Sistemi a Tempo Reale

Informatica - Tiziano Villa

17 Marzo 2008

Nome e Cognome:
Matricola:
Posta elettronica:

problema	punti massimi	i tuoi punti
problema 1	10	
problema 2	10	
problema 3	10	
totale	30	

1. (a) Si definisca la nozione di macchina a stati finiti nondeterministica.

   (b) Si definisca la nozione di equivalenza tra due macchine a stati finiti nondeterministiche.

   (c) Si definisca la nozione di raffinamento tra due macchine a stati finiti nondeterministiche.

   Traccia di soluzione.

   M_1 raffina M_2 se e solo se hanno i medesimi ingressi e uscite e le successioni d'ingressi/uscite prodotte da M_1 sono un sottoinsieme (proprio o no) di quelle di M_2.

(d) Si considerino le due macchine a stati finiti seguenti:

Macchina M':

- stati: s_1', s_2' con s_1' stato iniziale;
- transizione da s_1' a s_1': $\bullet/\perp$,
  transizione da s_1' a s_2': $\bullet/0$,
  transizione da s_2' a s_2': $\bullet/\perp, \bullet/0, \bullet/1$.

Macchina M'':

- stati: s_1'', s_2'' con s_1'' stato iniziale;
- transizione da s_1'' a s_1'': $\bullet/0, \bullet/\perp$,
  transizione da s_1'' a s_2'': $\bullet/0$,
  transizione da s_2'' a s_2'': $\bullet/\perp, \bullet/0, \bullet/1$.

Si risponda in ordine alle seguenti domande (si indichi sempre il numerale romano in ogni risposta):

i. Si disegnino i diagrammi di transizione delle due macchine.

ii. Si classifichino le macchine rispetto al determinismo.
M' e' pseudo-nondeterministica.
M'' e' nondeterministica, ma non pseudo-nondeterministica.

iii. Si trovi una simulazione di M' da parte di M'', se esiste.
Traccia di risposta.
M'' simula M' come mostrato dalla relazione
$R_{M'-M''} = \{(s_1', s_1''), (s_2', s_2'')\}$.

iv. Si trovi una simulazione di M'' da parte di M', se esiste.
Traccia di risposta.
M' simula M'' come mostrato dalla relazione
$R_{M''-M'} = \{(s_1'', s_1'), (s_1'', s_2'), (s_2'', s_2')\}$.

v. Si trovi una bisimulazione tra le due macchine, se esiste.
Traccia di risposta.
Non c'e' una bisimulazione perche' l'unione delle due precedenti relazioni non e' simmetrica, dato che non e' presente la coppia (s_2', s_1'').

vi. Si determinizzi la macchina M'' e si mostri il diagramma di transizione della macchina deterministica cosi' trovata $det(M'')$.
Macchina $det(M'')$:

- stati: $\{s_1''\}, \{s_1'', s_2''\}, \{s_2''\}$ con $\{s_1''\}$ stato iniziale;
- transizione da $\{s_1''\}$ a $\{s_1''\}$: $\bullet/\perp$,
  transizione da $\{s_1''\}$ a $\{s_1'', s_2''\}$: $\bullet/0$,

transizione da $\{s_1^{''}, s_2^{''}\}$ a $\{s_1^{''}, s_2^{''}\}$: $\bullet/0, \bullet/\bot$,
transizione da $\{s_1^{''}, s_2^{''}\}$ a $\{s_2^{''}\}$: $\bullet/1$,
transizione da $\{s_2^{''}\}$ a $\{s_2^{''}\}$: $\bullet/\bot, \bullet/0, \bullet/1$.

vii. Si trovi una simulazione di $M^{'}$ da parte di $det(M^{''})$, se esiste.
Traccia di risposta.
$det(M^{''})$ simula $M^{'}$ come mostrato dalla relazione
$R_{M'-det(M'')} = \{(s_1^{'}, s_1^{''}), (s_2^{'}, \{s_1^{''}, s_2^{''}\}), (s_2^{'}, s_2^{''})\}$.

viii. Si trovi una simulazione di $det(M^{''})$ da parte di $M^{'}$, se esiste.
Traccia di risposta.
$M^{'}$ simula $det(M^{''})$ come mostrato dalla relazione
$R_{det(M'')-M'} = \{(s_1^{''}, s_1^{'}), (\{s_1^{''}, s_2^{''}\}, s_2^{'}), (s_2^{''}, s_2^{'})\}$.

ix. Si trovi una bisimulazione tra le due macchine $M^{'}$ e $det(M^{''})$, se esiste.
Traccia di risposta.
L'unione delle precedenti relazioni $R_{M'-det(M'')} \cup R_{det(M'')-M'} = \{(s_1^{'}, s_1^{''}), (s_2^{'}, \{s_1^{''}, s_2^{''}\}), (s_2^{'}, s_2^{''}), (s_1^{''}, s_1^{'}), (\{s_1^{''}, s_2^{''}\}, s_2^{'}), (s_2^{''}, s_2^{'})\}$
e' simmetrica, quindi costituisce una bisimulazione tra $M^{'}$ e $det(M^{''})$.

x. Si commentino i risultati precedenti.
Traccia di risposta.
$M^{'}$ e $M^{''}$ sono esempi di macchine a stati finiti minimizzate equivalenti ($M^{'}$ raffina $M^{''}$ e $M^{''}$ raffina $M^{'}$), ma non isomorfe (non sono bisimili).
Si ricordi che poiche' $M^{'}$ e' pseudo-nondeterministica e $M^{''}$ e' nondeterministica, ma non pseudo-nondeterministica, il fatto che $M^{''}$ simula $M^{'}$ implica che $M^{'}$ raffina $M^{''}$ (cioe' $M^{'}$ esibisce un sottoinsieme dei comportamenti di $M^{''}$); inoltre si ha che $M^{'}$ simula $M^{''}$ se e solo se $M^{''}$ raffina $M^{'}$.
Determinizzando gli stati di $M^{''}$ si ottiene una macchina $det(M^{''})$ pseudo-nondeterministica equivalente a $M^{''}$. Ne consegue che $M^{'}$ e $det(M^{''})$ sono bisimili, poiche' macchine pseudo-nondeterministiche sono equivalenti se e solo se sono bisimili.
Si noti che minimizzando gli stati di $det(M^{''})$ (si noti che $\{s_1^{''}, s_2^{''}\}$ e $\{s_2^{''}\}$ sono stati equivalenti) si ottiene una macchina a stati finiti isomorfa a $M^{'}$.

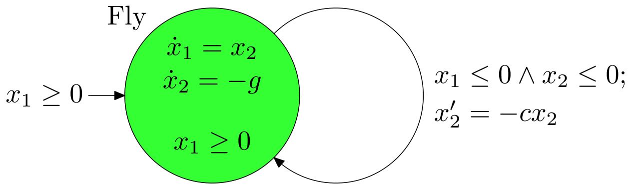

Figure 1: La palla che rimbalza

2. Si consideri l'automa ibrido mostrato nella Fig. 1 che modella un oggetto elastico di posizione $x_1(t)$ e velocita' $x_2(t)$ che cade al suolo per la legge di gravitazione e rimbalza con coefficiente di elasticita' c. Si assuma che sia $c = 0,5$.

   (a) Si descriva formalmente tale automa seconda la notazione usata in classe.

   Traccia di soluzione.

   - locazioni: $Q = \{l_1\}$, dove l_1 e' la locazione iniziale con condizioni iniziali $x_1(t) \geq 0$;
   - dinamica della locazione l_1: $\dot{x_1}(t) = x_2(t), \dot{x_2}(t) = -g$,
     invariante della locazione l_1: $x_1(t) \geq 0$
   - transizione da l_1 a l_1: $A/assente, x_2'(t) := -0,5x_2$,
     dove $A = \{(x_1(t), x_2(t), u(t)) \mid x_1(t) \leq 0 \wedge x_2(t) \leq 0 \wedge u(t) = assente\}$,
     (la sintassi delle annotazioni di una transizione e' *guardia/uscita, azione*);
   - ingresso $u(t) \in \{assente\}$;
   - uscita $y(t) \in \{assente\}$.

(b) Si studi l'insieme degli stati raggiungibili e se ne disegni il grafico.

Traccia di soluzione.

Si puo' dimostrare che l'insieme degli stati raggiungibili e' dato da:
$Reach = \{(l_1, x_1(t), x_2(t)) \in Q \times \mathbb{R}^2 \mid x_1(t) \geq 0\}$.

3. (a) Si calcoli l'utilizzo massimo dell'unita' di calcolo per una coppia di processi per l'algoritmo di assegnamento RMS (Rate Monotonic Scheduling).

   Traccia di soluzione.

   $U \leq 2(2^{1/2} - 1) \approx 0,83$ e' una condizione sufficiente per la schedulabilita' con l'algoritmo RM per due processi. Per il teorema di Liu e Layland secondo cui se esiste una schedulazione con priorita' statiche che soddisfa tutte le scadenze allora esiste una schedulazione RM (cioe', l'algoritmo RM e' ottimale tra quelli a priorita' fissa), si deduce che $U \leq 2(2^{1/2} - 1)$ e' una condizione sufficiente affinche' ci sia una schedulazione con priorita' statiche per due processi.

   Si rimanda al materiale del corso per la dimostrazione della condizione sufficiente $U \leq 2(2^{1/2} - 1) \approx 0,83$ per la schedulabilita' con l'algoritmo RM per due processi. L'idea della dimostrazione e' di calcolare il maggiorante minimo U_{max} (cioe' il limite superiore minimo) del fattore di utilizzazione $U = C_1/T_1 + C_2/T_2$ per l'algoritmo RM per due processi periodici con periodi T_1 e T_2 (si supponga senza perdita di generalita' $T_1 < T_2$). Al fine di calcolare il limite superiore del fattore di utilizzazione si aumenta il tempo di esecuzione C_2 affinche' il processore sia pienamente utilizzato, cioe' si calcola $U_{max} = C_1/T_1 + C_{2,max}/T_2$, dove $C_{2,max}$ e' opportunamente definito (a seconda che tutte le richieste del primo processo siano completare prima della seconda richiesta del primo processo oppure no). Si calcola poi il minimo di U_{max} che e' raggiunto in entrambi i casi per il valore di $C_1 = T_2 - T_1\lfloor T_2/T_1 \rfloor$. Infine con un po' di analisi si calcola tale minimo al variare del rapporto T_2/T_1 e si ricava la formula data.

   Il precedente ragionamento si estende anche per n processi, nel qual caso la condizione sufficiente per la schedulabilita' con l'algoritmo RM assume la forma $U \leq n(2^{1/n} - 1)$.

(b) Dati i seguenti processi che eseguono su una unita' di calcolo singola, si mostri un assegnamento secondo l'algoritmo RMS (Rate Monotonic Scheduling), se esiste.

processo	tempo di esecuzione	scadenza
P1	2	4
P2	3	6
P3	3	12

Traccia di risposta.

Non c'e' nessun assegnamento di priorita' che garantisca la schedulazione. Anche se ogni processo richiede un tempo di esecuzione minore del suo periodo, la loro combinazione richiede piu' del 100% del tempo di calcolo disponibile. Infatti in un intervallo di 12 unita' di tempo, dobbiamo eseguire P1 tre volte, con un utilizzo di 6 unita' di tempo; P2 due volte, con un utilizzo di 6 unita' da tempo; P3 una volta, con un utilizzo di 3 unita' di tempo. Il totale di 6+6+3=15 unita' di tempo e' maggiore delle 12 unita' di tempo disponibili. In altri termini, nel nostro esempio si ha $U > 1$, mentre in generale $U \leq 1$ e' una condizione necessaria per la schedulabilita' indipendentemente dalla strategia di schedulazione.

Invece $U \leq 2(2^{1/2}-1)$ e' una condizione sufficiente per la schedulabilita' con l'algoritmo RM. Trattandosi di una condizione sufficiente, se non e' vero che $U \leq 2(2^{1/2}-1)$ (ma $U \leq 1$), una schedulazione RM puo' esistere o meno.