuno degli insiemi della famiglia, una funzione di scelta debba esistere a ragion maggiore, tuttavia in questo caso la troppa ricchezza puo' provocare delle difficolta' nell'individuazione dell'elemento da scegliere in ciascun insieme della famiglia. Cohen ha dimostrato che, nel caso generale, la possibilita' di caratterizzare una funzione di scelta non e' deducibile dagli altri assiomi della teoria degli insiemi. Cosi' si deve decidere se si vuole accettare l'esistenza di una funzione di scelta, come sembra del tutto naturale, accettando nel contempo come buona una conoscenza dei suoi elementi anche molto vaga, oppure, proprio per non accettare conoscenze troppo imprecise per determinare una collezione, se si debba rifiutare l'esistenza di funzioni di scelta.

In genere in matematica si accetta l'assioma della scelta che afferma appunto l'esistenza di una funzione di scelta una volta data una famiglia di insiemi non vuoti: anche se puo' essere dubbio se la conoscenza umana arrivi a determinare gli elementi di una particolare funzione di scelta, l'accettazione dell'assioma della scelta vuol dire accettare l'esistenza e l'utilizzabilita' di una tale funzione indipendentemente dalle possibilita' effettive di precisare i suoi elementi.

Come si e' dimostrato, il principio del buon ordinamento e' equivalente all'assioma della scelta, e anch'esso si trova ad affrontare la stessa problematica. In effetti se ogni insieme puo' essere ben ordinato allora c'e' un banale criterio uniforme per scegliere un elemento da un insieme non vuoto, basta scegliere, ad esempio, il primo. Ma rimane il problema di come bene ordinare un insieme: anche se e' chiaro cio' che questa affermazione comporta, non e' evidente come si possa realizzare un buon ordinamento se l'insieme da ben ordinare contiene talmente tanti elementi che sfuggono ad ogni controllo (se sono pochi o ben individuati non e' difficile bene ordinarli). Il problema e' dello stesso tipo di quanto visto prima per l'assioma della scelta, tant'e' vero che proprio usando l'assioma della scelta si e' dimostrato che si riesce a costruire un buon ordinamento di un qualsiasi insieme non vuoto.

Analizzata cosi' la risposta alla prima domanda che ci si era posti sulla bene ordinabilita' di un qualsiasi insieme, rimane da considerare la seconda domanda sull'unicita', a meno di isomorfismi d'ordine, dei buoni ordinamenti con cui un insieme puo' essere bene ordinato.

Si e' gia' osservato che i buoni ordinamenti di un insieme finito (cioe' equinumeroso ad un naturale) sono tra loro isomorfi. Si e' anche gia' visto che ogni insieme non finito se e' equinumeroso ad un ordinale α (e percio' bene ordinabile in modo isomorfo a α) allora e' anche equinumeroso all'orinale $\alpha\cup\{\alpha\}$ (e percio' bene ordinabile in modo isomorfo a $\alpha\cup\{\alpha\}$) poiche' α e $\alpha\cup\{\alpha\}$ sono equinumerosi.

Dal momento che ci sono vari ordinali infiniti tra loro equinumerosi, ci si puo' domandare se tra questi ce ne sia uno da privilegiare per qualche motivo per poter essere indicato come l'indicazione della quantita' di elementi di un insieme ad esso equinumeroso. Allo scopo si consideri un insieme infinito e la collezione degli ordinali ad esso equinumerosi. Essendo una collezione di ordinali, un elemento particolare tra questi e' il minimo della collezione. Poiche' risponde a cio' che si cercava, si decide di chiamare **cardinale** il minimo ordinale di un insieme costituito da tutti gli ordinali equinumerosi ad un certo ordinale. In base a questa definizione ogni naturale e' un cardinale perche' alla collezione degli ordinali a lui equinumerosi appartiene solo lui che di conseguenza ne e' il minimo. Anche ω e' un cardinale essendo il piu' piccolo ordinale infinito; ω, visto come cardinale, viene denotato con $\aleph_0$.

La nozione di cardinale risponde alla richiesta posta inizialmente di trovare all'interno di ciascuna classe di equinumerosita', anche relativamente ad insiemi infiniti, un unico elemento che fosse un buon rappresentante della classe. Evidentemente in ogni tale classe c'e' almeno un cardinale perche' considerato un insieme della classe esso puo' essere bene ordinato, in base al principio del buon ordinamento, e pertanto sara' isomorfo ad un ordinale, che stara' nella classe di equinumerosita', come pure il piu' piccolo ordinale ad esso equinumeroso che e' il cardinale di cui si parlava. Inoltre tale cardinale e' unico, perche' e' unico il minimo di una classe di ordinali che, oltre ad essere ordinali equinumerosi ad un certo insieme, sono anche tutti quelli che appartengono a quella classe di equinumerosita'. Cosi' ora, invece di parlare di equinumerosita' tra insiemi e di insiemi di ugual cardinalita', si puo' associare ad ogni insieme il suo cardinale e misurare le quantita' di elementi di un insiemi confrontando i rispettivi cardinali.

Ci si puo' domandare quanti sono gli ordinali equinumerosi ad un certo ordinale infinito. Gia si e' ricordato che il successore immediato di un ordinale e' equinumeroso all'ordinale stesso, ma si puo' considerare anche l'immediato successore di quello cosi' ottenuto e continuare a ripetere l'operazione: in tal modo si otterranno tanti ordinali tutti equinumerosi a quello da cui si e' partiti per la transitivita' della relazione di equinumerosita', ma non e' detto che questi siano tutti.

Intanto ci si puo' chiedere se la collezione degli ordinali equinumerosi ad un certo ordinale infinito α e' un insieme o una classe propria. Per il teorema di Cantor sulla cardinalita' dell'insieme potenza, l'insieme dei sottoinsiemi di α e' strettamente piu' numeroso di α, ma, per il principio del buon ordinamento, anch'esso puo' essere bene ordinato e sara' isomorfo ad un ordinale β che dovra' essere maggiore di α (altrimenti sarebbe o α o equinumeroso ad un segmento iniziale di α, ma allora sarebbe equinumeroso ad α per la proprieta' simmetrica della relazione di minore od uguale numerosita'), ed anche tutti gli ordinali equinumerosi ad α dovranno essere minori di β, sicche' la collezione degli ordinali equinumerosi ad α e' un sottocollezione di β e percio' un insieme.

Poiche' la collezione degli ordinali equinumerosi ad α e' un insieme S_α di ordinali, si puo' considerare l'unione su questo insieme $\cup S_\alpha$, che, come si sa, e' un ordinale , lo si indichi con γ, e confrontare l'ordinale ottenuto con quelli dell'insieme. Se γ fosse equinumeroso ad α sia lui che il suo successore immediato apparterrebbero a S_α, sicche' γ apparterrebbe a $\cup S_\alpha$, ma un ordinale non po' appartenere a se' stesso. Se poi γ fosse minore di α, anche allora apparterrebbe a $\cup S_\alpha$, ancora impossibile. Cosi' la quantita' degli ordinali equinumerosi ad α e' equinumerosa ad un ordinale maggiore di tutti gli ordinali equinumerosi ad α. Si osservi che γ e' un cardinale perche' dovra' essere il piu' piccolo degli ordinali ed esso equinumerosi, essendo il piu' piccolo ordinale maggiore di tutti gli ordinali equinumerosi ad α dal momento che e' l'unione del loro insieme. Esso rappresenta la quantita' di ordinali equinumerosi ad α.

Invece che dall'ordinale α si sarebbero potute svolgere le stesse argomentazioni a partire dal cardinale di α, indichiamolo con κ, cioe' dal piu' piccolo ordinale equinumeroso ad α. In questo caso si puo' dire che la quantita' degli ordinali equinumerosi al cardinale κ e' contata dal cardinale che e' l'unione sull'insieme degli ordinali equinumerosi ad κ, e che e' il piu' piccolo cardinale che segue κ. Si usa indicare questo cardinale con κ^+.

Si e' cosi' visto un metodo per passare da un cardinale infinito ad uno piu' grande, meglio al piu' piccolo che gli e' piu' grande e che puo' essere correttamente detto il suo immediato successore in senso cardinale. Si noti che, per arrivare a questo risultato, si e' ricordato il fatto che l'insieme dei sottoinsiemi di un insieme ha cardinalita' strettamente maggiore della cardinalita' dell'insieme. Poiche' stiamo accettando il principio del buon ordinamento, anche per l'insieme dei sottoinsiemi di un insieme ci dovra' essere un cardinale, η, ad esso equinumeroso. η dovra' essere maggiore del cardinale, κ, equinumeroso all'insieme di partenza. Viene spontaneo confrontare questo cardinale η con il cardinale κ^+ successore immediato del cardinale κ: evidentemente dovra' essere $\kappa^+ \leq \eta$, ma potrebbe essere anche $\kappa^+=\eta$. L'interrogativo se $\kappa^+=\eta$ non ha risposta a partire dagli assiomi finora visti della teoria degli insiemi, incluso l'assioma della scelta: infatti sempre Gödel nel 1940 ha mostrato che l'assumere $\kappa^+=\eta$ non contraddice gli assiomi gia' visti, mentre sempre Cohen nel 1963 ha mostrato che non contraddice gli assiomi gia' visti assumere che κ^+ sia strettamente minore di η. Nel caso che κ^+ sia il cardinale successore immediato del cardinale equinumeroso all'insieme dei naturali, e η sia il cardinale dell' insieme dei sottoinsiemi dei naturali, l'assunzione che $\kappa^+=\eta$ e' stata formulata da Cantor e va' sotto il nome di ipotesi del continuo, in quanto precisa il cardinale equinumeroso all'insieme dei numeri reali.

Grazie a quanto visto, si puo' costruire una successione di cardinali infiniti a partire dal piu' piccolo $\aleph_0$. Il cardinale successore immediato di $\aleph_0$ sara' indicato con $\aleph_1$, il cardinale successore immediato di questo sara' indicato con $\aleph_2$, e cosi' via ottenendo $\aleph_i$ per ogni indice naturale i.

Ma ci si puo' domandare se ci sono altri metodi di passare a cardinali maggiori. Si noti che, se X e' un insieme di cardinali senza massimo, allora $\cup X$ e' un ordinale maggiore di tutti i cardinali dati, che non puo' essere equinumeroso a nessuno dei cardinali di X perche' altrimenti sarebbe meno numeroso di un cardinale di X maggiore di quello a cui e' equinumeroso, impossibile per quanto appena osservato. Inoltre e' il piu' piccolo ordinale maggiore di tutti quelli di X e deve essere un cardinale perche' gli ordinali equinumerosi a lui non possono essere piu' piccoli.

Cosi', dopo aver costruito tutti i cardinali $\aleph_i$ per ogni indice naturale i, si puo' prendere l'unione di questi e si ottiene un nuovo cardinale, il piu' piccolo di quelli maggiori di tutti i cardinali della costruzione iniziale, che e' naturale indicare con $\aleph_\omega$. E si puo' anche continuare passando ancora al cardinale immediatamente successivo e cosi' via.

Si puo' concludere che ci sono tanti cardinali quanti sono gli ordinali: infatti sfruttando la definizione per induzione transfinita nella seconda forma per ogni ordinale α si puo' definire il cardinale $\aleph_\alpha$ richiedendo che quando α e' 0 esso sia il cardinale $\aleph_0$, mentre se $\alpha=\beta\cup\{\beta\}$, cioe' se α e' un ordinale successore immediato, allora $\aleph_\alpha$ e' il cardinale successore immediato di $\aleph_\beta$, ed infine se α e' un ordinale limite allora $\aleph_\alpha$ e' l'unione sull'insieme dei cardinali $\aleph_\beta$ con $\beta<\alpha$. Avendo gia' dimostrato l'esistenza di un cardinale successore immediato di un altro cardinale (sfruttando il principio del buon ordinamento), affinche' questa definizione per induzione porti a cio' che si vuole, bisogna dimostrare che se α e' un ordinale limite allora l'unione sull'insieme dei cardinali $\aleph_\beta$ con $\beta<\alpha$ e' il piu' piccolo cardinale maggiore di ciascuno di quelli dell'insieme su cui si e' fatta l'unione. Infatti, dal momento che l'insieme $\{\aleph_\beta: \beta<\alpha\}$ non ha massimo, e che l'unione su un insieme di ordinali senza massimo da' il piu' piccolo ordinale maggiore di ciascuno degli ordinali dell'insieme su cui si e' fatta l'unione, per provare quanto asserito si osservi quanto segue. Se $\cup\{\aleph_\beta: \beta<\alpha\}$ non fosse un cardinale sarebbe comunque un ordinale equinumeroso ad un ordinale piu' piccolo di lui che sia un cardinale. Ma questo non puo' essere maggiore di ciascuno dei cardinali appartenenti a $\{\aleph_\beta: \beta<\alpha\}$ (altrimenti non sarebbe il piu' piccolo ordinale maggiore di tutti quelli dell'insieme), sicche' sara' minore od uguale ad uno di essi, e quindi strettamente minore di un altro cardinale di $\{\aleph_\beta: \beta<\alpha\}$ poiche' questo insieme non ha massimo. Questa contraddizione mostra che $\cup\{\aleph_\beta: \beta<\alpha\}$ dovra' essere un cardinale che deve essere il piu' piccolo maggiore di ciascuno di quelli dell'insieme.

6.9. ARITMETICA ORDINALE E CARDINALE.

E' naturale domandarsi come vadano intese le operazioni tra ordinali e cardinali.

Gia' e' stata considerata l'operazione del passaggio al successivo immediato. Ma mentre questa, iterata, permetteva di raggiungere un qualsiasi numero naturale, non e' sufficiente per ottenere un qualsiasi ordinale. Per questi e' necessario integrarla con l'unione sull'insieme dei precedenti per ottenere gli ordinali limite, anche se si puo' continuare ad applicarla a ordinali non raggiungibili da 0 con la sola iterazione di questa operazione. Si noti che sia per gli ordinali che per i naturali l'operazione di passaggio da un numero α al suo immediato successore α' puo' essere definita nello stesso modo $\alpha'=\alpha\cup\{\alpha\}$, ma mentre per i naturali e per i loro scopi puo' essere irrilevante la posizione del nuovo elemento aggiunto nel buon ordinamento interno allo stesso numero, questo aspetto e' essenziale per gli ordinali infiniti e l'elemento aggiunto si colloca dopo gli altri come si puo' ben notare ricordando che gli ordinali sono bene ordinati dall'appartenenza.

Completamente diversa e' la nozione di immediato successore per i cardinali infiniti. Qui non viene ripetuta la definizione gia' data, ma interessa mettere in evidenza la diversita' della nozione. Un cardinale, essendo un ordinale, ha due ben diversi successori immediati: l'ordinale successore immediato e il cardinale successore immediato; si noti che il primo e' equinumeroso al cardinale dato, il secondo no per definizione.

Si e' gia' detto dell'altra operazione fondamentale per la costruzione degli ordinali che non era rilevante tra i numeri naturali: infatti l'unione su un insieme finito di naturali e' il naturale piu' grande, mentre l'unione su un insieme di ordinali e' il maggiore dell'insieme se l'insieme ha massimo ordinale, mentre e' il piu' piccolo ordinale maggiore di tutti quelli dell'insieme se l'insieme non ha massimo. Ci si puo' domandare che succede considerando l'unione su un insieme di cardinali. Se l'insieme ha massimo, poiche' questo e' anche un ordinale, l'unione da' proprio lui che e' il massimo dei cardinali dell'insieme. Se invece l'insieme di cardinali non ha massimo, l'unione sull'insieme da', come gia' visto, il piu' piccolo cardinale maggiore di tutti i cardinali dell'insieme.

Ci si puo' domandare qual'e' l'effetto della ripetizione dell'operazione di passaggio al successivo immediato, ripetizione che tra i naturali porta all'addizione: infatti la somma, (cioe' il risultato dell'addizione) puo' essere vista come quel numero a cui si perviene partendo dal primo addendo e ripetendo l'operazione di passaggio al successore immediato tante volte quante sono indicate dal secondo addendo. Questa definizione che va sostanzialmente bene sia per i numeri naturali che per gli ordinali.

Per gli ordinali va meglio precisata specificando cosa si debba intendere per ripetere. Cio' puo' essere fatto ricorrendo alla definizione per induzione transfinita. Cosi' **l'addizione ordinale** tra ordinali puo' essere definita come l'unica collezione funzionale binaria tale che valgono le seguenti tre condizioni: i) per ogni ordinale α, $\alpha+0=\alpha$, ii) per ogni coppia di ordinali α e β, $\alpha+(\beta\cup\{\beta\})= (\alpha+\beta)\cup\{\alpha+\beta\}$, e iii) per ogni ordinale limite γ, $\alpha+\gamma=\cup\{\alpha+\delta\text{: } \delta<\gamma\}$. L'addizione cosi' definita ha caratteristiche diverse nei due sistemi numerici dei naturali e degli ordinali. Si e' gia' visto che e' commutativa tra i naturali, ma non lo e' tra gli ordinali, come i vede facilmente dai seguenti contro esempi. Sia n un numero naturale allora $n+\omega=\omega$, mentre $\omega+n\neq\omega$. Si osservi che, secondo la definizione data, i ruoli del primo e del secondo addendo sono diversi: il primo da' il punto di partenza, il secondo quante volte si deve fare il passaggio al successore immediato aggiungendo sempre l'ulteriore elemento alla fine di cio' che si era ottenuto. Cosi' evidentemente $\omega+n\neq\omega$, perche' non c'e' alcun isomorfismo tra i due ordinali, anche se ci sono biiettivita' che non preservano l'ordine. Al contrario, se a partire dal numero n si ripete l'operazione di passare all'immediato successore ω volte, si ottiene ancora ω.

Seguendo questa idea di ottenere nuovi ordinali ripetendo l'operazione di sommare 1, si parte da 0 e si ottengono via via tutti i numeri naturali, fino ad ottenere la collezione di questi che e' il nuovo numero ordinale ω. Da qui si puo' proseguire continuando ad aggiungere 1 ed ottenendo $\omega+1$, $\omega+2$, ... , $\omega+n$, ... L'unione su tutti questi ordinali dara' un nuovo ordinale che e' naturale indicare con $\omega+\omega$, o anche con $\omega\times2$. Da questo si puo' riprendere ad aggiungere 1 ottenendo $\omega+\omega+1$, $\omega+\omega+2$, ... , $\omega+\omega+n$, ... , fino ad arrivare, con una nuova unione, a $\omega+\omega+\omega$, che si puo' indicare anche con $\omega\times3$.

Qui e' opportuno chiarire cosa si intende per moltiplicazione di ordinali. Il prodotto (risultato della moltiplicazione) di ordinali e' l'ordinale che si ottiene sommando ordinatamente il primo fattore con se' stesso tante volte quante e' indicato dal secondo fattore. Questa intuizione puo' essere precisata con la seguente definizione per induzione transfinita. La **moltiplicazione ordinale** tra ordinali e' l'unica collezione funzionale che soddisfa le seguenti tre condizioni: i) per ogni ordinale α, $\alpha\times0=0$, ii) per ogni coppia di ordinali α e β, $\alpha\times(\beta\cup\{\beta\})= (\alpha\times\beta)+\alpha$, e iii) per ogni ordinale limite γ, $\alpha\times\gamma=\cup\{\alpha\times\delta: \delta<\gamma\}$. Si noti che, a differenza di $\omega\times3$ che e' un nuovo ordinale che segue quelli precedentemente indicati, $3\times\omega=\omega$, dal momento che sommando ordinatamente 3 con 3 ... con 3 ... ω volte si ottiene ω. Anche la moltiplicazione tra ordinali non e' commutativa.

Proseguendo nella costruzione degli ordinali, dopo ω, ... , $\omega\times2$, ... , $\omega\times3$, ... , $\omega\times n$, ... si perverra' a $\omega\times\omega$, che puo' essere indicato con ω^2, definendo la potenza come la ripetizione del prodotto nel dovuto ordine. Anche dell'esponensiazione tra due ordinali si puo' dare una definizione precisa per induzione transfinita. La **esponenziazione ordinale** tra ordinali e' l'unica collezione funzionale che soddisfa le seguenti tre condizioni: i) per ogni ordinale α, $\alpha^0=1$, ii) per ogni coppia di ordinali α e β, $\alpha^{\beta\cup\{\beta\}}= \alpha^\beta\times\alpha$, e iii) per ogni ordinale limite γ, $\alpha^\gamma=\cup\{\alpha^\delta: \delta<\gamma\}$. Proseguendo ancora di questo passo si otterranno successivamente ω^3, ... , ω^n, ..., ω^ω, e cosi' via.

E' interessante notare come gli ordinali cosi' introdotti sono tutti equinumerosi a ω, e continuando questo procedimento indefinitamente, finche' si riesce a tener conto delle ripetizioni dell'operazione di passaggio al successore come si e' fatto finora, si otterranno sempre ordinali equinumerosi a ω. Per ottenere ordinali non equinumerosi ad ω, bisognera' passare per la collezione di tutti gli ordinali equinumerosi ad ω, che si e' riusciti a dimostrare che e' un insieme grazie al buon ordinamento di un insieme non equinumeroso ad ω, sicche' questo risultato e' dovuto sia all'assioma dell'insieme potenza che all'assioma della scelta.

Si noti ancora che le operazioni di addizione e di moltiplicazione sono commutative se applicate ai numeri naturali, e cio' e' stato dimostrato a suo tempo, non in modo banale, ma con qualche difficolta', superata usando piu' volte il principio d'induzione. Di fatto, in base alle definizioni date, l'addizione e la moltiplicazione non si presentano immediatamente come commutative, ma lo diventano per i naturali perche' per questi pur cambiando il buon ordinamento ci si ritrova sempre con uno dello stesso tipo.

Le operazioni addizione, moltiplicazione e esponenziazione tra cardinali hanno significati completamente diversi. La **somma cardinale** di due cardinali e' il cardinale dell'insieme unione di due insiemi disgiunti uno della cardinalita' del primo addendo e l'altro della cardinalita' del secondo addendo. Il **prodotto cardinale** di due cardinali e' la cardinalita' dell'insieme prodotto cartesiano dei due cardinali dati.

Si noti che queste due operazioni sono evidentemente commutative, dalla definizione, grazie alla commutativita' dell'unione tra due insiemi e alla commutativita' della cardinalita' del prodotto cartesiano (non alla commutativita' del prodotto cartesiano, che non vale). Si noti ancora come queste operazioni cardinali applicate a naturali danno lo stesso risultato delle corrispondenti operazioni ordinali applicate agli stessi naturali.

Poi, dati due cardinali h e k, si definisce **esponenziazione cardinale** h^k il cardinale dell'insieme delle funzioni totali da k in h.

Mentre la somma e il prodotto cardinale di naturali e' ben noto, vale la pena mostrare il risultato di queste operazioni di addizione e di moltiplicazione applicate a due cardinali almeno uno dei quali sia non naturale e l'altro maggiore di 1. Siano allora h e k due tali cardinali. Si indichi con max(h,k) quello dei due cardinali che e' maggiore od uguale all'altro. Si ha che

$\max(h,k)\leq h+k\leq \max(h,k)+\max(h,k)=2\times\max(h,k)\leq h\times k\leq \max(h,k)\times\max(h,k)=\max(h,k)$

Tutte queste relazioni sono banali fuorche' l'ultima, e, visto che l'ultimo cardinale e' proprio il primo, le disuguaglianze sono di fatto tutte uguaglianze. Dimostriamo allora il seguente

TEOREMA. Per ogni cardinale infinito k, il prodotto cardinale di k per se' stesso e' k ($k\times k=k$).

DIMOSTRAZIONE. Si supponga per assurdo che ci siano cardinali infiniti h per i quali $h\times h\neq h$, e sia k il piu' piccolo di questi. Per poter confrontare k con $k\times k$ si cerca anzitutto di vedere se $k\times k$ e' isomorfo ad un ordinale, bene ordinando questo insieme. Poi eventualmente si cerchera' il cardinale dell'ordinale ottenuto. Poiche' $k\times k$ e' la cardinalita' del prodotto cartesiano dei due insiemi k costituiti dagli ordinali che precedono k, un modo di bene ordinare $k \times k$, e' quello di bene ordinare l'insieme $P=\{(\alpha,\beta): \alpha<k, \beta<k\}$ cioe' l'insieme delle coppie ordinate di ordinali minori di k. Per fare cio' si deve stabilire quando si intende che una tale coppia ordinata sia minore di un'altra. Siano (α_1,β_1) e (α_2,β_2) due tali coppie. E' abbastanza naturale dire che la coppia con massimo tra i due elementi minore debba essere minore, e, in caso di uguaglianza dei massimi, si debba vedere quale ha il primo elemento minore, e, in caso di ulteriore uguaglianza, sia da considerare minore quella che ha il secondo elemento minore. Cioe'

$(\alpha_1,\beta_1) <^\times (\alpha_2,\beta_2)$ se

i) $\max\{\alpha_1,\beta_1\} < \max\{\alpha_2,\beta_2\}$, oppure

ii) se, essendo $\max\{\alpha_1,\beta_1\}=\max\{\alpha_2,\beta_2\}$, si ha che $\alpha_1<\alpha_2$, oppure ancora

iii) se, essendo $\max\{\alpha_1,\beta_1\}=\max\{\alpha_2,\beta_2\}$ e $\alpha_1=\alpha_2$, si ha che $\beta_1 < \beta_2$.

Anzitutto bisogna dimostrare che la relazione $<^\times$ cosi' definita tra coppie ordinate di ordinali minori di k e' effettivamente una relazione di buon ordine. Di fatto e' antiriflessiva (nessuna tale coppia ordinata (α,β) puo' essere nella relazione $<^\times$ prima definita con se' stessa), e si vede facilmente che e' anche transitiva (esercizio per il lettore). Resta da mostrare che ogni sottoinsieme non vuoto X di P ha minimo elemento. Per trovare un tale minimo si consideri prima l'insieme di ordinali $\{\max(\alpha,\beta): (\alpha,\beta)\in X\}$, che, appunto perche' insieme non vuoto di ordinali, ha un minimo, lo si indichi con δ. Si consideri ora l'insieme $X'=\{(\alpha,\beta): (\alpha,\beta)\in X \text{ e } \max\{\alpha,\beta\}=\delta\}$: evidentemente questo insieme non e' vuoto (ma puo' anche avere molti elementi), proprio per la definizione di δ, e si puo' considerare l'insieme di ordinali $\{\alpha: (\alpha,\beta)\in X'\}$, che ancora non e' vuoto, e il suo minimo ordinale, lo si indichi con ε. Infine si consideri $X'' = \{(\alpha,\beta): (\alpha,\beta)\in X \text{ e } \max\{\alpha,\beta\}=\delta \text{ e } \alpha=\varepsilon\} = \{(\alpha,\beta): (\alpha,\beta)\in X' \text{ e } \alpha=\varepsilon\}$ che ancora non e' vuoto per la definizione di ε. Sia ora γ il minimo ordinale dell'isieme non vuoto di ordinali $\{\beta: (\alpha,\beta)\in X \text{ e } \max\{\alpha,\beta\}=\delta \text{ e } \alpha=\varepsilon\} = \{\beta: (\alpha,\beta)\in X''\}$. Si lascia al lettore la dimostrazione che (ε,γ) e' il minimo di X rispetto alla relazione $<^\times$. Cosi' si e' fatto vedere che la relazione $<^\times$ e' una relazione di buon ordine su P, che sara' isomorfa ad un unico ordinale ξ.

Ora si vuol far vedere che la cardinalita' di ξ non puo' essere diversa da k, contro l'assunzione fatta su k di essere il piu' piccolo cardinale equinumeroso al prodotto cartesiano di lui per e stesso. Dapprima si osservi che non puo' essere $\xi<k$ perche', k e' un cardinale e la funzione che a ciascun $\alpha<k$ associa $(\alpha,1)$ e' iniettiva da k in P, e questo e' equinumeroso a ξ, sicche' si avra' $k\leq\xi$. Resta da far vedere che la cardinalita' di ξ non puo' essere strettamente maggiore di k. Se lo fosse, k sarebbe un elemento di ξ a cui corrisponde, nell'isomorfismo tra ξ e P, un elemento di P, sia questo la coppia $(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$. Almeno uno dei due ordinali $\underline{\alpha}$ e $\underline{\beta}$ deve essere infinito, altrimenti l'insieme delle coppie ordinate di P che li precedono, nel senso di $<^\times$, sarebbe finito, ma questo insieme e' equinumeroso a k che e' infinito. Appartenendo a k, che e' un cardinale, la cardinalita' sia di $\underline{\alpha}$ che di $\underline{\beta}$, come pure il massimo z di queste due cardinalita' (che dovra' essere infinito), sono strettamente minori di k. Cosi' $z \times z$, che e' equinumeroso a $\{(\alpha,\beta): \alpha<z \text{ e } \beta<z\}$ che contiene il segmento iniziale di P degli elementi di P che precedono $(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$, deve avere numerosita' almeno k, e si sarebbe trovato un cardinale, z, minore di k che ha la proprieta' che $z\neq z\times z$ (poiche' $z<k\leq z\times z$), contro l'ipotesi che k fosse il minimo tale cardinale.

Questa contraddizione mostra che l'assunzione fatta che esistano cardinali infiniti tali che siano uguali al loro prodotto per se' stessi non puo' valere, e il teorema e' dimostrato.

Questa presentazione degli ordinali e' solo una prima introduzione lontana dall'essere esaustiva. Per uno sviluppo e approfondimento, si rinvia a un qualsiasi manuale sul tema (ad esempio: Monk: Introduction to set theory, McGraw-Hill 1969).