Università degli studi di Verona
Corsi di laurea in Matematica Applicata, Informatica e Informatica Multimediale
Prova scritta di Matematica di Base — 18 giugno 2007

matricola .... nome .... cognome ....

Corso di Laurea in | Informatica | Informatica Mult. | Matematica Appl. |

Scrivere subito nome, cognome e numero di matricola, indicando la sezione di corso seguita. Le soluzioni vanno trascritte solo su questi fogli, negli spazi appositamente riservati. Si può comunque usare il retro, purché sia chiaro il riferimento.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Tot

1) Si consideri la seguente relazione sull'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi

$$R = \{\,(a,b) \mid a,b \in \mathbf{Z},\ a-5b \text{ è multiplo di } 4\,\}.$$

Dimostrare che R è una relazione d'equivalenza. È vero che $[1]_R = [15]_R$? È vero che $[10]_R = [2]_R$? Quante sono le classi d'equivalenza individuate da R?

2) Mostrare che $R=\{(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(a,f),(a,g),(b,c),(b,e),(b,d),(b,f),(b,g),(c,g),(d,e),$ $(d,f),(d,g),(e,f),(e,g),\}$ è una relazione d'ordine stretto sull'insieme $\{a,b,c,d,e,f,g\}$. Determinare gli elementi massimali, minimali, eventuali massimo, minimo, maggioranti, minoranti, estremo superiore e estremo inferiore del sottoinsieme $\{b,c,d,e\}$.

3) Dimostrare per induzione che, per $n \geq 2$, $5^n \geq 4^n + 2^n$.

4) (Solo per il corso di Laurea in Informatica) Si risponda alle seguenti domande, motivando le risposte:

(1) Quando due insiemi hanno la stessa cardinalità?

(2) L'insieme **Q** dei numeri razionali e l'insieme **N** dei numeri naturali hanno la stessa cardinalità? Perché?

(3) L'insieme Π dei numeri reali irrazionali è numerabile? Perché?

4) (Solo per i corsi di Laurea in Informatica Multimediale e Matematica Applicata)

(1) Si dia la definizione di funzione iniettiva.

(2) Dimostrare che se f e' una funzione iniettiva, allora $(f^{-1})^{-1} = f$.

5) In un linguaggio in cui c'è un simbolo di relazione unaria P e un simbolo di funzione binaria f, dire quali delle seguenti successioni di simboli sono formule (F), quali termini (T) e quali nulla (N); in quest'ultimo caso scrivere nell'ultima colonna una breve giustificazione.

	F	T	N	
$\forall v_0 \rightarrow Pv_0 \neg Pfv_0v_1$				
$ffv_0v_1v_2$				
$\neg Pfv_1fv_2v_0$				
$\wedge \rightarrow fv_0v_1Pv_0Pfv_0v_2v_1$				
$PPPv_0$				
$\vee \rightarrow Pfv_0fv_1v_2 \neg Pfv_1v_2 \exists v_0fv_0v_1$				
$\rightarrow Pv_0 \exists Pv_1$				
$\neg \vee \rightarrow \forall v_0Pfv_0v_1Pv_0Pfv_0fv_2v_1$				
$\neg Pv_0Pfv_1v_2$				

6) Dire che cosa significa che una formula α è soddisfacibile. Dire cosa significa che la formula α è conseguenza logica dell'insieme di formule $\{\beta, \gamma\}$. Dimostrare che, per ogni scelta delle formule α e β,

$$\{\alpha \vee \beta\} \models \rightarrow \neg\alpha\beta$$

7) Si consideri la struttura $\mathfrak{N} = (\mathbf{N}, \{\equiv, \prec\}, \{\oplus, \otimes\}, \{\mathit{0}, \mathit{1}\})$, dove $\mathbf{N}$ denota l'insieme dei numeri naturali, $\equiv$ la relazione binaria di essere lo stesso numero, $\prec$, $\oplus$ e $\otimes$ rispettivamente l'ordine, l'addizione e la moltiplicazione tra numeri naturali, *0* e *1* i numeri zero e uno.

Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio adatto alla struttura i cui simboli propri siano i predicati $=, <$; i simboli per funzione $+$, $\times$ e s; i simboli per costante $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$.

Nel linguaggio $\mathcal{L}$ si scriva una formula $\varphi(v_0, v_1)$ con le sole variabili libere indicate tale che $\mathfrak{N} \models \varphi(v_0, v_1)[a, b]$ se e solo se $a - b$ è un numero dispari non divisibile per 3.

8) Sia $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da:

$$f(x) = \begin{cases} -e^{-x} & x \leq 0 \\ x^2 - 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

Dire se f è una funzione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ e, in caso positivo, dire se f è totale, iniettiva, suriettiva. Esiste l'inversa di f? In caso affermativo, trovare f^{-1}.

9) Siano $f, g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definite da

$$f(x) = e^{\frac{x}{x-1}} \qquad g(x) = \sqrt{\ln x + 1}$$

(1) Trovare l'insieme di definizione di f e l'insieme di definizione di g.
(2) Determinare le funzioni composte $f \circ g$ e $g \circ f$, specificandone gli insiemi di definizione.