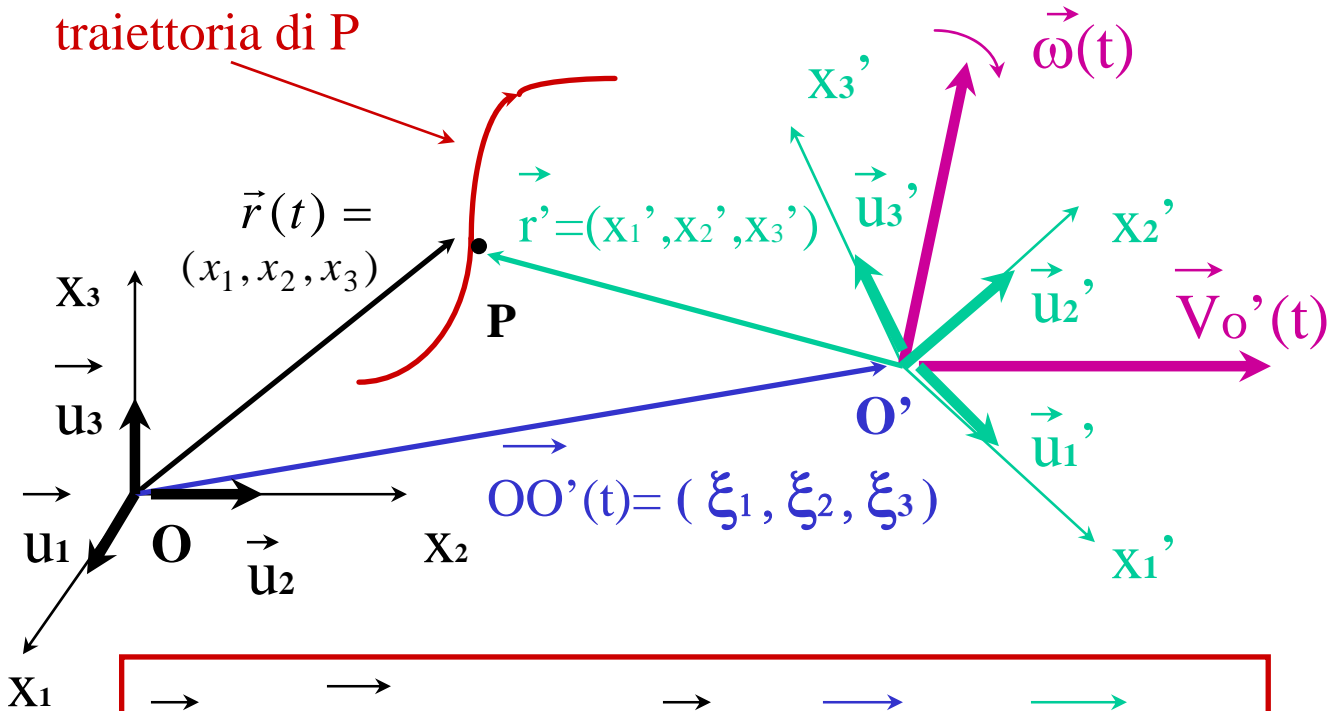


# Trasformazioni tra sistemi di riferimento in moto relativo roto-traslatorio



$$\begin{aligned} \vec{r}(t) = \vec{OP} &= \sum_i x_i \vec{u}_i = \vec{OO}' + \vec{O'P} = \\ &= \sum_i \xi_i \vec{u}_i + \sum x_i' \vec{u}_i' \end{aligned}$$

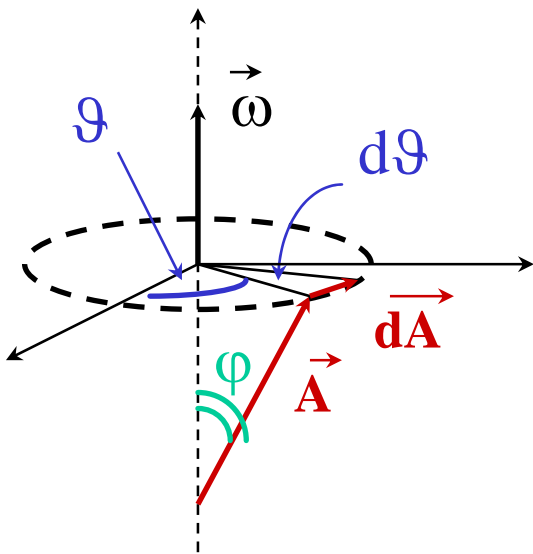
$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \frac{d \vec{OP}(t)}{dt} = \frac{d (\vec{OO}' + \vec{O'P})}{dt} \\ &= \sum_i \frac{d \xi_i}{dt} \vec{u}_i + \sum_i \left( \frac{d x_i'}{dt} \vec{u}_i' + x_i' \frac{d \vec{u}_i'}{dt} \right) \end{aligned}$$

$\frac{d \xi_i}{dt} \rightarrow \vec{V}_{O'}$        $\frac{d x_i'}{dt} \rightarrow \vec{v}'$        $\frac{d \vec{u}_i'}{dt} \rightarrow \vec{\omega} \times \vec{u}_i'$

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}'(t) + \vec{V}_{O'} + (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

## Moto di “precessione” di un vettore :

rotazione del vettore intorno ad un asse, con velocità angolare



di rotazione :  $\omega = \frac{d\vartheta}{dt}$

Vale la **formula di Poisson**:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{A}$$

Infatti:

$$dA = A \sin \varphi d\vartheta$$

$$\Rightarrow \left| \frac{dA}{dt} \right| = A \frac{d\vartheta}{dt} \sin \varphi = |\vec{A}| |\vec{\omega}| \sin \varphi \equiv |\vec{A} \times \vec{\omega}|$$

Inoltre  $dA \perp A$ ,  $\vec{\omega}$  e il suo verso coincide con quello di  $\vec{\omega} \times \vec{A}$

Per un sistema di riferimento in rotazione con velocità angolare  $\vec{\omega}$ , ciascuno dei versori dei suoi assi coordinati compie un moto di precessione :

$$\Rightarrow \frac{d\vec{u}_i}{dt} = \omega \times \vec{u}_i$$

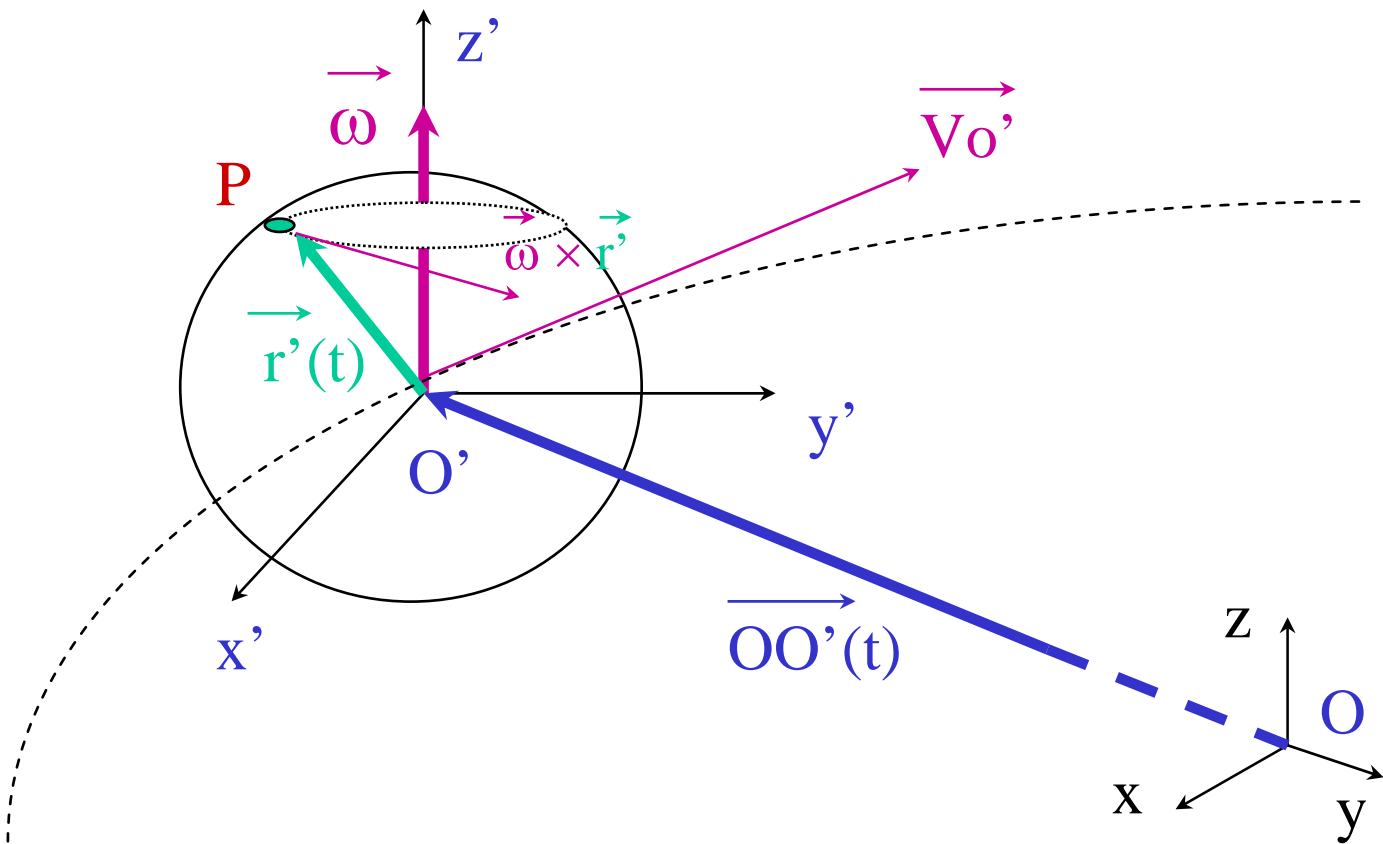
## Teorema delle Velocità

$\Rightarrow$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}'(t) + \vec{V}_{O'} + (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

Velocità di trascinamento:

$$\vec{v}_{tr} = \vec{V}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$



Accelerazione:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{v}' + \vec{V}_{o'} + \vec{\omega} \times \vec{r}') = \\ &= \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d\vec{V}_{o'}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\sum \frac{dx_i'}{dt} \vec{u}_i'\right) &= \sum \frac{d^2 x_i'}{dt^2} \vec{u}_i' + \sum \frac{dx_i'}{dt} \frac{d\vec{u}_i'}{dt} \\ &= \vec{a}' + \sum \frac{dx_i'}{dt} (\vec{\omega} \times \vec{u}_i') = \\ &= \vec{a}' + \vec{\omega} \times \sum \frac{dx_i'}{dt} \vec{u}_i' = \\ &= \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\sum x_i' \vec{u}_i'\right) &= \\ &= \sum \frac{dx_i'}{dt} \vec{u}_i' + \sum x_i' \frac{d\vec{u}_i'}{dt} \\ &= \vec{v}' + \sum x_i' (\vec{\omega} \times \vec{u}_i') \\ &= \vec{v}' + \vec{\omega} \times \sum x_i' \vec{u}_i' \\ &= \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'\end{aligned}$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{a}_{o'} + \frac{d}{dt} \vec{\omega} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}')$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{o'} + \frac{d}{dt} \vec{\omega} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2 \vec{\omega} \times \vec{v}'$$

# Trasformazioni di velocità ed accelerazione tra sistemi di riferimento in moto relativo:

Sistema “assoluto”:

$$\vec{v}, \vec{a}$$

Sistema “relativo”:

$$\vec{v}', \vec{a}'$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{tr} = \vec{v}' + \vec{V}_{o'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{tr} + \vec{a}_{Co}$$

$$\vec{v}_{tr} = \vec{V}_{o'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

“velocità di trascinamento”

$$\vec{a}_{tr} = \vec{a}_{o'} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

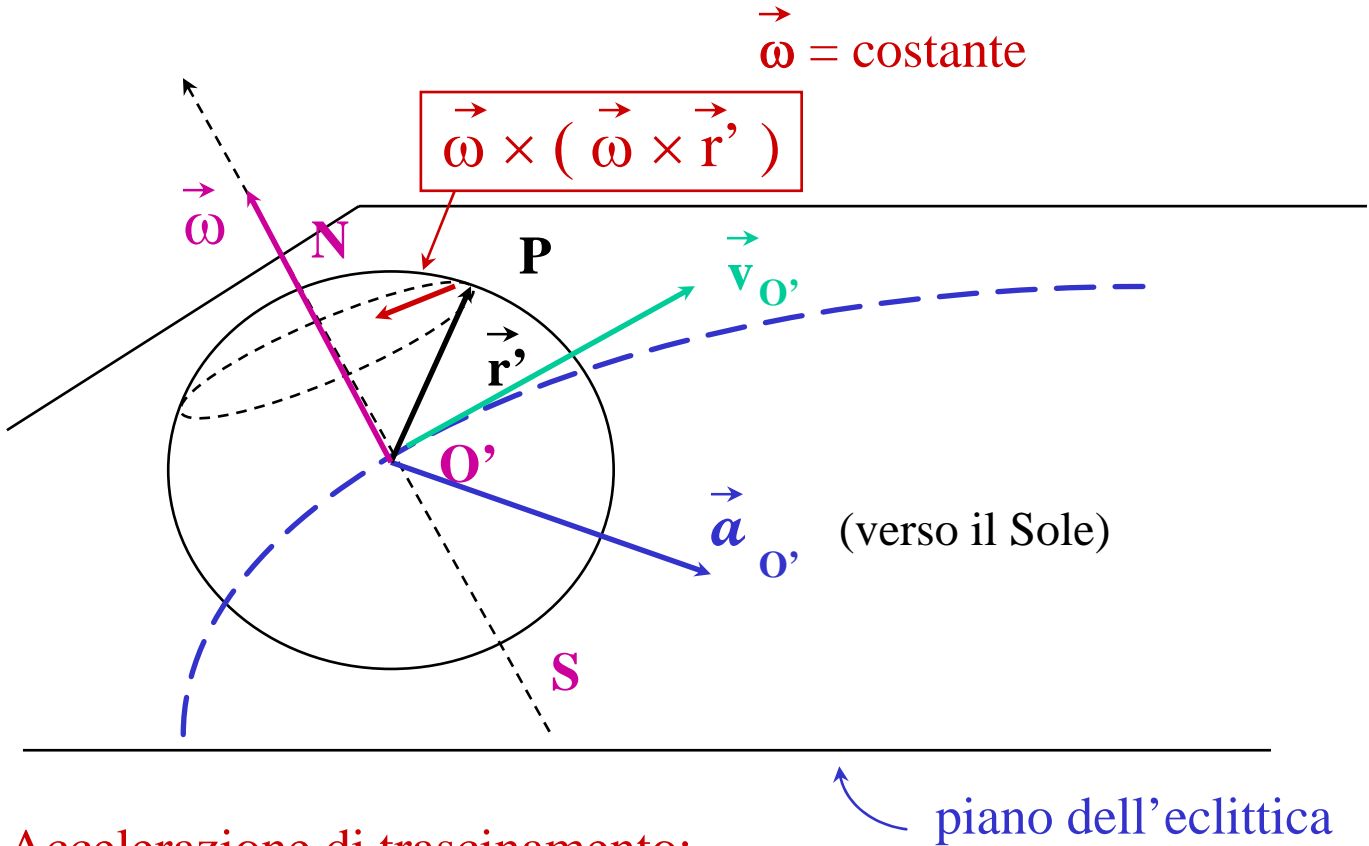
“accelerazione di trascinamento”

$$\vec{a}_{Co} = 2 \vec{\omega} \times \vec{v}'$$

“accelerazione complementare”  
o “di Coriolis”

# Esempio di trasformazione delle accelerazioni :

il moto della Terra :



Accelerazione di trascinamento:

$$\vec{a}_{tr} = \vec{a}_{o'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

$$a_{o'} = \frac{v_{o'}^2}{R} \approx \frac{(30 \text{ Km/s})^2}{1,5 \cdot 10^8 \text{ Km}} \approx 0,6 \text{ cm/s}^2 \approx 10^{-3} g$$

← distanza Terra-Sole

$$|\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')| = \omega^2 R_T \sin(\pi/2 - \lambda)$$

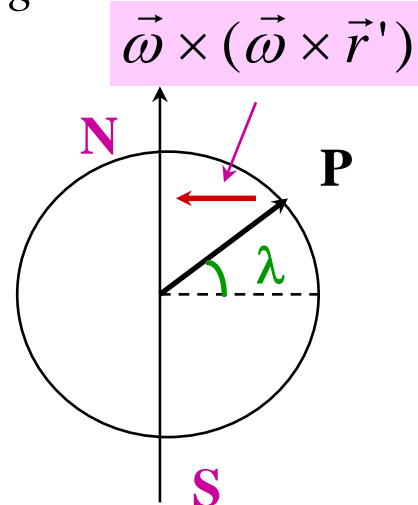
$$= \omega^2 R_T \cos \lambda$$

← raggio della Terra

← **latitudine**

All'equatore:

$$\omega^2 R_T \cong 4 \text{ cm/s}^2 \cong (0,4\%) g$$



# Esempio: accelerazione di gravità

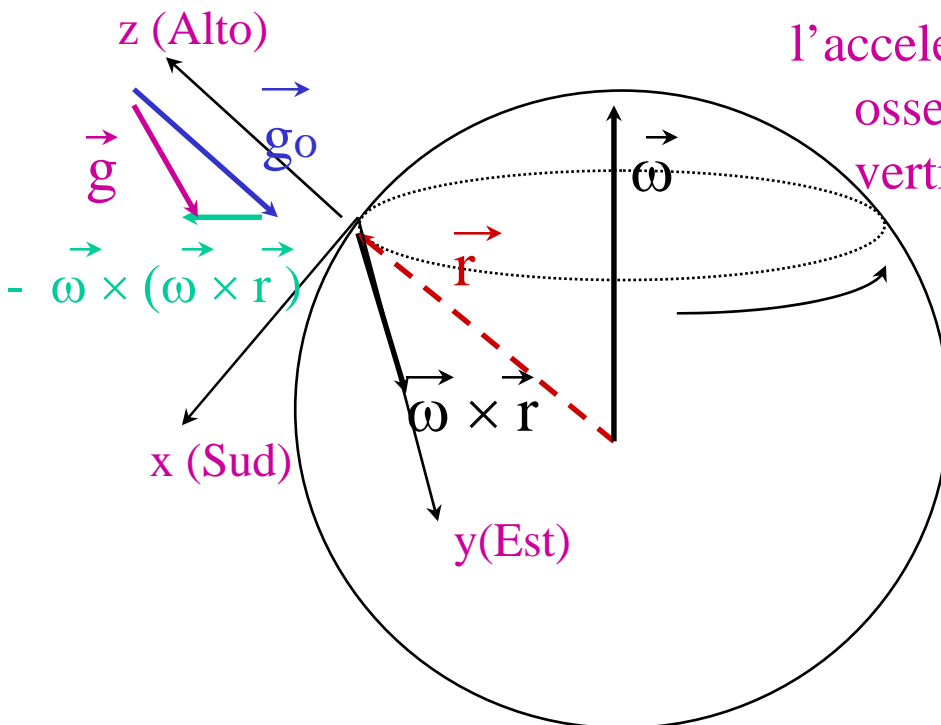
(  $\vec{\omega} = \text{costante}$ ,  $\vec{a}_0$ , trascurabile )

$$\vec{g}_0 = \vec{g} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2 \vec{\omega} \times \vec{v}'$$

$\vec{g}_0$  (blue arrow) → accelerazione assoluta  
 $\vec{g}$  (pink arrow) → accelerazione relativa

Accelerazione osservata in un sistema solidale con la Terra:

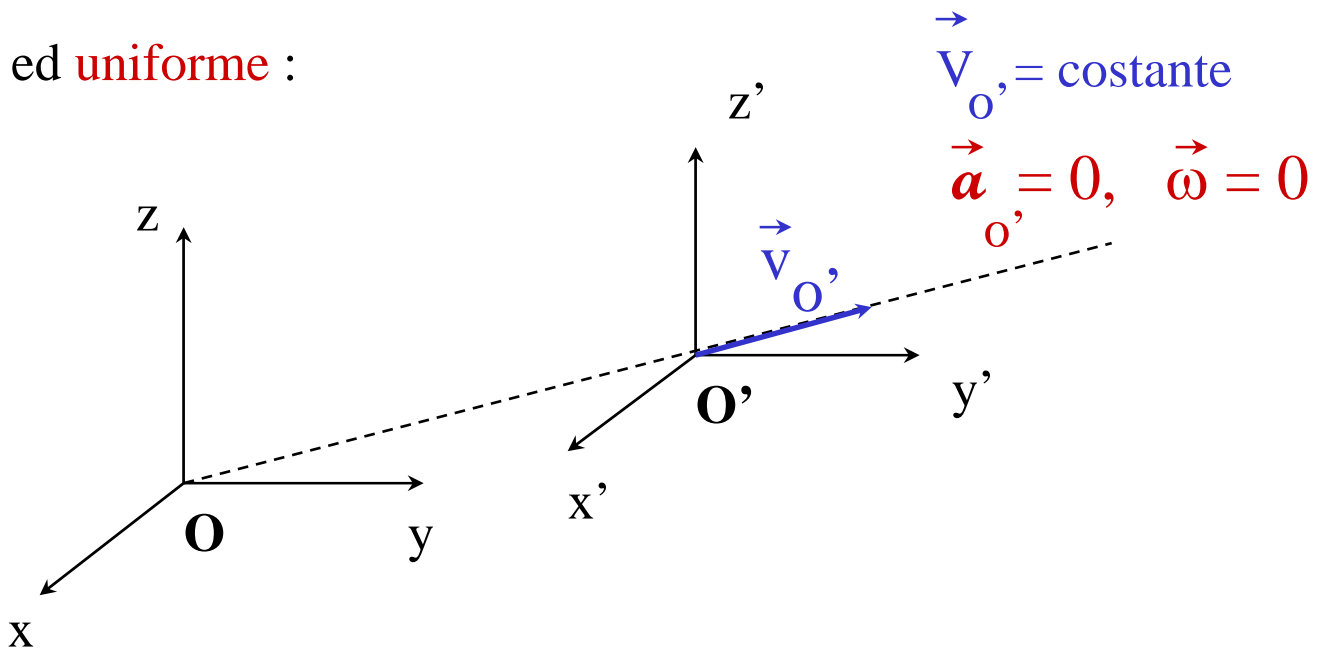
$$\vec{g} = \vec{g}_0 - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2 \vec{\omega} \times \vec{v}'$$



l'accelerazione di gravità  
 osservata (componente  
 verticale) aumenta con  
 la latitudine  
 ( è minima  
 all'Equatore)

# Trasformazioni galileiane

Sistemi di riferimento in **moto relativo** puramente **traslatorio**  
ed **uniforme** :



“Trasformazioni galileiane”:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \vec{OO}'(t) = \vec{r}'(t) + \vec{V}_{O'}t$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}'(t) + \vec{V}_{O'}$$

$$\vec{a}(t) = \vec{a}'(t)$$



le **accelerazioni**  
sono **invarianti**  
per trasformazioni  
galileiane

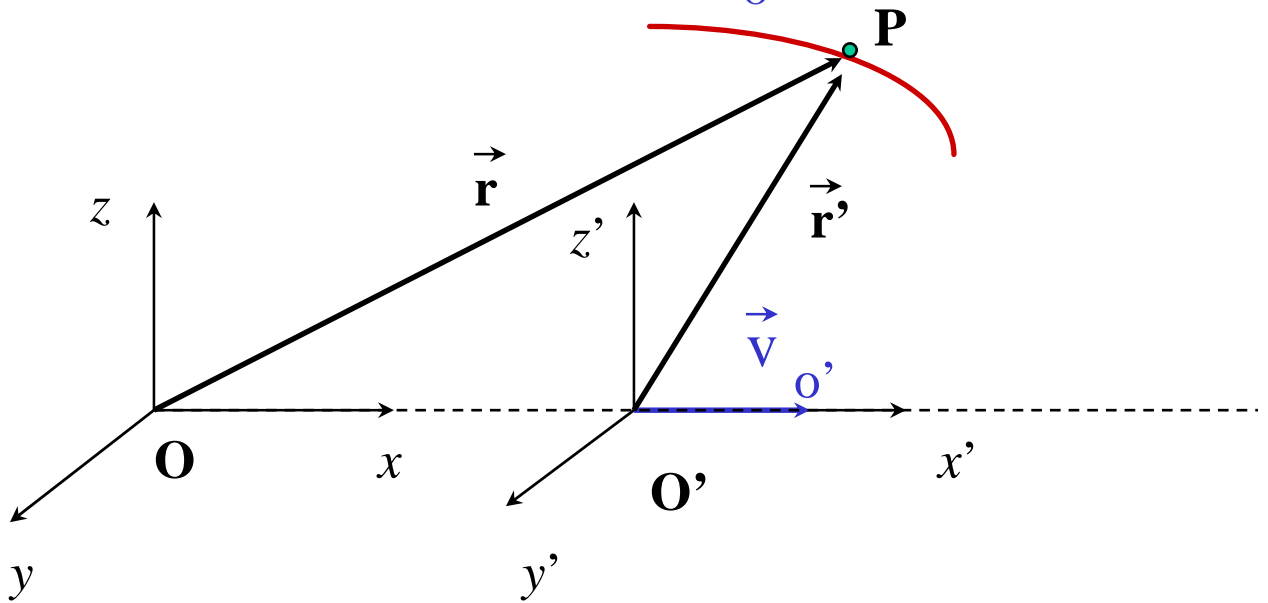
Le trasformazioni galileiane, che postulano un **tempo “assoluto”**,  
contraddicono il principio di invarianza della velocità della luce



# Trasformazioni galileiane

Scegliendo uno degli assi coordinati parallelo alla velocità

relativa di traslazione :  $x, x' // \vec{V}_O$



$$\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \vec{V}_{O'} t$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} x(t) &= x'(t) + V_{O'} t \\ y(t) &= y'(t) \\ z(t) &= z'(t) \end{aligned}$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}'(t) + \vec{V}_{O'}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v'_x(t) + V_{O'} \\ v_y(t) &= v'_y(t) \\ v_z(t) &= v'_z(t) \end{aligned}$$

$$\vec{a}(t) = \vec{a}'(t)$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} a_x(t) &= a'_x(t) \\ a_y(t) &= a'_y(t) \\ a_z(t) &= a'_z(t) \end{aligned}$$