GEOMETRIA

Prof. M. Spera

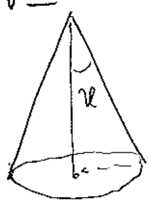
Prova scritta del 17/6/2011

a.a. 2010/11 – Tempo a disposizione: 2h

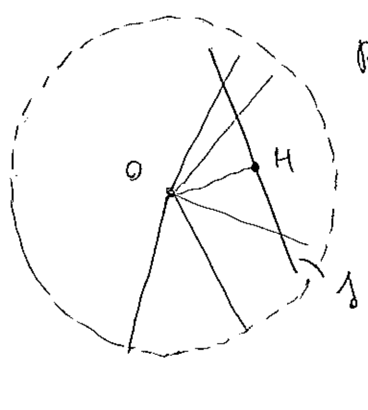
Le risposte vanno adeguatamente giustificate

(1) Data l'elica $\mathcal{E}: \underline{r} = \underline{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, e^t)$, $a>0$ si dimostri che è una curva regolare. Se ne calcoli successivamente la curvatura, nonché i piani principali in $P_0: (a, 0, 1)$. Dire, ev. in più modi, se $\mathcal{E}$ è una geodetica del cilindro $\Sigma: \underline{r} = \underline{r}(u,v) = (a \cos u, a \sin u, v)$.
Fac. Calcolare la torsione di $\mathcal{E}$ e verificare che $\lim_{t \to +\infty} \tau(t)$ non dipende da a.

(2) Si consideri la superficie $\Sigma: z = xy$ (paraboloide iperbolico). Dimostrare che si tratta di una superficie doppiamente rigata. Determinarne le linee asintotiche in un punto generico. Si tratta di una superficie minima? Nel punto $P_0: (1,1,1)$ calcolarne le curvature principali e abbozzare il grafico dell'indicatrice di Dupin.

(3) 

Dato un cono di apertura ϑ (v. figura) dimostrare, possibilmente in più modi, che la retta s, tracciata sullo sviluppo piano dello stesso, è una geodetica. (Sugg. geometria elementare + Clairaut)



Geometria 17/6/11

(1) $\underline{r} = \underline{r}(t) = (a\cos t,\ a\sin t,\ e^t)$ $a > 0$

$\dot{\underline{r}} = (-a\sin t,\ a\cos t,\ e^t)$

$\ddot{\underline{r}} = (-a\cos t,\ -a\sin t,\ e^t)$

$\dddot{\underline{r}} = (a\sin t,\ -a\cos t,\ e^t)$

$\underline{r}$ C^∞

$\underline{r}$ è iniettiva: lo è già terza e^t

$\|\dot{\underline{r}}\| > 0 \quad \forall t$

$$k = k(t) = \frac{\|\dot{r} \times \ddot{r}\|}{\|\dot{r}\|^3}$$ curvatura

$$\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -a\sin t & a\cos t & e^t \\ -a\cos t & -a\sin t & e^t \end{vmatrix} =$$

$$= \underline{i}\left[a e^t(\cos t + \sin t)\right] \overbrace{- \underline{j}\ a e^t\left[(-\sin t + \cos t)\right]}^{= \underline{j}\, a e^t(\sin t - \cos t)} + \underline{k}\ a^2$$

$$\|\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}\|^2 = a^2 e^{2t}(\cos t + \sin t)^2 + a^2 e^{2t}(\cos t - \sin t)^2 + a^4$$

$$= a^2\left\{a^2 + e^{2t}\left[\underbrace{\cos^2 + \sin^2}_{1} + \cancel{2\cos t \sin t} + \underbrace{\cos^2 + \sin^2}_{1} - \cancel{2\cos t \sin t}\right]\right\}$$

$$= a^2\left\{a^2 + 2e^{2t}\right\}$$

$$\|\dot{r} \times \ddot{r}\| = a\sqrt{a^2 + 2e^{2t}}$$

$$\|\dot{r}\|^2 = a^2 + e^{2t} \qquad \|\dot{r}\|^3 = (a^2 + e^{2t})^{3/2}$$

$$k = k(t) = \frac{a\sqrt{a^2 + 2e^{2t}}}{(a^2 + e^{2t})^{3/2}}$$

$$\tau = -\frac{\langle \dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}, \dddot{\underline{r}} \rangle}{\| \dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}} \|^2} =$$

$$- \frac{\cancel{a}e^t(\cos t + \sin t)\cdot \cancel{a}\sin t + \cancel{a}e^t(\sin t - \cos t)\cdot(-\cancel{a}\cos t) + \cancel{a}^2 \cdot e^t}{\cancel{a^2}(a^2 + 2e^{2t})}$$

$$= - \frac{e^t\left[\cancel{\cos t \sin t} + \sin^2 t - \cancel{\sin t \cos t} + \cos^2 t + 1\right]}{a^2 + 2e^{2t}} =$$

$$= - \frac{2\, e^t}{a^2 + 2e^{2t}}$$

$$\lim_{t \to +\infty} \tau = 0$$

$\boxed{\text{piani principali}}$ in $\underset{t=0}{P_0} = (a, 0, 1)$

* piano normale: $\langle \underline{r} - \underline{r}_0, \underset{\dot{\underline{r}}_0}{\underset{\text{or}}{\underline{t}_0}} \rangle = 0$

$$\dot{\underline{r}}_0 = (0, a, 1)$$

$$\underbrace{(x - a)\cdot 0}_{\substack{\| \\ 0}} + (y - 0)\cdot a + (z - 1)\cdot 1 = 0$$

$$\boxed{ay + z - 1 = 0}$$

piano osculatore $\langle \underline{r} - \underline{r}_0, \dot{\underline{r}}_0 \times \ddot{\underline{r}}_0 \rangle = 0$

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z-1 \\ 0 & a & 1 \\ -a & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-a)\cdot \cancel{a} - y\cdot\cancel{a} + (z-1)\cdot a^{\cancel{2}} = 0$$

$$x-a - y + az - a = 0$$

$$\boxed{x - y + az - 2a = 0}$$ piano osculatore

[controllo: $(0, a, 1)\begin{pmatrix}1\\-1\\a\end{pmatrix} = -a+a = 0$: è $\perp$ piano normale ok

passa per $(a, 0, 1)$: $a + a - 2a = 0$ ✓]

★ piano rettificante : passa per P_0 e la dir. è individuata da

$$\begin{array}{r} \\ \perp \text{ piano norm} \rightarrow \\ \perp \text{ piano osc.} \rightarrow \end{array}\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & a & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix}$$ Dunque è :

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z-1 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = (x-a)\left[a^2+1\right] - y(-1) + (z-1)(-a) = 0$$

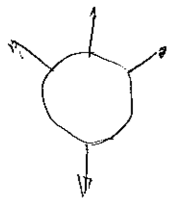
$$\boxed{(a^2+1)(x-a) + y - a(z-1) = 0}$$

Controllo: passa per P_0 : ok

$$\perp \begin{pmatrix} \perp\begin{pmatrix} ((a^2+1), & 1, & -a) \\ (1 & -1 & a) \end{pmatrix} \\ (0 & a & 1) \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} a^2+1-1-a^2=0 \\ \\ a-a=0 \end{matrix} \quad ✓.$$

$\mathcal{C}$ non è una grod (non è un'elica cilindrica).

oppure, basta osservare che $\underline{N} = (\cos t, \sin t, 0)$



e inoltre che $\langle \underline{b}, \underline{N} \rangle \neq 0$

$\underline{b} \propto \dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}$

$(k = \kappa(t) > 0 \ \forall t)$

$$a e^t (\cos t + \sin t) \cdot \cos t +$$

$$a e^t (\sin t - \cos t) \cdot \sin t +$$

$$\cancel{a^2 \cdot 0} .$$

$$= a e^t \left[\cos^2 t + \cos t \cancel{\sin t} + \sin^2 t - \cos t \cancel{\sin t} \right]$$

$$= a e^t > 0 \quad \forall t .$$

② $z = xy$ | Geometria 17/6/11

paraboloide iperbolico

è doppiamente rigata

$\Rightarrow K \leq 0$. Linee asintotiche in un pto

generico: i due regoli

In maggiore dettaglio:

$$\underline{r} = \underline{r}(u,v) = (\overset{x}{u}, \overset{y}{v}, \overset{z}{uv})$$

si fissi u: $v \mapsto (u_0, v, u_0 v)$ è una retta $r_1 \subset \Sigma$

" " v $u \mapsto (u, v_0, u v_0)$ " r_2 "

Fissato $P_0 = \underline{r}(u_0, v_0) \equiv \underline{r}_0$, le due rette date costituiscono direzioni asintotiche, e sono anche linee asintotiche

Sono $\perp$? $\langle \underbrace{(0, 1, u_0)}_{\text{velocità di } r_1}, \underbrace{(1, 0, v_0)}_{\text{vel. di } r_2} \rangle = u_0 v_0 \neq 0$ in gen.

Dunque non è una sup. minima (in quest'ultimo caso, l'indicatrice di Dupin è costituita da due iperboli equilatere)

Indicatrice di Dupin in $P_0 = (1,1,1)$: due iperboli.

dobbiamo calcolare k_1 e k_2 in P_0 (curvature principali)

$\underline{r} = (u, v, uv)$
$\underline{r}_u = (1, 0, v)$
$\underline{r}_v = (0, 1, u)$
$\underline{r}_{uu} = (0, 0, 0)$
$\underline{r}_{uv} = (0, 0, 1)$
$\underline{r}_{vv} = (0, 0, 0)$

$$\underline{N} = \frac{r_u \times r_v}{\|\cdot\|} = \frac{1}{\|\ \|} \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 0 & v \\ 0 & 1 & u \end{vmatrix}$$

$$= \left[\underline{i}\,(-v) - \underline{j}\cdot u + \underline{k}\right] \frac{1}{\|\ \|}$$

$$= \left[-v\,\underline{i} - u\,\underline{j} + \underline{k}\right] \frac{1}{\|\ \|}$$

$$= \left(\frac{-v}{\sqrt{u^2+v^2+1}}, \frac{-u}{\sqrt{u^2+v^2+1}}, \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2+1}} \right)$$

$$\underbrace{E}_{\sim} = \overbrace{1+v^2}^{I^a} \qquad \overbrace{e = 0}^{II^a}$$

$$F = uv \qquad f = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2+1}}$$

$$G = 1+u^2 \qquad g = 0$$

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{-\frac{1}{(1+u^2+v^2)}}{(1+u^2)(1+v^2) - u^2v^2} = \frac{-\frac{1}{(1+u^2+v^2)}}{1+u^2+v^2+\cancel{u^2v^2}-\cancel{u^2v^2}}$$

$$= -\frac{1}{(1+u^2+v^2)^2} \qquad \boxed{K = -\frac{1}{(1+u^2+v^2)^2}}$$

$$H = \frac{1}{2}\,\frac{G\overset{0}{e} - 2Ff + E\overset{0}{g}}{1+u^2+v^2} = \frac{1}{2}\,\frac{-2\frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}}\cdot uv}{1+u^2+v^2}$$

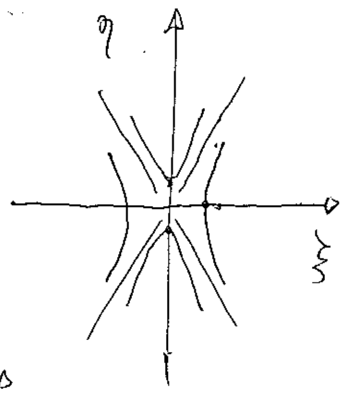
$$= -\frac{uv}{(1+u^2+v^2)^{3/2}}$$

in $P_0 = (1,1,1)$: $K = -\frac{1}{9} =$

$-\frac{1}{3^{3/2}}$ $\qquad H = -\frac{1}{3^{3/2}}$

$k_1 \xi^2 + k_2 \eta^2 = \pm 1$

$-\frac{\sqrt3}{3}\xi^2 + \frac{\sqrt3}{9}\eta^2 = \pm 1$



as

$\frac{\sqrt3}{9}\eta^2 - \frac{\sqrt3}{3}\xi^2 = 0 \qquad \eta^2 - 3\xi^2 = 0$

$(\eta + \sqrt3\xi)(\eta - \sqrt3\xi) = 0$

$\eta = \sqrt3\xi$

$\eta = -\sqrt3\xi$

k_1, k_2 : radici : $k^2 - 2Hk + K = 0$

$$k^2 + \frac{2}{3^{3/2}}k - \frac{1}{3^2} = 0$$

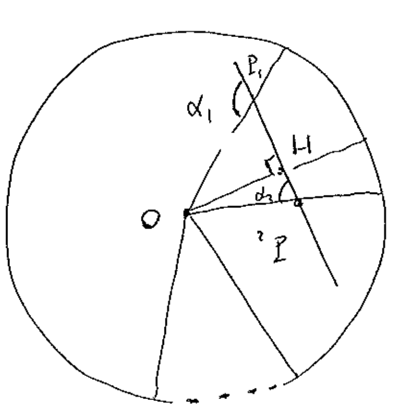
$$3^2 \cdot k^2 + 2\sqrt3 k - 1 = 0$$

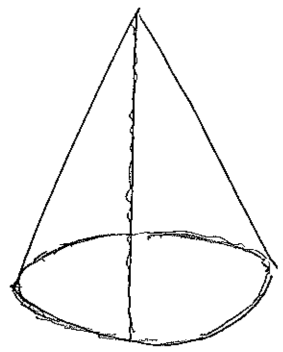
$$k = \frac{-\sqrt3 \pm \sqrt{3+9}}{9} = \frac{-\sqrt3 \pm \sqrt{12}}{9} = \frac{-\sqrt3 \pm \sqrt{3\cdot 4}}{9} =$$

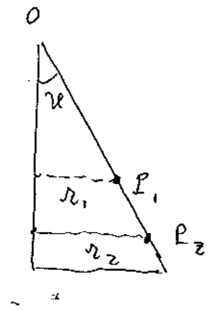
$$= -\frac{\sqrt3 \pm 2\sqrt3}{9} = \begin{cases} \frac{\sqrt3}{9} = k_2 \\ -\frac{\sqrt3}{3} = k_1 \end{cases}$$

③

Geometria 17/6/11







$r_1 = \xi \cdot \overline{OP_1}$

$r_2 = \xi \cdot \overline{OP_2}$

↖ stesso $\xi = \sin\vartheta$

$r_1 = \overline{OP_1} \sin\vartheta$

ora $\sin\alpha \cdot r = \underbrace{\sin\alpha \cdot \overline{OP}} \cdot \sin\vartheta = \sin\vartheta \cdot \overline{OH}$

$= \text{costante}$

e si conclude con Clairaut.

Altro metodo: il cono è loc. isometrico al piano, le geodetiche sono le immagini delle rette.