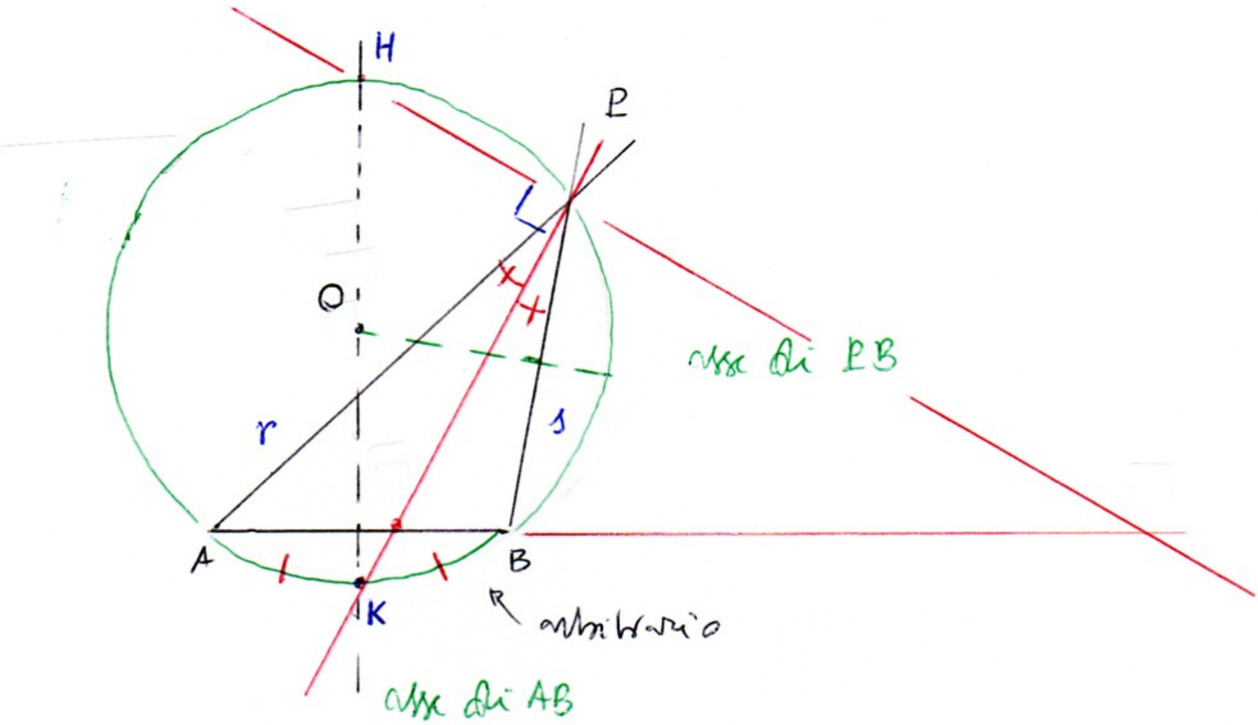
## ★ Ancora una costruzione delle bisettrici



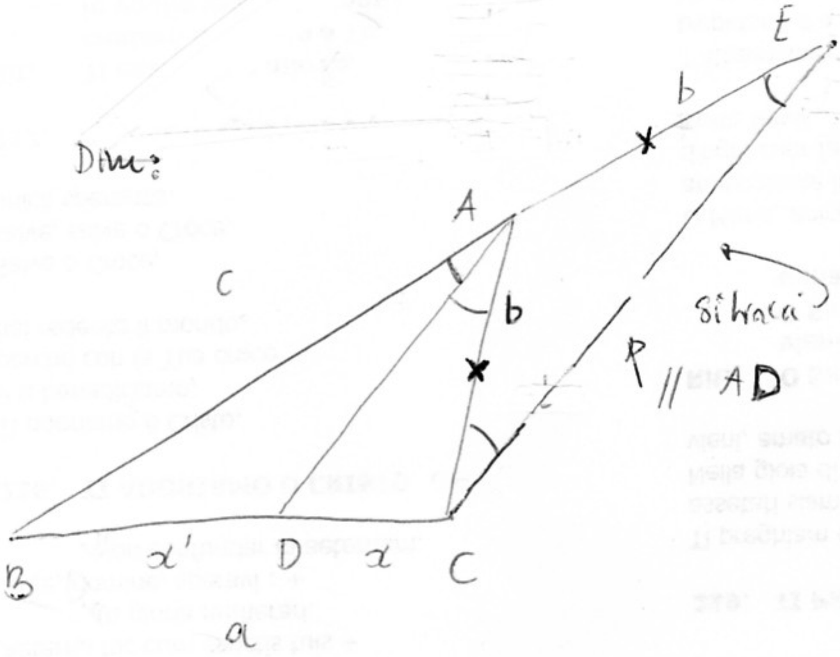

Date $r$ e $s$, intersecantisi in $P$, si scelgono ad arbitrio $A \in r$, $B \in s$. Costruiti gli assi di $AB$ e $PB$, per es., si individui $O$ e si tracci la circonferenza di centro $O$ e raggio $OP = OA = OB$

La retta $PK$ (v. fig.) è bisettrice poiché $\widehat{AK} = \widehat{KB}$ e così lo è $PH$, poiché $H\hat{P}K$ è necessariamente retto

☆ Proprietà delle bisettrici di un triangolo

AD bisettrice di $\hat{A}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{x'}{x} \left( = \dfrac{BD}{DC} \right) = \dfrac{c}{b}$

Dim:




$\dfrac{x'}{x} = \dfrac{c}{b}$ (*)

si traccia r // AD

$D\hat{A}C = A\hat{C}E$ (alterni interni)

per ipotesi $\parallel$

$B\hat{A}D = B\hat{E}C$ (corrispondenti)

$\Rightarrow A\hat{C}E = B\hat{E}C \Rightarrow ACE$ è isoscele

$\Rightarrow b = AC = AE \Rightarrow$ (Talete)

$x' : x = c : b$

☆ vale anche il reciproco: se D divide BC in modo che (*) sia soddisfatta, allora AD è la bisettrice di $\hat{A}$

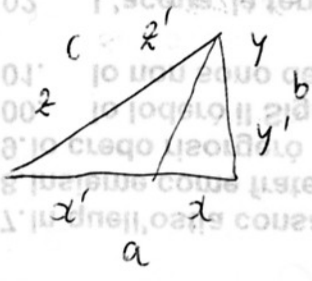
Questo teorema suggerisce una nuova costruzione della bisettrice di un angolo:

[sintesi]


parallela ad EC per A è la bisettrice cercata

★ Corollario: le tre bisettrici di un triangolo si incontrano in un punto (altra dimostrazione)

Dim. Si ha $\dfrac{x'}{x} = \dfrac{c}{b}$ e, parimenti



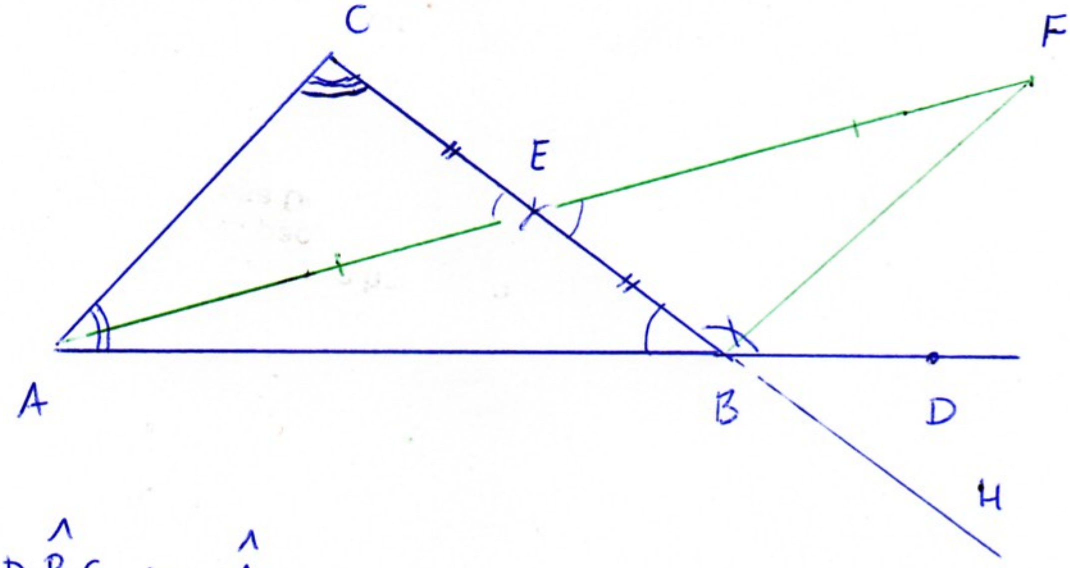

$$\frac{y'}{y} = \frac{a}{c}, \quad \frac{z'}{z} = \frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{x'y'z'}{x\,y\,z} = \frac{c}{b}\cdot\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{a} = 1$$

e si conclude in virtù del teorema di Ceva (v. oltre)

# ★ Teorema dell'angolo esterno (richiamo)

(Euclide I.16)




$D\hat{B}C > \hat{A}$

$D\hat{B}C > \hat{C}$

<u>Dim:</u> i triangoli ACE e EBF sono congruenti (1° criterio) $\Rightarrow$ $\hat{C} = E\hat{B}F < E\hat{B}D$

Analogamente $\hat{A} < A\hat{B}H = C\hat{B}D$ (opposti al vertice), e da ciò segue l'asserto.

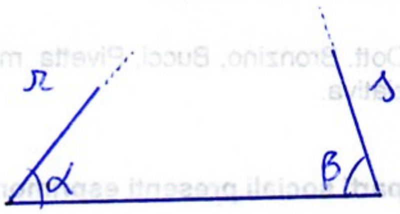
<u>Corollario</u> (Euclide I.17): $\hat{A} + \hat{B} < 2$ retti [e ciò vale per due angoli qualsiasi di un triangolo]

<u>Dim:</u> $\hat{A} < C\hat{B}D \Rightarrow$

$\hat{A} + \hat{B} < \hat{B} + C\hat{B}D = 2$ retti $\square$

# Nota:

Il V postulato, nella forma data da Euclide, assume la verità dell'inverso di Euclide I.17




$\alpha + \beta < 2$ retti $\Rightarrow$ r ed s si incontrano nella banda indicata

★ Esso <u>non</u> <u>viene</u> <u>usato</u> fino alla Prop. I.29